N^{0}d'ordre : 28

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

pour obtenir

le Titre de Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon
spécialité : Mathématiques

au titre de la formation doctorale de : Mathématiques

par Frédéric BOSIO

Titre :

Actions holomorphes et localement libres de groupes de Lie abéliens

---

Date de la soutenance : 30 septembre 1996

Rapporteurs :

Monsieur Pierre MOLINO
Monsieur Robert MOUSSU
Monsieur Alberto VERJOVSKY

Composition du jury :

Monsieur Michel BRION
Monsieur Yves CARRIÈRE
Monsieur Étienne GHYS **directeur**
Monsieur Gilbert HECTOR
Monsieur Robert MOUSSU

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Etienne Ghys d'avoir accepté de diriger cette thèse, pour m'avoir proposé ce sujet, m'avoir constamment fourni de bons conseils et m'avoir toujours soutenu avec beaucoup de patience et de dévouement. C'est grâce à lui si cette thèse existe.

Je remercie Pierre Molino, Robert Moussu et Alberto Verjovsky pour avoir accepté d'être rapporteurs sur ma thèse et pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont réservé dans leurs universités respectives.

Je remercie Michel Brion pour toutes les interessantes conversations que nous avons eues ensemble. Je suis très sensible à sa présence dans mon jury.

Je remercie Yves Carrière et Gilbert Hector de me faire l'honneur d'être membre de mon jury.

Je remercie également tous les membres de l'UMPA que j'ai cotoyés durant ma thèse, pour tous les encouragements et le soutien dont ils m'ont fait bénéficier. Parmi eux, j'adresse des remerciements particuliers à Laurent Bonavero pour toute l'aide qu'il m'a fournie et le plaisir que j'ai eu lors de toutes nos discussions mathématiques, Ian Schindler pour m'avoir appris -notamment- la joie de vivre, et, à titres divers, Sylvain Barré, Vincent Colin, Jean-Philippe Furter, Sylvestre Gallot, Stéphane Grognet, Peter Haïssinsky, Florence Hubert, Patrick Iglésias, Véronique Lizan, Souad Marsou, Marc Perret, Julio C. Rebelo, Gilles Robert, Pascale Roesch, Bruno Sevennec et Abdelghani Zeghib.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de ce document.

Contents

Introduction

L'idée d'étudier la dynamique des actions de groupes de Lie sur les variétés est une idée naturelle, fructueuse et a donné lieu à de vastes recherches. Une des propriétés dynamiques les plus remarquables est celle de liberté locale des actions. Elle est à la fois très contraignante, ce qui permet d'obtenir des résultats précis, et suffisamment souple pour obtenir de nombreux exemples intéressants et non triviaux.

Dans notre travail, nous n'étudierons qu'un cas très particulier de ces actions : les actions holomorphes localement libres de $\mathbb{C}^n$ sur les variétés complexes compactes connexes de dimension $n+1$. Les motivations pour une telle étude sont nombreuses et de natures diverses.

L'une d'elle est de généraliser au cas de la géométrie complexe les résultats de même nature obtenus en géométrie réelle, où on connaît les variétés compactes qui supportent des actions localement libres de codimension 1 de groupes abéliens. Le cas des variétés de dimension 3 supportant une action localement libre de $\mathbb{R}^2$ a été résolu par Rosenberg, Roussarie et Weil [?], puis Châtelet et Rosenberg [?] ont résolu le cas des variétés à bord et des actions ayant une orbite compacte. Enfin, Tischler [?] a résolu le cas général. Citons les résultats suivants :

Théorème **0.0.1** *(Châtelet & Rosenberg , 1974) Soit M une variété compacte, orientable, à bord, de dimension $n+1$ et supportant une action localement libre de classe $\mathcal{C}^{\in}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors M est homéomorphe à $T^n \times I$ où T^n est le tore (réel) de dimension n et I l'intervalle compact.*

Théorème **0.0.2** *(Tischler, 1985) Soit M une variété fermée, orientable, de dimension $n+1$ et de classe $\mathcal{C}^{\in}$. Alors, M supporte une action localement libre de classe $\mathcal{C}^{\in}$ de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si M est homéomorphe à un fibré en tores T^n de dimension n sur un cercle.*

En dehors des actions des groupes abéliens, d'autres groupes ont également été étudiés. Les actions localement libres de codimension 1 des groupes nilpotents ont été étudiées par plusieurs auteurs qui ont établi des résultats proches du cas abélien. Nous pouvons notamment citer le théorème suivant [?] :

Théorème **0.0.3** *(Hector & Ghys & Moriyama, 1989) Soit M une variété fermée orientable supportant une action localement libre d'un groupe nilpotent réel. Alors M est un fibré en un espace homogène d'un groupe nilpotent sur un tore.*

De plus, si le feuilletage défini par l'action a de l'holonomie, alors M est un fibré sur le cercle dont la fibre est un espace homogène du groupe qui agit.

On connaît aussi les actions localement libres de codimension 1 de certains groupes résolubles sous l'hypothèse qu'elles préservent une forme de volume. Le cas du groupe affine réel a été résolu par Ghys [**?**] qui obtient le théorème suivant :

Théorème **0.0.4** *(Ghys, 1985) Toute action localement libre de classe $\mathcal{C}^{\in}$ du groupe affine réel sur une 3-variété fermée et préservant une forme de volume (continue) sur M est une action homogène (def 1.1.5).*

Ce résultat a été étendu par Bélliart et Birembaux à certains groupes résolubles plus généraux [**?**]. Notons au passage l'importance de l'hypothèse de préservation d'une forme de volume (bien que l'utilisation que nous en ferons soit assez différente). Cette hypothèse appelle deux remarques qu'il est sans doute bon de rapprocher. Premièrement, on ignore s'il existe des actions de tels groupes ne préservant pas de forme de volume. Deuxièmement, une action localement libre d'un tel groupe est sans orbite compacte (en effet, le stabilisateur d'un point d'une orbite compacte devrait être un réseau du groupe agissant ; or ce dernier n'en posséde pas).

Le cas des actions holomorphes localement libres de groupes complexes a été moins étudié que le cas réel. Néanmoins, Ghys et Verjovsky [**?**] ont classifié les actions localement libres de codimension 1 du groupe affine complexe (et de son revêtement universel) qui préservent une forme de volume.

Une autre de ces motivations est liée à la géométrie complexe. On ne sait pas décrire entièrement tous les champs de vecteurs holomorphes (ou, dit autrement, toutes les actions holomorphes de $\mathbb{C}$) sur les surfaces compactes. Néanmoins, tous les champs de vecteurs non singuliers (ceux qui correspondent aux actions localement libres de $\mathbb{C}$) sur les surfaces sont classifiés [**?**] et nous en donnerons la description détaillée dans notre chapitre 2. Nous essayons donc de généraliser ce résultat en dimension supérieure. Récemment, Brunella [**?**] a même classifié tous les feuilletages holomorphes non singuliers sur les surfaces complexes compactes.

Dans le premier chapitre, nous nous attacherons à donner les définitions de base, à poser le problème et à faire quelques rappels élémentaires.

Dans le second chapitre, nous donnons la classification des champs de vecteurs non singuliers sur les surfaces. Pour cela, nous utilisons la classification d'Enriques-Kodaira des surfaces complexes.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons aux variétés kählériennes ; celles-ci forment une catégorie particulière très intéressante de variétés complexes. C'est une catégorie assez vaste puisqu'elle contient en particulier toutes les variétés projectives (lisses). Certaines d'entre elles ont un groupe d'automorphismes de grande dimension (par exemple, les surfaces de Hirzebruch forment une famille indexée par $\mathbb{N}$ de surfaces projectives et la dimension de leurs groupes d'automorphismes n'est pas bornée). Néanmoins, il est remarquable que les variétés kählériennes supportent très peu d'actions localement libres. En particulier, tout groupe connexe agissant holomorphiquement et localement librement sur une variété kählérienne est abélien (ce résultat a été d'abord prouvé par Matsushima en 1969 dans le cas des variétés de Hodge [**?**], en utilisant de façon cruciale un lemme dû à Blanchard [**?**], puis, en 1973, Carrel et Lieberman ([**?**],th.2) ont généralisé ce résultat aux variétés kählériennes quelconques). Pour ce qui est des actions localement libres de codimension 1, nous obtenons la classification suivante :

THÉORÈME **0.0.5** *Soit M une variété kählérienne compacte de dimension $n+1$ supportant une action localement libre de $\mathbb{C}^n$. Alors, M est, à revêtement fini près, de l'une des trois formes suivantes :*
i) Un tore complexe.
ii) Un fibré holomorphe principal topologiquement trivial en un tore complexe sur une courbe complexe.
iii) Un fibré holomorphe en $\mathbb{C}P_1$ sur un tore complexe.

Dans la deuxième partie, nous étudions les actions qui préservent une forme de volume.

Dans le premier chapitre de cette seconde partie, nous montrons qu'une telle action définit un feuilletage particulier (transversalement riemannien), ce qui nous permet d'affirmer qu'il n'y a que trois cas possibles, le cas le plus intéressant étant celui où les orbites de l'action sont denses. Nous ferons cette hypothèse dans les quatre chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons que sous l'hypothèse de densité des orbites, le feuilletage défini par l'action est encore plus particulier (transversalement de Lie $\mathbb{R}^2$), puis nous étudierons le groupe fondamental de la variété supportant l'action.

Dans le troisième chapitre, nous décrivons exactement la nature topologique des variétés qui supportent une telle action. Ce chapitre (du moins son résultat principal) repose en fait sur la classification qui est faite dans les chapitres ultérieurs et devrait donc logiquement leur succéder. Toutefois, il nous a semblé judicieux de le mettre à cet endroit car il montre que la structure topologique des variétés que nous cherchons est bien comprise, assez simple, et qu'il n'existe que peu de possibilités, tandis que nous verrons par la suite qu'il en va autrement de la structure complexe.

Les deux chapitres suivants forment le cœur de notre étude où nous regardons comment construire précisément les variétés supportant les actions recherchées. On distingue, lors de ces deux chapitres, différents cas, correspondant à peu près aux différentes structures topologiques qui peuvent se présenter. Nous pouvons résumer la classification obtenue par le théorème suivant :

THÉORÈME **0.0.6** *Soit M une variété complexe compacte, connexe, de dimension $n+1$ qui supporte une action localement libre de $\mathbb{C}^n$ préservant une forme de volume sur M et à orbites denses. Alors, M est le quotient de $\mathbb{C}^{n+1}$ par l'action d'un sous-groupe unipotent discret de longueur de nilpotence au plus 2 du groupe affine $GA_{n+1}(\mathbb{C})$. De plus, si M n'est pas un tore complexe, alors le stabilisateur de l'action est un sous-groupe discret de rang $2n-1$ ou $2n-2$ de $\mathbb{C}^n$.*

Si ce rang est $2n-2$, alors M est un fibré holomorphe principal dont la base est un tore complexe et dont la fibre est un tore complexe de dimension 1, 2 ou 3.

Si ce rang est égal à $2n-1$, alors soit M est un fibré holomorphe principal en un tore complexe de dimension 1 sur un tore complexe, soit M est, en tant que variété réelle, un fibré principal de fibre un tore réel de dimension 3 et de base un tore réel. En outre, dans ce dernier cas, sa structure topologique est unique à revêtement fini près.

Rappelons qu'une application affine est dite unipotente si l'application linéaire sous-jacente est la somme de l'identité et d'un endomorphisme nilpotent et qu'un sous-groupe du groupe affine est dit unipotent si tous ses éléments le sont.

Nous donnons en fait des résultats encore plus précis, desquels nous pouvons extraire les cas particuliers suivants :

PROPOSITION **0.0.7** *Soit ϕ une action holomorphe libre de $\mathbb{C}^n$ sur une variété compacte connexe M de dimension $n+1$. On suppose qu'en outre cette action préserve une forme de volume sur M. Alors M est un tore complexe et ϕ est une action linéaire.*

On pense même, (cf conjecture 1) que l'hypothèse de préservation d'une forme de volume n'est pas nécessaire.

PROPOSITION **0.0.8** *Soit ϕ une action holomorphe, localement libre de $\mathbb{C}^2$ sur une variété compacte connexe M de dimension 3. On suppose que ϕ préserve une forme de volume sur M et que ses orbites sont denses dans M. Alors, M est soit un tore complexe de dimension 3, soit un fibré holomorphe principal en un tore de dimension 1 sur un tore de dimension 2. De plus, dans ce dernier cas, la fibration est invariante par l'action, il existe une droite de $\mathbb{C}^2$ qui agit trivialement sur la base, toute fibre du fibré est incluse dans une orbite de ϕ et l'action quotient sur le tore de base est une action linéaire de $\mathbb{C}$.*

PROPOSITION **0.0.9** *Pour tout $n \geq 2$, il existe des actions holomorphes de codimension 1 de $\mathbb{C}^n$, localement libres, à feuilles denses et préservant une forme de volume* *qui ne sont pas des actions homogènes, et même mieux, sur des variétés qui ne sont pas homéomorphes à des variétés homogènes complexes.*

On pourra retrouver les principaux résultats concernant ces actions ainsi qu'une idée des démonstrations dans [**?**].

Dans le dernier chapitre, nous discutons des actions préservant une forme de volume, mais dont les feuilles ne sont pas denses. Nous donnons alors une description précise de ces actions.

Part I

Actions sur des classes particulières de variétés

Chapter 1

Définitions et rappels

1.1 Actions de groupes

Considérons un espace X et un groupe G dont nous noterons e l'élément neutre. Rappelons quelques définitions de base concernant les actions de G sur X.

Définition **1.1.1** *Une action de G sur X est une application f de $G \times X$ dans X qui vérifie les deux conditions suivantes :*

i) Pour tout élément x de X, on a $f(e, x) = x$.

ii) Pour tous éléments g, g' de G et x de X, on a $f(g, f(g', x)) = f(gg', x)$.

On notera souvent $f_g(x)$ ou même $g \cdot x$ l'élément $f(g, x)$.

Étant donné un point x de X, on appelle stabilisateur de x sous l'action f le sous-ensemble de G formé des éléments g tels que $g \cdot x = x$. On le note $Stab_x$. C'est un sous-groupe de G.

En outre, l'ensemble des éléments de X sur lesquels x s'envoie par l'action f s'appelle l'orbite de x sous f. Les orbites partitionnent l'espace X et on peut remarquer que deux points d'une même orbite ont des stabilisateurs conjugués.

Définition **1.1.2** *Une action f d'un groupe G sur un espace X est dite libre si pour tout élément g de G autre que e et tout élément x de X, on a $g \cdot x \neq x$.*

On suppose maintenant que G est un groupe de Lie.

Définition **1.1.3** *Une action différentiable f d'un groupe de Lie G sur une variété X est dite localement libre si pour tout élément x de X, $Stab_x$ est un sous-groupe discret de G.*

On suppose maintenant que G est un groupe de Lie complexe et X une variété complexe.

Définition **1.1.4** *L'action f est dite holomorphe ou complexe si l'application de $G \times X$ dans X associée est holomorphe.*

Nous allons étudier les actions holomorphes localement libres de codimension 1 de $\mathbb{C}^n$. Il est bon de commencer par décrire les actions homogènes.

Définition **1.1.5** *Une action différentiable f d'un groupe de Lie G sur une variété X est dite homogène s'il existe un groupe de Lie G' contenant G et un sous-groupe fermé H de G' tels que $X = G'/H$ et l'action f est l'action de G sur G'/H par translations à gauche.*

Une telle action est dite homogène complexe si G' est un groupe complexe, et G et H deux sous-groupes complexes de G. On constate facilement qu'une action homogène complexe est en particulier une action holomorphe.

Définition **1.1.6** *On appellera Nil, ou groupe de Heisenberg complexe, le groupe formé des matrices 3×3, à coefficients complexes, triangulaires supérieures, avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1.*

Nous avons la proposition suivante :

Proposition **1.1.1** *Soit ϕ une action homogène complexe de $\mathbb{C}^n$ sur une variété M de dimension $n+1$. On suppose de plus qu'aucune orbite de l'action ϕ n'est compacte. Alors, M est soit un espace homogène de $\mathbb{C}^{n+1}$ (c'est-à-dire un tore complexe), soit un espace homogène du groupe $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$.*

Preuve On sait que toute variété homogène complexe est un fibré dont la fibre est le quotient d'un groupe de Lie complexe par un sous-groupe discret et dont la base est une variété algébrique rationnelle (lisse). Cette fibration s'appelle la fibration de Tits de la variété homogène (voir par exemple [?], p.81).

Supposons qu'un tel fibré supporte une action localement libre de codimension 1 de $\mathbb{C}^n$. Cette action préserve la fibration précédente (c'est le lemme de Blanchard), donc passe au quotient en une action sur la base, cette nouvelle action étant également holomorphe. Par un théorème de Borel, l'action de $\mathbb{C}^n$ sur la base possède un point fixe, qui correspond à une fibre invariante par ϕ et sur laquelle l'action est localement libre. Or, comme cette fibre invariante n'est pas une orbite compacte de ϕ, cela implique qu'elle est de dimension au moins $n+1$, c'est-à-dire que la base est triviale.

Ainsi, si un espace homogène complexe compact supporte une action localement libre de codimension 1 de $\mathbb{C}^n$ sans orbite compacte, alors c'est le quotient d'un groupe de

Lie G' de dimension $n+1$ par un sous-groupe discret cocompact Γ. On peut même affirmer que $\mathbb{C}^n$ s'immerge dans G' car les seuls champs de vecteurs holomorphes sur G'/Γ sont les champs de vecteurs donnés par l'action de G'. Il en résulte que G' est résoluble.

On cherche donc un groupe complexe résoluble G', qui possède un réseau (i.e un sous-groupe discret cocompact) Γ et un sous-groupe commutatif connexe K de codimension 1 tels que $K \cap \Gamma$ n'est pas un réseau de K. On peut supposer que G' est simplement connexe. L'algèbre de Lie d'un tel groupe est, en tant qu'espace vectoriel, engendrée par l'algèbre de Lie de K et un élément x quelconque en dehors. Montrons que K est un sous-groupe distingué de G'.

Si K n'était pas dinstingué, cela signifierait qu'il existe un élément k dans l'algèbre de Lie $\mathcal{K}$ de K et un élément x dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}'$ de G' tels que le commutateur $[k,x]$ n'est pas dans $\mathcal{K}$. Bien entendu, comme $\mathcal{K}$ est commutative, x ne serait pas dedans. Prenons une base $k_1, ..., k_n$ de $\mathcal{K}$ et regardons l'action de $ad\, k$ sur $\mathcal{G}'$. Comme $[k, k_i]$ est nul pour tout i et que $[k,x]$ n'est pas dans $\mathcal{K}$, cela implique que la trace de l'endomorphisme $ad\, k$ de $\mathcal{G}'$ n'est pas nulle. De plus, en multipliant au besoin k par une constante, la trace de $ad\, k$ n'est pas imaginaire pure. Ainsi, il existe un élément de K, donc de G' dont l'action par conjugaison ne préserve pas la mesure de Haar (disons à gauche) du groupe G' (c'est-à-dire que l'action de cet élément multiplie la mesure de Haar à gauche par une constante différente de 1). Un tel groupe G' ne peut pas posséder de réseau Γ car le covolume de Γ, qui serait l'intégrale de la mesure de Haar sur la variété compacte G'/Γ devrait être égal à son produit par une constante différente de 1. C'est bien sûr impossible. Donc, K est un sous-groupe distingué de G'.

Or, G' possède un sous-groupe nilpotent distingué connexe maximal et l'intersection de tout réseau de G' avec ce sous-groupe est un réseau de ce sous-groupe ([**?**], Corollaire 3.5). Ainsi, on ne veut pas que ce sous-groupe soit K, sinon toutes les orbites de ϕ seraient compactes. Et comme le sous-groupe nilpotent distingué maximal de G' contient K, il est nécessaire que ce soit G' lui-même, autrement dit que G' soit nilpotent.

Prenons maintenant un élément x de $\mathcal{G}'$ et considérons son application adjointe. Si $ad\, x$ est de rang supérieur ou égal à 2, il est clair que K est l'unique sous-groupe commutatif de codimension 1 de G'. Alors, l'intersection de K avec n'importe quel réseau de G' est un réseau de K, ce qu'on refuse. Ainsi, le rang de $ad\, x$ est inférieur ou égal à 1. Si ce rang est égal à 0, c'est que G' est commutatif, donc isomorphe à $\mathbb{C}^{n+1}$. Si ce rang est égal à 1, c'est que G' est isomorphe à $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$. La proposition est donc démontrée. $\square$

1.2 Feuilletages

Définition **1.2.1** *Soit X une variété réelle. Un feuilletage sur X est la donnée :*

i) D'une famille d'ouverts U_i de X formant un recouvrement.

ii) D'une famille de submersions des U_i sur des ouverts V_i d'une autre variété T.

iii) D'une famille $\gamma_{i,j}$ de difféomorphismes locaux de T appelés changements de carte, $\gamma_{i,j}$ étant un difféomorphisme de $V_i \cap V_j$ vérifiant une condition de cocycle, qui est que sur $V_i \cap V_j \cap V_k$, on ait :

$$\gamma_{i,j} \circ \gamma_{j,k} \circ \gamma_{k,i} = Id$$

Rappelons que l'application qui à un point x de X fait correspondre le noyau de la différentielle en x de n'importe laquelle des submersions définissant le feuilletage est un champ de plans intégrable sur X et les variétés immergées connexes tangentes à ce champ de plans et maximales s'appellent les feuilles du feuilletage.

Mettre une structure transverse sur un feuilletage, c'est imposer une structure locale sur la variété T qui soit préservée par les changements de carte. Nous en donnons ici quelques exemples.

Un feuilletage est dit transversalement riemannien s'il existe une métrique riemannienne sur la variété T pour laquelle les changements de carte sont des isométries (locales).

Une autre façon de le voir est de demander que le fibré des formes bilinéaires symétriques définies positives sur le fibré normal au feuilletage possède une section qui soit invariante par le pseudogroupe d'holonomie du feuilletage.

Un feuilletage est dit transversalement homogène si la variété T s'identifie à un espace homogène d'un groupe de Lie H et si les changements de carte sont des (restrictions de) translations. Si, de plus, l'espace homogène avec lequel T s'identifie est le groupe H lui-même, alors le feuilletage est dit transversalement de Lie de groupe H.

Le rapport entre les actions localement libres de groupes de Lie et les feuilletages se trouve dans la proposition suivante :

Proposition **1.2.1** *Soif f une action différentiable et localement libre d'un groupe de Lie G sur une variété X. Alors, ϕ définit de manière naturelle un feuilletage sur la variété X dont les feuilles sont les orbites des éléments de X sous l'action de la composante neutre de G. Le champ de plans associé à ce feuilletage est, en un point x de X, l'image de l'espace tangent à G en l'élément neutre par la différentielle de l'application f_x de G dans X, où pour tout g de G, $f_x(g) = g.x$.*

1.3 Les fibrés holomorphes principaux en tores sur les courbes

Nous nous interessons ici aux fibrés holomorphes principaux, dont la base est une surface de Riemann compacte et dont la fibre est un espace homogène compact de $\mathbb{C}^n$. Nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION **1.3.1** *Soit Λ un sous-groupe discret de $\mathbb{C}^n$. Alors, un fibré principal en $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur une surface de Riemann compacte B est déterminé, à biholomorphisme respectant la fibration près, par une classe de $H^1(B, \mathcal{O}^\backslash/*)$, où $\mathcal{O}$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur B.*

Réciproquement, toute classe de $H^1(B, \mathcal{O}^\backslash/*)$ détermine un fibré holomorphe principal en $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur B.

Ce fait peut se voir de la façon suivante : Pour définir un fibré principal en $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur B, on se donne une famille U_i d'ouverts recouvrant B, et pour chaque paire i, j d'indices, une application holomorphe $\gamma_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^n/\Lambda$ vérifiant la condition de cocyclesuivante, à savoir que pour tous indices i, j, k, on ait sur $U_i \cap U_j \cap U_k$:

$$\gamma_{i,j} + \gamma_{j,k} + \gamma_{k,i} = 0$$

Une telle donnée d'ouverts et de fonctions nous fournit un 1-cocycle de B à valeurs dans le faisceau des germes d'applications holomorphes de B dans $\mathcal{O}^\backslash/*$.

On se demande à quelle condition deux tels cocycles γ et γ' définissent le même fibré. En fait, deux fibrés ayant les mêmes U_i (on peut toujours se ramener à ce cas-là, quitte à raffiner les recouvrements) sont équivalents s'ils sont obtenus l'un à partir de l'autre par un changement de trivialisations, c'est-à-dire si on peut se donner sur chaque U_i une application holomorphe f_i à valeurs dans $\mathbb{C}^n/\Lambda$ telle que pour tous i, j, on ait :

$$\gamma'_{i,j} = \gamma_{i,j} + f_i - f_j$$

C'est-à-dire exactement dans le cas où $\gamma' - \gamma$ est un cobord. Ainsi, à biholomorphisme naturel près, une classe de cohomologie de $H^1(B, \mathcal{O}^\backslash/*)$ définit un unique fibré en $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur B.

Or, il existe un diagramme commutatif, que nous appellerons (D) :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(B,\Lambda) & \to & H^1(B,\mathbb{C}^n) & \to & H^1(B,\mathbb{C}^n/\Lambda) & \to & H^2(B,\Lambda) \\
\downarrow id & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow id \\
H^1(B,\Lambda) & \to & H^1(B,\mathcal{O}^\backslash) & \to & H^1(B,\mathcal{O}^\backslash/*) & \xrightarrow{\beta} & H^2(B,\Lambda) \simeq \Lambda
\end{array}$$

Les deux lignes représentent des suites exactes. L'application β représente la classe topologique du fibré.

De plus, il est connu que la flèche α est surjective (fait qui est vrai plus généralement sur toute variété kählérienne d'après la décomposition de Hodge) ce qui revient à dire que deux fibrés ayant même classe topologique peuvent être définis par des cocycles qui diffèrent uniquement l'un de l'autre par des constantes.

Par la suite, nous utiliserons également l'analogue du diagramme (D) dans le cas où la base n'est plus supposée être une courbe mais est un tore complexe T^n de dimension quelconque, et où la fibre est un tore $\mathbb{C}/\Lambda$ de dimension 1 . Nous obtenons alors le diagramme suivant, que nous noterons (D^*) :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(T^n,\Lambda) & \to & H^1(T^n,\mathbb{C}) & \to & H^1(T^n,\mathbb{C}/\Lambda) & \to & H^2(T^n,\Lambda) \\ \downarrow id & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow id \\ H^1(T^n,\Lambda) & \to & H^1(T^n,\mathcal{O}) & \to & H^1(T^n,\mathcal{O}/*) & \stackrel{\beta}{\to} & H^2(T^n,\Lambda) \end{array}$$

Dans ce diagramme également, l'application α est surjective et l'application β représente la classe topologique du fibré.

Intéressons nous maintenant au cas particulier où la base B est une courbe elliptique $\mathbb{C}/R$, pour un certain réseau R de $\mathbb{C}$. Dans ce cas, on peut aussi voir les choses d'une autre manière : Un fibré principal E en $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur $\mathbb{C}/R$ est revêtu par un fibré principal en $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur $\mathbb{C}$. Un fibré principal de base $\mathbb{C}$ est holomorphiquement trivial, donc E est obtenu à partir de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n/\Lambda$ en quotientant par l'action des deux applications suivantes :

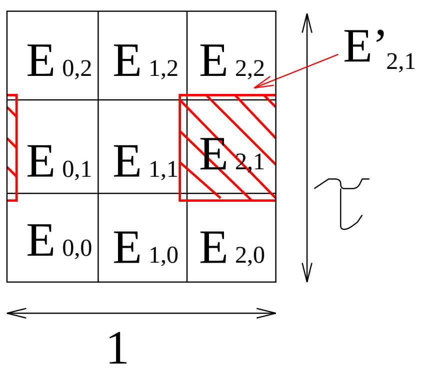
$$(z, z') \to (z + 1, f_1(z, z'))$$

$$(z, z') \to (z + \tau, f_2(z, z'))$$

où les deux applications f_1 et f_2 sont telles que $f_1 \circ f_2 - f_2 \circ f_1$ est une fonction constante dont la valeur est dans Λ. Cette constante détermine la classe topologique du fibré (on a identifié $H^2(\mathbb{C}/R, \Lambda)$ avec Λ).

On construit un cocycle pour un tel fibré de la façon suivante :

Représentons le tore de base $\mathbb{C}/R$ comme un carré (de côtés 1 et τ) et découpons-le en neuf comme sur le dessin suivant :



Appelons pour tous i et j $E'_{i,j}$ un petit épaississement de $E_{i,j}$. Se définir un 1-cocycle à valeur dans $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur $\mathbb{C}/R$, c'est se donner pour chaque couple de $E'_{i,j}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur leur intersection, fonctions qui vérifient la condition de cocycle. Définissons comme suit les fonctions sur les $E'_{i_1,j_1} \cap E'_{i_2,j_2}$ ayant un bord commun. La condition de cocycle nous fournira immédiatement les fonctions sur les autres intersections.

Appelons $f_{i,j}$ la fonction que l'on définit pour le couple $(E'_{i,j}, E'_{i+1,j})$ et $g_{i,j}$ la fonction que l'on définit pour le couple $(E'_{i,j}, E'_{i,j+1})$ où i et j sont pensés dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Posons alors :
$f_{i,j} \equiv 0$ si $i \neq 2$
$g_{i,j} \equiv 0$ si $j \neq 2$
$f_{2,j} = f_1(z+1) - f_1(z)$ où z est pensé de partie réelle proche de 0.
$g_{2,j} = f_2(z+\tau) - f_2(z)$ où z est pensé de partie imaginaire proche de 0.

On vérifie facilement qu'on peut compléter ces fonctions en un cocycle en définissant les fonctions restantes de la seule manière possible (la seule chose non évidente est pour la fonction sur $E'_{2,2} \cap E'_{0,0}$, mais le fait que $[f_1, f_2]$ soit une fonction constante à valeur dans Λ nous assure qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur sa définition).

Cela nous permet de montrer qu'un fibré holomorphe principal en un espace homogène de $\mathbb{C}^n$ sur une courbe elliptique peut être défini par des cocycles particulièrement agréables :

Proposition **1.3.2** *Soit E un fibré principal holomorphe en $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sur une courbe elliptique. Alors E peut être défini par un cocycle γ vérifiant la condition (Aff) suivante :*

(Aff) : Il existe une constante $v \in \mathbb{C}^n$ tel que pour tous i, j, $\gamma_{i,j} \; : U_i \cap u_j \to \mathbb{C}^n/\Lambda$ est soit constante, soit une fonction affine de "pente" v.

Preuve Il suffit en effet de voir qu'il est possible d'atteindre n'importe quelle classe topologique par de tels cocycles. En effet, si deux cocycles diffèrent uniquement par des constantes et si l'un de ces cocycles vérifie (Aff), alors l'autre aussi.

Donnons nous un élément $\eta \in \Lambda$ et considérons les biholomorphismes suivants de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$:

$$(z, z') \to (z+1, z' + \frac{1}{\tau} \cdot \eta \cdot z)$$
$$(z, z') \to (z+\tau, z')$$

La classe topologique de ce fibré est η et le cocycle construit à partir de ces biholomorphismes vérifie (Aff). □

1.4 L'hypothèse de préservation d'une forme de volume

La majeure partie de notre travail consistera à étudier les actions qui préservent une forme de volume sur la variété que nous considérons. Cette propriété ne semble pas très naturelle à première vue, aussi requiert-elle quelques commentaires.

L'hypothèse de préservation d'un forme de volume pour l'action d'un groupe porte sur la dynamique de l'action considérée. Elle interdit notamment, dans le cas où le groupe qui agit est abélien, l'existence d'une orbite ayant une holonomie contractante. La question que l'on se pose est de savoir si cette hypothèse est très restrictive dans l'étude que nous menons.

On peut d'abord remarquer qu'il existe de nombreux exemples où cette hypothèse n'est pas vérifiée (certaines surfaces de Hopf, certains fibrés en $\mathbb{C}P_1$ sur des tores, etc...). Néanmoins, on peut faire deux remarques allant dans le sens contraire :

i) Sur tous les exemples que nous connaissons, il existe une possibilité de déformer la variété et l'action de manière à obtenir une action préservant un volume.

ii) Sur tous les exemples que nous connaissons d'actions ne préservant aucune forme de volume, il existe une feuille compacte dont l'holonomie contient une contraction. De plus, la proposition suivante montre qu'une action holomorphe localement libre de codimension 1 qui ne possède pas de feuille compacte préserve presque une forme de volume :

Proposition **1.4.1** *Soit ϕ une action holomorphe localement libre de $\mathbb{C}^n$ sur une variété M compacte de dimension $n+1$. On suppose de plus que ϕ n'a pas d'orbite compacte. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et tout z dans $\mathbb{C}^n$, il existe une forme de volume Ω sur M telle que $(1-\epsilon)\cdot\Omega < \phi_z^*\Omega < (1+\epsilon)\cdot\Omega$.*

Preuve Soit Ω une forme de volume positive quelconque sur M. Toute autre forme de volume Ω' sur M, positive, s'écrit $\Omega' = e^F \cdot \Omega$ où F est une fonction de M dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où Ω' est de la forme $h^*\Omega$ pour un difféomorphisme h de M, la fonction e^F s'appelle alors le jacobien de h par rapport à Ω qu'on note $J_\Omega(h)$.

Soit ϕ une action vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Soient Ω une forme de volume positive sur M, g un élément de $\mathbb{C}^n$ et μ une mesure de probabilité invariante par ϕ_g. On pose alors :

$$L(\Omega, g, \mu) = \int_M ln(J_\Omega(\phi_g))d\mu$$

Nous allons étudier cette application L. Donnons ses propriétés fondamentales :

i) $L(\Omega, g, \mu)$ est indépendant de Ω.

En effet, soit Ω' une autre forme de volume positive sur M. Soit F telle que $\Omega' = e^F \cdot \Omega$. Alors, $\phi_g^*\Omega' = e^{F\circ\phi_g}\cdot\Omega$, et ainsi $J_{\Omega'}(\phi_g) = J_\Omega(\phi_g) + e^{(F\circ\phi_g - F)}$. On en déduit aussitôt que :

$$L(\Omega', g, \mu) = L(\Omega, g, \mu) + \int_M (F\circ\phi_g - F)d\mu$$

Comme μ est invariante par l'action de g, cette dernière intégrale est nulle et on se rend compte que L ne dépend pas de Ω.

ii) La propriété cruciale est la suivante :

Lemme 1.4.1 *Si l'action ϕ n'a pas d'orbite compacte, alors $L \equiv 0$.*

Preuve Fixons-nous un élément g de $\mathbb{C}^n$ ainsi qu'une métrique riemanniene quelconque sur M. On supposera que μ est g-invariante et g-ergodique. (On peut se ramener à ce cas là car l'ensemble des mesures g-invariantes est égal à l'adhérence de l'enveloppe convexe des mesures g-invariantes ergodiques). Supposons que $L(g, \mu) \neq 0$ pour un bon choix de μ. On peut supposer, quitte à changer g en $-g$, que $L(g, \mu) < 0$.

D'après [?], il existe un ensemble Γ de μ-mesure totale, stable par ϕ_g, tel que pour tout x de Γ, on peut décomposer l'espace tangent à M en x en une somme directe de la forme : $T_xM = E_x^{\lambda_1} \oplus E_x^{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_x^{\lambda_k}$ avec les propriétés suivantes :

i) Cette décomposition est mesurable et g-invariante.

ii) Pour tout r dans $\{1, ..., k\}$ et tout vecteur u dans $E_x^{\lambda_1} \oplus E_x^{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_x^{\lambda_r}$ et non dans $E_x^{\lambda_1} \oplus E_x^{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_x^{\lambda_{r-1}}$, on a :

$$lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} ln(\|\phi_{mg}(u)\|) = \lambda_r$$

De plus, cette décomposition est unique et, par g-ergodicité de la mesure μ, les λ_r sont indépendants du point x.

Dans le cas qui nous intéresse, il est clair que l'espace tangent aux orbites de l'action de $\mathbb{C}^n$ est défini en tout point et stable par g. De plus, pour tout vecteur u non nul tangent à une orbite, on a $lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} ln(\|\phi_{mg}(u)\|) = 1$. Ainsi, l'espace tangeant en x se décompose pour μ-presque tout x en une somme directe $T_xM = E_x^\chi \oplus T_x\mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est le feuilletage défini par l'action ϕ, et où χ est une constante. De plus, on a presque par définition de χ que pour μ-presque tout x : $lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} ln(J_\Omega(\phi_{mg}) = \chi$, donc χ est strictement négative car $L(g, \mu) = \int_M \chi d\mu$.

De plus, d'après ([?], Th 6.1), il existe pour tout x de Γ un germe de variété V_x dont l'espace tangent en x est E_x^χ et vérifiant :

i) Pour tout x in Γ, $\phi_g(V_x) \subset V_{\phi_g(x)}$.
ii) Pour tout $\lambda > \chi$, tous y, z dans V_x et toute distance riemannienne d sur M il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier positif n :
$d(\phi_{ng}(y), \phi_{ng}(z)) < C \cdot e^{n\chi} d(y, z)$.

De plus, V_x est une sous-variété analytique complexe car toute notre construction commute avec la structure complexe de la variété.

Cherchons le support de la mesure μ. C'est un ensemble g-invariant de M et sa trace sur chacune des variétés V_x précédentes ne peut être que vide ou un point fixe, sinon on aurait, en appliquant ϕ_{mg} pour m assez grand que :

$$\mu(\bigcup_{x\in\Gamma} V_x \cap supp\mu) < \mu(\bigcup_{\phi_{mg}(x)\in\Gamma} V_{\phi_{mg}(x)} \cap supp\mu)$$

Mais ces deux expressions sont égales car tous les termes sont g-invariants.

On en déduit que le support de la mesure μ est inclus dans une orbite de ϕ. Ainsi, ϕ possède au moins une orbite compacte, ce qui montre le lemme. $\Box$

On a donc montré que, pour toute mesure g-invariante μ, on a : $\int_M ln(J_\Omega(\phi_g))d\mu = 0$. Munissons l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur M de la norme sup, ce qui en fait un espace de Banach. On se demande quelles sont les fonctions, continues sur M qui vérifient la même propriété que $ln(J_\Omega(\phi_g))$, c'est-à-dire que leur intégrale par rapport à toute mesure g-invariante est nulle. Il y a d'abord les fonctions de la forme $F \circ \phi_g - F$ pour toute fonction F continue sur M. Nous noterons T_g l'espace des fonctions de la forme précédente. Il y a donc aussi l'adhérence de T_g dans $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

En fait, l'ensemble des fonctions dont l'intégrale par rapport à toute mesure g-invariante est nulle est exactement $\overline{T_g}$. En effet, une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ qui s'annule sur toutes les fonctions de T_g est exactement l'intégration par rapport à une mesure (non nécessairement positive) g-invariante, et, d'après le théorème de Hahn-Banach, l'intersection des noyaux de toutes ces formes est égale à $\overline{T_g}$. De plus, comme toute mesure g-invariante est combinaison linéaire de mesures g-invariantes positives, il existe pour toute fonction f qui n'est pas dans $\overline{T_g}$ une mesure g-invariante positive μ_f telle que $\int_M f d\mu_f \neq 0$.

On en déduit alors que pour toute forme volume Ω sur M, la fonction ψ telle que $\phi_g^*\Omega = e^\psi \cdot \Omega$ est dans $\overline{T_g}$. Or, nous avons dit que l'ensemble T'_g des fonctions ψ pour lesquelles il existe une forme de volume Ω sur M vérifiant l'égalité précédente est T_g-invariant. On en déduit immédiatement que T'_g est dense dans $\overline{T_g}$. On peut donc choisir ψ aussi proche qu'on veut de la fonction nulle.

Cela montre qu'il existe une forme de volume sur M qui est presque invariante sous l'action de g. $\Box$

À la vue de cette proposition (et peut-être plus encore, de sa démonstration), il est très naturel de conjecturer :

Conjecture **1** *Toute action holomorphe localement libre de codimension 1 d'un groupe de Lie abélien complexe sur une variété compacte possède une orbite compacte ou préserve une forme de volume.*

Chapter 2

Champs de vecteurs non singuliers sur les surfaces complexes compactes

Dans ce chapitre, nous retrouvons la classification des champs de vecteurs holomorphes non singuliers sur les surfaces complexes. Comme nous utilisons une classification des surfaces plus récente que celle de Mizuhara dans [?], nous obtenons des preuves plus élémentaires. De plus, grâce au travail de Thurston [?], les surfaces elliptiques complexes supportant des champs de vecteurs non singuliers peuvent être décrites plus simplement. Ensuite, nous décrivons précisément tous les champs de vecteurs non singuliers sur toutes les surfaces de Hopf.

2.1 Recensement

Commençons par décrire les champs non singuliers que nous connaissons :

i) Soit M un tore complexe de dimension 2. M est biholomorphe au quotient de $\mathbb{C}^2$ par un groupe R de translations. Tout champ de vecteurs sur M se relève à $\mathbb{C}^2$ en un champ de vecteurs dont les coordonnées sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^2$ invariantes par R, donc constantes. Réciproquement, tout champ constant non nul sur $\mathbb{C}^2$ passe au quotient par R en un champ non singulier sur M.

ii) Soit M un fibré principal de groupe structural une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ quelconque au-dessus d'une courbe compacte quelconque. L'action principale de la courbe elliptique est une action libre de $\mathbb{C}/\Lambda$ sur M, donc se relève en une action localement libre de $\mathbb{C}$ sur M qui est le flot d'un certain champ de vecteurs holomorphe non singulier X.

On peut également considérer les groupes finis Γ de $Aut(M)$ qui agissent librement sur M et préservent le champ X. Celui-ci passe ainsi au quotient en un champ de vecteurs non singulier sur M/Γ.

iii) Considérons une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ et une courbe complexe compacte C. Soit h un morphisme (de groupes) de Λ dans $Aut(C)$. Alors, Λ agit sur $\mathbb{C} \times C$ de la façon suivante :

$$(\lambda, (z, x)) \to (z + \lambda, h(\lambda)(x))$$

Cette action est libre, proprement discontinue et cocompacte. De plus, le champ de vecteurs non singulier $\frac{\partial}{\partial z}$ est préservé par cette action et passe au quotient.

En fait, si l'image de h est finie, on est ramené, quitte à prendre un revêtement fini, au cas ii). C'est le cas en particulier si C est de genre au moins 2 car dans ce cas $Aut(C)$ est fini.

Dans le cas où C est de genre 1 et où l'image de h est infinie, celle-ci forme un sous-groupe commutatif infini de $Aut(C)$, donc ne peut qu'être un groupe de translations. Alors M est un tore complexe et on est ramené au cas i).

iv) Une surface de Hopf. Il s'agit de surfaces dont le revêtement universel est $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$. Les champs de vecteurs sans singularité sur ces surfaces feront l'objet d'une étude particulière.

v) Une surface de Inoue positive. Ces surfaces sont obtenues comme le quotient du produit du disque de Poincaré avec $\mathbb{C}$ par un groupe discret cocompact d'automorphismes de la forme suivante : $(w, z) \in D \times \mathbb{C} \to (I(w), z + f(w))$ où I est une isométrie de D et f une fonction holomorphe sur D. On constate que tous ces automorphismes préservent le champ constant $\frac{\partial}{\partial z}$. Ce champ passe donc au quotient sur une telle surface en un champ non singulier. Pour la construction exacte de ces surfaces, on pourra se référer à [**?**].

Nous avons donc trouvé cinq façons de construire des champs de vecteurs non singuliers sur des surfaces complexes. Nous allons nous efforcer de montrer qu'il n'y en a pas d'autre.

THÉORÈME **2.1.1** *Tout champ de vecteurs holomorphe non singulier sur une surface complexe compacte est d'un des types précédents.*

La suite du texte sera consacrée à la démonstration de ce théorème.

2.2 Remarques générales

Fixons-nous dorénavant un champ de vecteurs holomorphe X non singulier sur une surface complexe compacte M.

La première remarque que l'on peut faire sur M est la suivante :

Remarque **2.2.1** La caractéristique d'Euler-Poincaré de M, qui s'identifie à la deuxième classe de Chern de son fibré tangent du fait que M est une surface, est nulle. $\triangleright$

Cela résulte du fait que M possède un champ de vecteurs réels sans singularité.

Pour pouvoir faire appel à la classification des surfaces, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme **2.2.1** *La surface M est une surface minimale (c'est-à-dire qu'on ne peut pas obtenir M comme éclatement d'une autre surface).*

Preuve D'après le théorème de Castelnuevo, il suffit de montrer qu'on ne peut pas plonger de droite projective ayant une auto-intersection égale à -1 dans M. Soit donc C une courbe biholomorphe à $\mathbb{C}P_1$ plongée dans M.

Il n'existe aucun champ de vecteurs non singulier sur $\mathbb{C}P_1$, de sorte que la restriction de X à C ne peut être partout tangente. On peut donc déformer C en la "poussant" par le champ X. Cela implique que son auto-intersection est positive ou nulle, et donc que M est minimale. $\square$

Nous utilisons maintenant la classification des surfaces minimales, voir par exemple ([?], p.188) pour ne retenir que celles dont la caractéristique d'Euler est nulle. Nous obtenons les possibilités suivantes :

A) Une surface de classe VII. Il s'agit de surface dont la dimension de Kodaira est $-\infty$ et dont le premier nombre de Betti est 1.

B) Une surface réglée de base une courbe elliptique.

C) Une surface admettant une fibration localement triviale au dessus d'une courbe elliptique dont les fibres sont des courbes elliptiques. Ces surfaces sont soit hyperelliptiques, soit des surfaces de Kodaira primaires, suivant que leur premier nombre de Betti est égal à 2 ou à 3.

D) Une surface de Kodaira secondaire, c'est-à-dire une surface dont un revêtement fini est une surface de Kodaira primaire.

E) Un tore complexe.

F) Une surface proprement elliptique, c'est-à-dire une surface de dimension de Kodaira 1 possédant une application holomorphe sur une courbe dont les fibres génériques sont des courbes elliptiques.

Nous allons étudier chacun de ces cas.

Le cas E) ne pose pas de problème. Nous avons déjà mentionné que tous les champs de vecteurs sur les tores sont linéaires.

Nous traitons d'abord les cas B), C), D) et F), qui ont en commun qu'une surface rentrant dans une de ces catégories se surjecte holomorphiquement sur une courbe, avant d'étudier en détails le cas A), le plus délicat.

2.3 Cas où il existe une application holomorphe non constante de M sur une courbe

Nous supposons qu'il existe une application holomorphe surjective π, à fibres connexes, de M sur une courbe complexe que nous noterons B.

On peut alors affirmer que le champ X passe au quotient en un champ X_B sur B. En effet, soit b sur B et considérons $\pi^{-1}(b)$. Bougeons la un petit peu par le flot de X et reprojetons la sur B. On obtient ainsi une sous-variété analytique compacte connexe de B proche du singleton $\{b\}$, donc différente de B (et non vide). Il ne peut s'agir que d'un singleton. Ainsi, le flot de X préserve la fibration et donc se projette en un flot sur B.

On peut alors facilement régler le cas où ce flot est trivial :

Lemme **2.3.1** *Si le champ X_B ainsi construit est nul, alors M est soit une surface de Hopf, soit, à revêtement fini près, un fibré principal en une courbe elliptique sur une courbe compacte et le champ X est le générateur de l'action principale.*

Preuve Sous l'hypothèse de nullité de X_b, le champ X est tangent aux fibres de l'application π. Ces fibres étant compactes, et le champ X étant non singulier, chacune de ces fibres est une courbe elliptique. Ainsi, pour chaque point b de B, le stabilisateur Λ_b de b pour le flot de X est un réseau de $\mathbb{C}$. On est naturellement amené à se demander comment varie Λ_b par rapport à b. Nous allons pour cela avoir besoin de deux sous-lemmes.

Il est clair que le champ X définit un feuilletage sur M dont les feuilles sont exactement les fibres de π. Nous noterons $\mathcal{F}$ ce feuilletage.

Lemme **2.3.2** *Il y a un nombre fini de feuilles de $\mathcal{F}$ qui ont de l'holonomie et l'holonomie de chacune de ces feuilles est finie.*

Lemme **2.3.3** *Soit b_0 un point de B dont la fibre correspondante est sans holonomie (au sens du feuilletage précédant). Alors, au voisinage de b_0, l'application $b \to \Lambda_b$ est holomorphe.*

Soit maintenant b_0 un point de B dont la fibre correspondante a de l'holonomie. Alors, le noyau Λ'_{b_0} de l'holonomie de la fibre correspondante est d'indice fini dans Λ_{b_0}. De *plus, au voisinage de* b_0*, l'application :*

$$b \to \left\{ \begin{array}{ll} \Lambda_b & si\ b \neq b_0 \\ \Lambda'_{b_0} & si\ b = b_0 \end{array} \right.$$

est holomorphe.

Preuve C'est une conséquence du lemme précédent et du théorème des fonctions implicites. □

À la lumière de ces deux lemmes, on voit qu'en posant Λ'_b le noyau de l'holonomie de la fibre au-dessus de b, l'application Λ' de B dans l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$ (qui à b dans B associe Λ'_b) est holomorphe.

Or, il y a une projection holomorphe sur $\mathbb{C}$ de l'espace des réseaux de $\mathbb{C}$ donnée par la (célèbre) fonction modulaire j. Par compacité de B, la fonction $j \circ \Lambda'$ est constante, donc l'image de la fonction Λ' est incluse dans une fibre de j.

Or, deux réseaux de $\mathbb{C}$ ont même image par j si et seulement si ils sont homothétiques. Ainsi, chaque fibre de la fonction j s'identifie biholomorphiquement au quotient de $\mathbb{C}^*$ par un sous-groupe fini de S^1, donc s'identifie biholomorphiquement à $\mathbb{C}^*$. Comme B est compacte, la fonction Λ' est constante. On appellera Λ' son image.

Nous cherchons maintenant à construire une surface M' qui soit un fibré principal en Λ' sur une surface B' et qui soit un revêtement de M. Pour cela, nous allons utiliser le travail de Thurston [**?**].

Nous savons que M est une surface elliptique et que ses fibres singulières sont des fibres multiples. Ainsi, la base Δ hérite d'une structure naturelle d'orbifold au sens de [**?**] (le groupe associé à un point singulier s'identifie au groupe d'holonomie de la fibre singulière) et la question qui se pose est de trouver si Δ est ou non une bonne orbifold, c'est-à-dire si elle possède un revêtement d'orbifold $\hat{\Delta}$ qui est une variété. En effet, si tel est le cas, le fibré relevé à $\hat{\Delta}$ est sans orbite singulière. C'est donc un fibré holomorphe principal. De plus, comme le groupe d'holonomie d'une fibre singulière était précisément le groupe associé au point singulier correspondant sur Δ, il est clair que le fibré sur $\hat{\Delta}$ est un revêtement de M.

Or, d'après ([**?**], p.21), l'orbifold Δ est bonne sauf s'il s'agit d'une sphère ayant un unique point singulier d'ordre $n \geq 2$ ou d'une sphère possédant deux points singuliers d'ordres p et q avec $2 \leq p < q$. Mais, dans un cas comme dans l'autre, il est facile de voir qu'une variété M à laquelle est associée une mauvaise orbifold est une surface de Hopf. Ainsi, si la variété M n'est pas une surface de Hopf, elle possède un revêtement qui est un fibré principal en $\mathbb{C}/\Lambda'$ sur une courbe complexe compacte $\hat{\Delta}$.

Nous avons donc démontré le lemme 2.3.1. □

Après avoir décrit le cas où le flot construit sur la base est trivial, regardons ce qui se passe si ce flot est non singulier.

Lemme 2.3.4 *Si X_B est non singulier, alors B est une courbe elliptique et le champ X est un champ construit comme dans l'exemple iii).*

Preuve Si X_B est non singulier, soit $F = \pi^{-1}(x_0)$ une fibre de π et U un petit voisinage de x_0, image de x_0 par le flot de X_B pour les temps (complexes) de module inférieur à ϵ. Le flot de X_B nous fournit un biholomorphisme entre $D_\epsilon \times F$ et $\pi^{-1}(U)$.

De plus, les applications de transition entre deux différentes trivialisations sont données par le flot de X_B, donc par des applications holomorphes. On en déduit que π est une fibration holomorphe localement triviale de M sur la courbe elliptique B.

On peut alors prendre le revêtement de M associé au noyau de la projection donnée par π de $\pi_1(M)$ sur $\pi_1(B)$. On obtient ainsi une variété $\hat{M}$ qui est un fibré holomorphe en F sur $\mathbb{C}$.

De plus, le champ X se relève en un champ $\hat{X}$ sur $\hat{M}$ qui se projette sur le champ $\frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{C}$. Le flot de ce champ nous fournit un biholomorphisme $\hat{M} \simeq F \times \mathbb{C}$ et il est clair qu'à partir de cette trivialisation, la surface M et le champ X sont construits comme dans l'exemple iii). $\square$

Grâce aux deux lemmes précédents, nous pouvons affirmer que nous avons dans notre classification tous les cas où le champ X_B est trivial ou sans singularité. C'est en particulier le cas si la base B est une courbe elliptique ou si elle est de genre supérieur.

Cela règle donc les cas B),C) et D).

En fait, cela règle aussi le cas F). En effet, une surface se projetant holomorphiquement sur $\mathbb{C}P_1$ avec des fibres elliptiques a une dimension de Kodaira égale à $-\infty$ ou 0 d'après ([?], p.162), ce qui est incompatible avec le cas F).

2.4 Cas des surfaces de classe VII

Il ne reste plus maintenant qu'à résoudre le cas A) pour terminer notre classification.

Nous supposons donc dorénavant que M est une surface de classe VII sur laquelle il y a un champ de vecteurs X sans singularité.

Montrons alors deux lemmes :

Lemme 2.4.1 *Le deuxième nombre de Betti de M est nul.*

Preuve Nous allons calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de M. Rappelons que comme M est une surface de type VII, son premier nombre de Betti b_1 est égal à 1. On a de plus $b_0 = b_4 = 1$ et $b_3 = b_1$. Nous avons alors :

$$0 = \chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 1 - 1 + b_2 - 1 + 1 = b_2$$

Le lemme est démontré. $\square$

Lemme **2.4.2** *Appelons Ω^1 le faisceau des germes de 1-formes holomorphes sur M et $-K$ le dual du fibré canonique de M. Alors, le groupe de cohomologie $H^0(M, \Omega^1 \otimes (-K))$ n'est pas nul.*

Preuve Montrons en fait que, comme M est une surface, le faisceau $\Omega^1 \otimes (-K)$ s'identifie canoniquement au faisceau Θ des germes de champs de vecteurs holomorphes tangents à M. On en déduira que, comme M supporte des champs de vecteurs holomorphes non triviaux, ce fibré admet des sections holomorphes non nulles et que donc son H^0 est non nul.

Pour cela, considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2)^* \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (\omega, v_1, v_2) & \rightarrow & \omega(v_1) \cdot v_2 - \omega(v_2) \cdot v_1 \end{array}$$

Cette application est trilinéaire et est antisymétrique par rapport aux deux dernières composantes. Elle passe donc au quotient en une application linéaire de $(\mathbb{C}^2)^* \otimes (\mathbb{C}^2 \bigwedge \mathbb{C}^2)$ dans $\mathbb{C}^2$. Il est clair que cette dernière application est surjective et comme l'espace de départ est de dimension 2, elle est bijective.

Ainsi, $(\mathbb{C}^2)^* \otimes (\mathbb{C}^2 \bigwedge \mathbb{C}^2)$ s'identifie canoniquement avec $\mathbb{C}^2$. On en déduit immédiatement que $\Omega^1 \otimes (-K)$ est isomorphe à Θ et le lemme en résulte. $\square$

Nous pouvons maintenant trouver les variétés qui nous intéressent. Nous utilisons pour cela deux théorèmes.

Le premier ([**?**], Th 34) affirme qu'une surface complexe est une surface de Hopf si et seulement si elle est de classe VII, que son deuxième nombre de Betti est nul et qu'elle contient une courbe holomorphe. (Rappelons que par définition, une surface de Hopf est une surface dont le revêtement universel est biholomorphe à $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$).

Le deuxième théorème ([**?**],§5) classifie les surfaces M de classe VII, de deuxième nombre de Betti nul, ne contenant pas de courbe holomorphe et pour lesquelles il existe un fibré en droites L tel que $H^0(M, \Omega^1 \otimes L) \neq 0$.

Ces surfaces se décomposent en trois classes, qu'Inoue note S_M, $S^{(+)}_{N,p,q,r;t}$, et $S^{(-)}_{N,p,q,r}$. En outre, Inoue montre qu'il n'y a pas de champ de vecteur holomorphe non nul sur une surface S_M ni sur une surface $S^{(-)}_{N,p,q,r}$, et que les seuls champs de vecteurs holomorphes sur les surfaces $S^{(+)}_{N,p,q,r;t}$ sont de la forme v).

D'après ces deux théorèmes, une surpace de type VII supportant un champ de vecteurs holomorphe non singulier est une surface de Hopf si elle contient une courbe holomorphe plongée ou une surface de Inoue positive dans le cas contraire. Cela termine la démonstration de notre théorème.

2.5 Champs de vecteurs holomorphes sans singularité sur les surfaces de Hopf

Pour terminer ce chapitre sur les surfaces, nous allons décrire les champs de vecteurs sur les surfaces de Hopf. Nous cherchons à savoir quelles sont celles qui possèdent un champ de vecteurs sans singularité et la forme que prennent ces champs. Nous commençons par quelques rappels sur les surfaces de Hopf, les résultats étant tirés de [?].

i) Le revêtement universel d'une surface de Hopf ayant deux bouts, le groupe fondamental d'une telle surface est une extension finie de $\mathbb{Z}$. Il existe ainsi des revêtements finis de M dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}$. Une surface de Hopf sera dite primaire si son groupe fondamental est $\mathbb{Z}$.

ii) Une surface de Hopf primaire est obtenue comme quotient de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ par le sous-groupe d'automorphismes engendré par une dilatation D de la forme :

$$(z_1, z_2) \to (\alpha z_1 + \lambda z_2^k, \beta z_2)$$

où on a les formules suivantes :

$$\lambda \cdot (\alpha - \beta^k) = 0$$

$$1 < |\beta| \leq |\alpha|$$

NB : Généralement, les auteurs prennent pour générateur la contraction inverse de la dilatation que nous considérons ici. Néanmoins, il est plus commode dans notre cas de considérer la dilatation.

Une surface de Hopf primaire sera dite linéaire si $\lambda = 0$ ou si $k = 1$. Une surface de Hopf sera dite linéaire s'il existe une surface primaire linéaire qui la revêt (en fait cela ne dépend pas du revêtement primaire choisi).

Un champ de vecteurs sur une surface de Hopf est obtenu comme passage au quotient d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ préservé par le groupe fondamental de la surface. Un tel champ sera dit linéaire si le champ relevé sur $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ est le champ donné par une matrice de $M_2(\mathbb{C})$.

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition **2.5.1** *Soit M une surface de Hopf primaire, quotient de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ par le sous-groupe d'automorphismes engendré par une dilatation D de la forme :*

$$(z_1, z_2) \to (\alpha z_1 + \lambda z_2^k, \beta z_2)$$

Alors, si M n'est pas linéaire, l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur M est de dimension 2, engendré par les champs dont les relevés à $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ sont les champs :

$$X_1 = k \cdot z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

$$X_2 = z_2^k \frac{\partial}{\partial z_1}$$

De plus, un tel champ est non singulier si et seulement si sa première coordonnée dans la base (X_1, X_2) est non nulle.

Si M est une surface de Hopf primaire linéaire, alors tout champ de vecteurs holomorphe sur M est linéaire, sauf si $\alpha = \beta^k, k \geq 2$ auquel cas un champ de vecteurs sur M est la somme d'un champ de vecteurs linéaire et d'un multiple du champ $z_2^k \frac{\partial}{\partial z_1}$.

De plus, un tel champ est non singulier si et seulement si la matrice qui définit le champ linéaire est inversible.

Preuve Donnons-nous M une surface de Hopf primaire et X un champ de vecteurs sur M.

Le relevé $\tilde{X}$ de X à $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ s'écrit sous la forme :

$$\tilde{X}(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

D'après le théorème de Hartogs, les fonctions f_1 et f_2 se prolongent par continuité à l'origine et les prolongements ainsi obtenus sont holomorphes sur $\mathbb{C}^2$. Nous les noterons encore f_1 et f_2.

Répétons que $\pi_1(M)$ possède un générateur D qui agit sur $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ en préservant $\tilde{X}$ de la façon suivante :

$$(z_1, z_2) \rightarrow (\alpha z_1 + \lambda z_2^k, \beta z_2)$$

Nous obtenons ainsi des équations qui doivent être satisfaites par f_1 et f_2, précisément :

$$f_1(\alpha z_1 + \lambda z_2^k, \beta z_2) = \alpha \cdot f_1(z_1, z_2) + \lambda k z_2^{k-1} f_2(z_1, z_2)$$

$$f_2(\alpha z_1 + \lambda z_2^k, \beta z_2) = \beta \cdot f_2(z_1, z_2)$$

On suppose maintenant que la surface de Hopf que nous considérons n'est pas linéaire, c'est-à-dire que $\lambda \neq 0$ et $k > 1$.

Commençons par prouver le résultat suivant :

Lemme **2.5.1** *Les fonctions f_1 et f_2 sont polynomiales.*

Preuve Fixons nous un réel $N > \frac{|\lambda|}{\beta^k - 1}$.Pour R réel positif, on pose $M_R = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ tq \ g(z_1, z_2) \leq R\}$, où $g(z_1, z_2) = \frac{|z_1|}{N} + |z_2^k|$.

Nous affirmons alors la chose suivante : il existe $\mu > 1$ tel que pour tout R, on ait $D(M_R) \supset M_{\mu R}$. En effet, soit (z_1, z_2) dans $\mathbb{C}^2$. On a :
$g(D(z_1, z_2)) = g(\alpha z_1 + \lambda z_2^k, \beta z_2) = \frac{|\alpha z_1 + \lambda z_2^k|}{N} + |(\beta z_2)^k| \geq \alpha \frac{|z_1|}{N} + (\beta^k - \frac{|\lambda|}{N}) \cdot |z_2^k|$
$\geq min(\alpha, \beta^k - \frac{|\lambda|}{N}) \cdot R$. Il suffit donc de poser $\mu = min(\alpha, \beta^k - \frac{|\lambda|}{N})$.

Posons alors, pour tout réel positif R :

$$\psi_i(R) = sup_{g(z_1,z_2)=R}|f_i(z_1, z_2)|, i = 1, 2$$

On a alors $\psi_2(\mu R) \leq \beta\psi_2(R)$. On en déduit qu'il existe une fonction polynomiale P de R telle que $\psi_2(R) \leq P(R)$. Or, g est minorée par une fonction polynomiale de $|(z_1, z_2)|$. Ainsi, $|f_2(z_1, z_2)|$ est dominée par une fonction polynomiale de $|(z_1, z_2)|$. C'est donc que la fonction f_2 est polynomiale.

Rappelons l'équation suivante :

$$f_1(\alpha z_1 + \lambda z_2^k, \beta z_2) = \alpha \cdot f_1(z_1, z_2) + \lambda k z_2^{k-1} f_2(z_1, z_2)$$

Du fait que la fonction f_2 est polynomiale, on déduit $\psi_1(\mu R) \leq \alpha\psi_1(R) + Q(R)$ pour un certain polynôme Q. Par des arguments similaires à ceux utilisés pour f_2, on trouve que f_1 est aussi polynomiale. $\square$

Reste à déterminer précisément les polynômes f_1 et f_2. Pour le polynôme P_2 de $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ définissant f_2, on a :

$$P_2(\alpha \cdot X_1 + \lambda \cdot (X_2)^k, \beta \cdot X_2) = \beta P_2(X_1, X_2)$$

Considérons $p_{i,j}(X_1)^i(X_2)^j$ le monôme ayant le plus grand degré en X_1 et qui, parmi ceux ayant un degré maximal en X_1, possède le plus grand degré en X_2. Le monôme de bidegré (i, j) de $P_2(\alpha \cdot X_1 + \lambda \cdot (X_2)^k, \beta \cdot X_2)$ aura un coefficient égal à $\alpha^i\beta^j \cdot p_{i,j}$ et doit, d'après notre équation, être égal à $\alpha \cdot p_{i,j}$. On a alors nécessairement, comme $\alpha = \beta^k$, que $i \leq 1$ et que si $i = 1$, alors $j = 0$, $\alpha = \beta$ et donc $k = 1$. Or nous avons supposé $k > 1$. Ainsi, $i = 0$, c'est-à-dire que le polynôme P_2 ne dépend pas de X_1.

On peut donc écrire $P_2 = P_2(X_2)$. Il est alors immédiat que le polynôme P_2 est de degré au plus 1. Donc, P_2 est de la forme p_2X_2.

Pour le polynôme P_1 qui définit f_1, on a :

$$P_1(\alpha \cdot X_1 + \lambda \cdot X_2^k, \beta \cdot X_2) = \alpha P_1(X_1, X_2) + \lambda k \cdot X_2^{k-1} \cdot P_2(X_1, X_2)$$

Considérons $q_{i,j} \cdot X_1^i X_2^j$ le monôme de P_1 ayant le plus grand degré en X_1 et qui, parmi ceux ayant un degré maximal en X_1, possède le plus grand degré en X_2. Le monôme de bidegré (i, j) de $P_1(\alpha \cdot X_1 + \lambda \cdot (X_2)^k, \beta \cdot X_2)$ aura un coefficient égal à $\alpha^i\beta^j q_{i,j}$ et doit, d'après notre équation, si i est au moins 2, être égal à $\alpha \cdot q_{i,j}$. On en déduit qu'il est impossible que i soit supérieur ou égal à 2.

Ainsi, le polynôme P_1 est de la forme $X_1 \cdot R_1(X_2) + R_2(X_2)$. L'équation devient alors :

$$(\alpha \cdot X_1 + \lambda \cdot (X_2)^k)R_1(\beta \cdot X_2) + R_2(\beta \cdot X_2) = \alpha \cdot (X_1 \cdot R_1(X_2) + R_2(X_2)) + \lambda k p_2 \cdot X_2^k$$

soit

$$X_1(\alpha \cdot (R_1(\beta \cdot X_2) - R_1(X_2))) + \lambda \cdot (X_2)^k(R_1(\beta \cdot X_2) - kp_2) + R_2(\beta \cdot X_2) - \alpha \cdot R_2(X_2) = 0$$

Le coefficient de X_1 devant être le polynôme nul, R_1 doit être un polynôme constant r_1.

On remarque, de plus, que $R_2(\beta \cdot X_2) - \alpha \cdot R_2(X_2)$ doit être un monôme de degré k, ce qui implique que R_2 est un monôme de degré k et alors on obtient que $R_2(\beta \cdot X_2) - \alpha \cdot R_2(X_2) = 0$.

Alors, il faut que $r_1 \cdot X_2 - kp_2 \cdot X_2 = 0$, ce qui implique $r_1 = kp_2$. On remarque en outre que toutes ces conditions nécessaires sont également suffisantes.

Ainsi, on constate que les champs de vecteurs que nous obtenons sur les surfaces de Hopf primaires non linéaires sont bien ceux que nous mentionnions dans l'énoncé de la proposition. Le fait qu'un tel champ soit sans singularité si et seulement s'il n'est pas multiple du champ $z_2^k \frac{\partial}{\partial z_1}$ est évident.

On s'intéresse maintenant au cas des surface de Hopf primaires linéaires.

Commençons par le cas particulier $\lambda \neq 0$. Dans ce cas, on a nécessairement $\alpha = \beta$.

Faisons le même raisonnement que pour une surface non-linéaire. On trouve par le même calcul que le champ est polynomial et que la deuxième coordonnée est une fonction linéaire (qui peut dépendre de la première coordonnée). De même, il est facile de voir que la première coordonnée est de degré au plus 1 en X_1, que le polynôme facteur de X_1 est constant et que le reste est de degré au plus 1 en X_2.

Réglons maintenant le cas $\lambda = 0$. La surface M est alors le quotient de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ par l'automorphisme : $(z_1, z_2) \rightarrow (\alpha z_1, \beta z_2)$.

Les coordonnées du champ X sont des fonctions entières (et il est facile de voir qu'elles sont polynomiales) en z_1 et z_2. Soit $c_{i,j}$ le coefficient de $X_1^i X_2^j$ pour la première fonction coordonnée et $d_{i,j}$ pour la seconde. On doit avoir, pour tous i, j :

$$\alpha \cdot c_{i,j} = \alpha^i \beta^j \cdot c_{i,j}$$

Il est clair que si α n'est pas une puissance de β, alors $c_{i,j} = 0$ pour $(i,j) \neq (1,0)$. C'est-à-dire que f_1 est multiple de z_1.

Si $\alpha = \beta^k$, alors $c_{i,j} = 0$ pour $(i,j) \neq (1,0), (0,k)$.

De même, on a pour tous i, j :

$$\beta \cdot d_{i,j} = \alpha^i \beta^j \cdot d_{i,j}$$

Ainsi, si $\alpha \neq \beta$, $d_{i,j} = 0$ sauf si $(i,j) = (0,1)$ et si $\alpha = \beta$, alors $d_{i,j} = 0$ sauf si $(i,j) = (0,1)$ ou $(i,j) = (1,0)$.

Finalement, les champs que nous trouvons sur les surfaces de Hopf primaires linéaires sont exactement ceux que nous annoncions dans l'énoncé de notre proposition. $\square$

Cherchons maintenant les champs de vecteurs holomorphes sans singularité sur les surfaces de Hopf non primaires. Nous avons déjà signalé que le groupe fondamental d'une surface de Hopf est une extension finie de $\mathbb{Z}$ et il est connu que s'il ne contient pas d'homothétie de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$, alors il est commutatif (en fait, un tel groupe est une extension finie centrale de $\mathbb{Z}$ et un calcul direct montre qu'un sous-groupe agissant librement sur $\mathbb{C}^2 - (0,0)$ du centralisateur dans $Aut(\mathbb{C}^2 - (0,0))$ d'une dilatation qui n'est pas une homothétie est commutatif). De plus, on sait qu'un groupe abélien possédant un sous-groupe H d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$ est le produit direct de son sous-groupe de torsion et d'un sous-groupe H' contenant H et également isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Nous allons distinguer plusieurs cas suivant la nature d'une surface primaire revêtant M.

Premier cas : M est revêtue par une surface de Hopf primaire non linéaire.

Dans ce cas, ([**?**],th. 32) nous indique que le groupe fondamental de M est la somme directe de $\mathbb{Z}$ et d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_l$ où l est premier avec k, engendré par un automorphisme de la forme :

$$(z_1, z_2) \to (\epsilon^k z_1, \epsilon z_2)$$

où ϵ est une racine primitive l-ième de l'unité.

De plus, il est clair que tous les champs de vecteurs sur le revêtement cyclique de M associé au groupe $\mathbb{Z}_l$ passent au quotient en des champs de vecteurs sur M, qui sont sans singularité si leur relevé l'est.

Deuxième cas : M est revêtue par une surface de Hopf linéaire donnée par une matrice ayant deux valeurs propres α et β, $|\alpha| \geq |\beta| > 1$ telles que pour tout $k \geq 2$ entier on ait $\beta^k \neq \alpha$ et $\beta^k \neq \alpha^k$.

Appelons X la matrice qui définit le revêtement de M dont nous parlons et appelons D l'automorphisme associé à la matrice X. Le groupe fondamental de M est commutatif d'après ce que nous avons dit précédemment, donc est formé d'automorphismes qui commutent avec D. Or, le centralisateur de D dans $Aut(\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\})$ est formé des automorphismes linéaires diagonalisables dans la même base que X.

D'autre part, on peut toujours supposer quitte à prendre un revêtement fini que D n'est pas divisible dans le groupe fondamental de M, qui se trouve alors être le produit de son sous-groupe de torsion avec le groupe engendré par D.

Or, le sous-groupe de torsion de $\pi_1(M)$ est un sous-groupe de $S^1 \times S^1$, qui agit librement sur $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$, c'est-à-dire qu'un élément non trivial de ce groupe n'a pas de valeur propre égale à 1. Un tel groupe est nécessairement un groupe cyclique $\mathbb{Z}_l$, engendré par un automorphisme de la forme :

$$(z_1, z_2) \to (\epsilon_1 z_1, \epsilon_2 z_2)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont deux racines primitives l-ièmes de l'unité.

On voit que dans ce cas également, tout champ de vecteurs sur le revêtement cyclique de M associé à $\mathbb{Z}_l$ passe au quotient en un champ sur M, sans singularité si son relevé l'est.

Troisième cas : M est revêtue par une surface de Hopf linéaire où la matrice X définissant la dilatation linéaire D associée à ce revêtement possède des valeurs propres vérifiant $\alpha = \beta^k, k \geq 2$.

Ce cas est en quelque sorte un mixage entre les deux précédents. On obtient en effet que comme dans le cas précédent, et pour les mêmes raisons, le groupe fondamental de M est, quitte à bien choisir D, le produit du groupe engendré par D et d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}_l$ engendré par un automorphisme ayant même forme que précédemment.

De plus, tout champ linéaire sur le revêtement cyclique de M associé à $\mathbb{Z}_l$ passe au quotient en un champ sur M et un multiple non nul du champ $z_2^k \frac{\partial}{\partial z_1}$ passe au quotient sur M si et seulement si $\epsilon_1 = \epsilon_2^k$, comme dans le premier cas.

Quatrième cas : M est revêtue par une surface de Hopf linéaire où la matrice X définissant la dilatation D n'est pas diagonalisable.

Ici encore, on peut supposer que D n'est pas divisible dans $\pi_1(M)$.

Dans ce cas, le groupe fondamental de M est abélien, donc est un sous-groupe du centralisateur de D dans $Aut(\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\})$.

Or, ce centralisateur est le groupe des automorphismes linéaires qui se trigonalisent dans la même base que D et dont les deux valeurs propres sont égales. Il est clair qu'un sous-groupe fini d'un tel groupe est un groupe cyclique engendré par une homothétie dont le rapport est une racine de l'unité.

De plus, tout champ de vecteurs sur le revêtement cyclique de M associé à ce sous-groupe de torsion est linéaire, donc passe au quotient sur M.

Cinquième cas : M est revêtue par une surface de Hopf primaire linéaire telle que la dilatation associée est une homothétie.

Remarquons qu'il s'agit de notre dernier cas car il englobe le cas où le groupe fondamental de M contient un automorphisme linéaire dont les valeurs propres α et β ont pour quotient une racine de l'unité.

Une surface M pour laquelle ce cas s'applique est le quotient d'une variété V_α dont le groupe fondamental est engendré par une homothétie de rapport $\alpha(|\alpha| > 1)$ par un sous-groupe fini d'automorphismes agissant librement sur V_α.

Calculons donc le groupe des automorphismes de V_α.

Il est clair que V_α est un fibré holomorphe au-dessus de $\mathbb{C}P_1$, la fibre étant la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/ < \alpha >$. Tout automorphisme de V_α préserve cette fibration (par exemple parce que les fibres de cette fibration sont les orbites compactes des champs de vecteurs holomorphes) et on en déduit un morphisme naturel de $Aut(V_\alpha)$ dans

$Aut(\mathbb{C}P_1)$. De plus, il est clair que ce morphisme est surjectif.

Or, tout automorphisme de V_α est linéaire, c'est-à-dire que le groupe des automorphismes de V_α est le quotient de $Gl_2(\mathbb{C})$ par le groupe engendré par l'homothétie de rapport α. Ce groupe est le produit direct $Sl_2(\mathbb{C}) \times E$, où E est la courbe elliptique $(\mathbb{C}^*/ < \alpha, -1 >)$. Or, il est immédiat qu'un sous-groupe fini de $Aut(V_\alpha)$ est inclus dans un conjugué du groupe $SU(2) \times E$, dont on connaît les sous-groupe finis.

Un champ de vecteurs holomorphe sur le quotient de V_α par un tel groupe est le champ associé à une matrice de $M_2(\mathbb{C})$ qui commute au groupe fini précédent.

Cela termine la classification générale des champs de vecteurs non singuliers sur les surfaces complexes compactes.

Chapter 3

Actions holomorphes localement libres sur les variétés kählériennes compactes

Nous cherchons maintenant les variétés kählériennes de dimension $n+1$ qui possèdent une action localement libre de $\mathbb{C}^n$.

3.1 Rappels sur les variétés kählériennes

Le but de ce paragraphe est de rappeler certaines propriétés essentielles des variétés kählériennes qui montrent que cette hypothèse est très contraignante.

Soit M une variété complexe. Une forme kählérienne sur M est une section g, de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré des formes hermitiennes définies positives sur M qui vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

i) La structure complexe J (c'est-à-dire l'opérateur de multiplication par i sur les espaces tangents) est parallèle pour la connexion riemannienne associée à g.

ii) La (1,1)-forme ω définie par $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$ est fermée.

On dit qu'une variété complexe est kählérienne si elle possède une forme kählérienne. Une variété kählérienne possède de nombreuses propriétés remarquables et nous ne citerons ici que celles que nous utiliserons par la suite. Pour la démonstration de ces résultats, on pourra, par exemple, se référer à [**?**] ou [**?**].

Fait 1 : Toute sous-variété holomorphe d'une variété kählérienne est kählérienne. Il suffit de munir cette sous-variété de la restriction à son fibré tangent de la forme kälérienne de la variété ambiante, qui est encore une forme kählérienne.

Fait 2 : Toute 1-forme holomorphe sur une variété kählérienne compacte est fermée.

Fait 3 : La théorie de Hodge s'applique aux variétés kählériennes compactes, c'est-à-dire en particulier qu'il est possible de décomposer la cohomologie de M :

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^p(M, \Omega^q))$$

où Ω^q est le faisceau des germes de q-formes holomorphes sur M et il y a un isomorphisme entre $H^p(M, \Omega^q)$ et le dual de $H^q(M, \Omega^p)$. En particulier, pour $k = 1$, on obtient que le premier nombre de Betti de M est le double de la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes.

Fait 4 : Soit M une variété kählérienne compacte. On peut définir une application de M dans un tore complexe de la façon suivante : Appelons k la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes sur M. Considérons une base $\omega_1, ..., \omega_k$ de l'espace des 1-formes holomorphes sur M ainsi qu'un point base x sur M. Pour tout point y sur M, considérons un chemin γ_y allant de x à y ainsi que le k-uplet $(\int_{\gamma_y} \omega_1, ..., \int_{\gamma_y} \omega_k)$. Comme les formes holomorphes sont fermées sur M, ce k-uplet est le même pour deux chemins γ_1 et γ_1' homotopes. Il est donc bien défini modulo un k-uplet de la forme $\Omega(h) = (\omega_1(h), ..., \omega_k(h))$ où h est une classe de $H_1(M, \mathbb{Z})$ et $\omega_i(h)$ l'intégrale de ω_i le long d'un chemin dans h.

Comme le premier nombre de Betti de M est égal à $2k$, il n'est pas difficile de voir que $\Omega(H_1(M, \mathbb{Z}))$ est un réseau dans $\mathbb{C}^k$. On obtient ainsi une application de M dans $\mathbb{C}^k/\Omega(H_1(M, \mathbb{Z}))$ qui est un tore. Cette application s'appelle l'application d'Albanese de M et le tore s'appelle tore d'Albanese de M qui est bien défini à biholomorphisme près.

3.2 La classification

Avant de regarder ce qui se passe en dimension quelconque, regardons ce que nous obtenons dans le cas des surfaces. Autrement dit on se pose la question suivante : Parmi les surfaces compactes qui possèdent un champ de vecteurs non singulier, quelles sont celles qui possèdent également une forme kählérienne?

Nous allons regarder chaque cas particulier.

i) Le cas des tores est facile : tout tore complexe possède la forme kählérienne héritée du passage au quotient de la forme kählérienne canonique de $\mathbb{C}^2$. Cela reste d'ailleurs vrai en toute dimension.

ii) Le cas des fibrés principaux en une courbe elliptique sur une courbe se traite en considérant le premier nombre de Betti d'un tel fibré.

Proposition **3.2.1** *Soit E un fibré principal en un tore (réel) de dimension n sur une surface (réelle). Soit g le genre de la surface de base et $b_1(E)$ le premier nombre de Betti de E. Alors, on a $b_1(E) = 2g + n$ si le fibré est topologiquement trivial et $b_1(E) = 2g + n - 1$ dans le cas contraire.*

Preuve Appelons B la base du fibré E et T le groupe sous-jacent à la fibre. Retirons à B un petit disque ouvert D et considérons E' la restriction de E au complémentaire B' de D dans B. Il existe une section globale σ du fibré E' au-dessus de B' et une section globale $\bar{\sigma}$ du fibré en tores au dessus de $\bar{D}$. On fait alors la différence de ces sections sur $\partial B' = \partial D$. On obtient ainsi une fonction de ∂D (qui est un cercle) dans T. Cette fonction correspond à une classe de $H_1(T, \mathbb{Z})$.

Si cette classe est nulle, on peut modifier la section $\bar{\sigma}$ sur $\bar{D}$ de manière à ce qu'elle coïncide avec σ sur ∂D. Dans ce cas, E possède une section globale et est donc trivial.

Si cette classe est non nulle, alors on peut considérer l'image du morphisme de groupes de S^1 dans T qui est homotope à $\sigma - \bar{\sigma}$. Il s'agit d'un sous-groupe de dimension 1 de T que nous noterons $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$. On peut alors considérer E_1 le quotient de E par $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ qui est un fibré principal en $T/\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ sur B. Ce fibré est un fibré trivial car on peut modifier la section $\bar{\sigma}$ en une section $\hat{\sigma}$ de manière à ce que l'image de $\sigma - \hat{\sigma}$ soit incluse dans $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$. En quotientant σ et cette nouvelle section par $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$, on obtient deux sections de E_1 sur B qui coïncident sur ∂D. Ainsi, E_1 est homéomorphe à $B \times T/\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$, donc son premier nombre de Betti vaut $2g + n - 1$.

Or, E est un fibré principal non trivial en cercles sur E_1. On en déduit que son premier nombre de Betti est égal à celui de E_1, c'est-à-dire $2g + n - 1$. $\square$

Or, le premier nombre de Betti d'une variété kählérienne est toujours pair. Donc, si un fibré principal en un tore complexe sur une courbe complexe est kählérien, alors c'est un fibré topologiquement trivial. Réciproquement, tout fibré topologiquement trivial en une courbe elliptique sur une courbe quelconque possède une forme kählérienne. En effet, d'après la proposition 1.3.1, un tel fibré est déterminé à biholomorphisme près par une classe de $H^1(B, \mathcal{O}/\mathbb{Z}^{\in})$ dont l'image par l'application β du diagramme (D) est nulle. C'est donc l'image d'un élément du $H^1(B, \mathcal{O})$. Or, l'application α du même diagramme est surjective, donc ce fibré peut être réalisé par des cocycles constants. Ainsi, en prenant de tels cocycles et en prenant sur chaque carte la forme kählérienne produit des formes kählériennes de la base et de la fibre, on munit M d'une forme kählérienne.

iii) Le cas des surfaces de classe VII est facile. Ces surfaces ont un premier nombre de Betti égal à 1. Elles ne peuvent donc pas posséder de forme kählérienne.

iv) Reste le cas des surfaces obtenues comme quotients de $\mathbb{C} \times C$ par l'action du groupe fondamental d'une courbe elliptique. Ces surfaces fibrent sur une courbe elliptique, la fibre étant une courbe compacte. Si la fibre est de genre au moins 1, la variété que nous étudions rentre dans une des catégories précédentes de variétés kählériennes. De plus, tout fibré en $\mathbb{C}P_1$ sur un tore complexe est kählérien (et même algébrique si c'est une surface), d'après un résultat de Blanchard [?].

Au vu de la diversité des surfaces kählériennes possédant une action localement libre de $\mathbb{C}$, on pourrait s'attendre à ce que la classification en toute dimension soit compliquée. Or, le théorème suivant montre qu'il n'en est rien et on s'aperçoit que la dimension 1 est aussi riche que la dimension quelconque.

Théorème **3.2.2** *Soit M une variété kählérienne compacte de dimension $n+1$ et ϕ une action localement libre de $\mathbb{C}^n$ sur M. Alors, M est, à revêtement fini près, de l'une des trois formes suivantes :*

i) Un tore complexe.

ii) Un fibré holomorphe principal topologiquement trivial en un tore complexe sur une courbe complexe.

iii) Un fibré holomorphe en $\mathbb{C}P_1$ sur un tore complexe.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, nous allons regarder les actions que nous obtenons dans chacun de ces cas, et nous indiquerons si ces actions préservent une forme de volume.

Le cas des tores est très simple : Comme nous l'avons déjà dit, tout champ de vecteurs sur un tore de dimension $n+1$ s'obtient par passage au quotient d'un champ de vecteurs constant sur $\mathbb{C}^{n+1}$. Ainsi, toute action de $\mathbb{C}^n$ sur un tel tore est une action linéaire.

Le cas des fibrés principaux topologiquement triviaux en tores sur une courbe est assez facile. Si la base est un tore alors le fibré lui même est un tore et on est ramené au cas i). Si la base est $\mathbb{C}P_1$, le fibré est holomorphiquement trivial et on est ramené au cas iii). Nous supposerons donc que la base est une courbe hyperbolique et soit X un champ de vecteurs sur M.

Le fibré tangent à une telle variété possède comme sous-fibré le fibré TF tangent aux fibres, qui est trivial. Soit NF le fibré quotient. C'est un fibré dont la restriction à chaque fibre est le fibré trivial. Ainsi, la projection de X sur ce fibré est constante en restriction à chaque fibre, donc passe au quotient en un champ de vecteurs X_B sur la base. Or, la base étant hyperbolique, X_B est nul. C'est-à-dire que le champ X est tangent aux fibres. Or, le fibré TF est trivial. Donc X est constant, c'est à dire donné par l'action principale. Ainsi, à reparamétrage près, la seule action holomorphe localement libre de $\mathbb{C}^n$ sur un tel fibré est l'action principale de la fibre.

Il est clair qu'une telle action préserve une forme de volume, et même n'importe quelle forme de volume obtenue comme le produit extérieur de la forme de volume canonique de la fibre par une forme de volume quelconque sur la base.

Reste le cas où M est un fibré topologiquement trivial en $\mathbb{C}P_1$ sur un tore complexe de la forme $\mathbb{C}^n/R$. Le fibré tangent à une telle variété se scinde en la somme du fibré donné par l'action (qui est trivial) et du fibré tangent aux $\mathbb{C}P_1$. Comme le fibré donné par l'action est trivial, la projection de tout champ de vecteurs holomorphe sur ce fibré est constante. Le revêtement universel de M est un fibré holomorphe en $\mathbb{C}P_1$ sur $\mathbb{C}^n$. Le flot du champ défini par le relevé à $\tilde{M}$ de l'action initiale fournit une trivialisation du fibré en $\mathbb{C}P_1$ sur $\mathbb{C}^n$.

Regardons alors l'action du groupe fondamental de M sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P_1$. L'action sur la première coordonnée doit être linéaire pour passer au quotient en un fibré sur un tore. L'action de $\pi_1(M)$, qui s'identifie à R, sur $\tilde{M}$ est donc de la forme suivante :

$$\lambda \cdot (z, z_1) = (z + \lambda, \rho_{\lambda,z}(z_1))$$

où, pour tout λ de R, ρ est une application de $\mathbb{C}^n$ dans $Aut(\mathbb{C}P_1)$. De plus, les champs $\frac{\partial}{\partial z}$ doivent passer au quotient par cette action. On en déduit que $\rho_{\lambda,z}$ ne dépend pas de z. Ainsi, ρ est juste un morphisme de R dans $Aut(\mathbb{C}P_1)$.

On se pose la question de savoir à quelle condition le champ de vecteurs initial préserve une forme de volume sur M. Il est clair qu'une forme de volume sur M est préservée par X si et seulement si elle est le produit extérieur de la forme volume de Lebesgue du tore de base par une forme volume sur $\mathbb{C}P_1$ qui est préservée par tous les éléments de l'image de l'application ρ.

Nous cherchons donc à quelle condition un sous-groupe de $Aut(\mathbb{C}P_1)$ préserve une forme de volume. On peut même se limiter au cas des sous-groupes commutatifs de $Aut(\mathbb{C}P_1)$. Or, un sous-groupe commutatif de $Aut(\mathbb{C}P_1)$ est inclus dans un groupe à un paramètre complexe.

Il y a, dans $Aut(\mathbb{C}P_1)$, deux classes de conjugaisons de sous-groupes à un paramètre complexe non triviaux.

La première classe est la classe qui contient le sous-groupe formé des éléments de la forme $(z \to z + \lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Mais dans ce sous-groupe, aucun élément non nul ne préserve de forme de volume sur $\mathbb{C}P_1$, car en itérant une translation non nulle tout va à l'infini.

L'autre classe est celle qui contient le sous-groupe formé des éléments de la forme $(z \to e^{2i\pi\lambda} \cdot z)_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Une multiplication par un élément de $\mathbb{C}^*$ préserve une forme de volume sur $\mathbb{C}P_1$ si et seulement si le nombre par lequel on multiplie est de module égal à 1 (sinon, en itérant, tout tendrait vers zéro ou l'infini).

Ainsi, un champ de vecteurs sur un fibré en $\mathbb{C}P_1$ sur un tore préserve une forme de volume si et seulement si l'image de l'application ρ associée est incluse dans un conjugué du groupe des multiplications par les nombres complexes de module 1.

Venons en maintenant à la démonstration du théorème. Pour cela, nous allons utiliser le résultat suivant, qui est un cas particulier d'un théorème dû à Carrell et Lieberman ([?], Th 2) :

Théorème **3.2.3** *Soit K une variété kählérienne compacte connexe et X un champ de vecteurs holomorphe non singulier sur K. Alors il existe une 1-forme holomorphe ω sur K telle que $\omega(X) \neq 0$. (Remarquons que $\omega(X)$ est une fonction holomorphe sur K, donc constante).*

Nous utilisons plus exactement un corollaire de ce théorème, qui en est essentiellement une reformulation :

Proposition **3.2.4** *Soit K une variété kählérienne compacte connexe et G un groupe complexe connexe agissant de façon holomorphe et localement libre sur M. Alors l'action associée de G sur la variété d'Albanese de K est aussi localement libre.*

Notons qu'outre l'intérêt que cette proposition possède pour notre étude, elle possède également comme corollaire le théorème que nous annoncions dans l'introduction :

Théorème **3.2.5** *Soit G un groupe complexe connexe agissant de façon holomorphe et localement libre sur une variété kählérienne compacte. Alors G est abélien.*

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.2.2.

Démonstration Rappelons les hypothèses : M est une variété kählérienne de dimension $n+1$ sur laquelle agit $\mathbb{C}^n$ de façon localement libre et holomorphe. L'action en question sera notée ϕ.

L'image de l'application d'Albanese est une sous-variété analytique de T_M qui est stable par l'action de $\mathbb{C}^n$. Elle contient en particulier l'intersection des sous-variétés analytiques de T_M contenant l'image d'une orbite de ϕ. Or, l'image par l'application d'Albanese de l'orbite de ϕ contenant le point base de M est un sous-groupe de T_M et l'intersection des sous-variétés analytiques contenant ce sous-groupe est un sous-tore complexe que nous noterons T_0 de T_M. L'image réciproque de T_0 par l'application d'Albanese est une sous-variété analytique V de M, stable par ϕ, et nous noterons π la restriction de l'application d'Albanese de M ayant V pour ensemble de départ et T_0 pour ensemble d'arrivée.

Nous avons les inégalités suivantes :

$$n \leq dim(T_0) \leq dim(V) \leq n+1$$

L'une exactement de ces trois inégalités est stricte et nous allons étudier les différents cas.

-Premier cas : $dim(T_0) = dimV = n+1$.

Dans ce cas, $V = M$ et donc π est une application de M sur T_0. Considérons W la sous-variété de M formée des points où la différentielle de l'application π n'est pas un isomorphisme. C'est une sous-variété analytique de M stable par ϕ (car l'application d'Albanese est équivariante). Comme ce n'est pas M toute entière, c'est que W est vide. On en déduit facilement que π est un revêtement et que donc M est un tore.

-Deuxième cas : $dim(T_0) = dim(V) = n$.

Dans ce cas, V est une sous-variété de dimension n de M qui contient l'orbite de x par ϕ. C'est donc exactement l'orbite de x et la restriction de l'application d'Albanese à V est un revêtement fini de V sur T_0.

On peut ainsi affirmer que toute orbite de ϕ est un revêtement de T_0. Ainsi, M est tout à fait analogue à une surface elliptique possédant un champ de vecteurs non singulier, la fibre générique étant un certain tore T_1, les fibres exceptionnelles étant des fibres multiples, quotients de T_1. Pour la même raison que dans le cas des surfaces elliptiques, l'espace des orbites de M est une orbifold et on cherche à montrer qu'elle est bonne. Comme nous l'avons dit, si cette variété n'était pas bonne, ce serait une sphère topologiquement. Ainsi, le premier nombre de Betti de M serait au maximum égal à $2n$. Or, la variété d'Albanese de M a une dimension complexe au moins $n+1$, donc le premier nombre de Betti de M est au moins égal à $2n+2$. On aboutit alors à une contradiction.

Ainsi, pour la même raison que dans le cas des surfaces, M admet un revêtement M' qui est un fibré principal en un tore complexe sur une courbe. Or, M' étant un revêtement d'une variété kählérienne, est elle-même une variété kählérienne. D'après la proposition 3.2.1, un fibré holomorphe principal en un tore sur une courbe est kählérien si et seulement s'il est topologiquement trivial.

Nous sommes donc dans le cas ii) du théorème.

-Troisième cas : $dim(T_0) = n, dim(V) = n+1$.

Dans ce cas, $V = M$ et T_0 est un tore. Alors, π est une application de M sur un tore, surjective, et équivariante par rapport aux actions de $\mathbb{C}^n$. Soit x un point de T_0 et C l'image réciproque de x par π. Soit $U = \phi_{B_n(0,\epsilon)}(x)$ un petit voisinage de x dans T_0. L'application de $B_n(0,\epsilon) \times C$ dans $\pi^{-1}(U)$ est un biholomorphisme si ϵ est assez petit.

On en déduit que C est une courbe complexe plongée dans M et que M est un fibré holomorphe en C sur T_0. Nous noterons R le groupe fondamental de T_0.

Si C est une sphère de Riemann, on est dans le cas iii) du théorème.

Si C est une courbe elliptique, M est un fibré holomorphe principal en une courbe elliptique sur un tore complexe. L'action principale fournit un champ de vecteurs sans singularité transverse aux n champs précédents et qui commute avec. Il en résulte que M est un tore complexe.

Si C est une courbe de genre supérieur, considérons le revêtement $\hat{M}_1$ de M qui est un fibré holomorphe en C sur $\mathbb{C}^n$. L'action $\hat{\phi}_1$ de $\mathbb{C}^n$ sur $\hat{M}_1$ nous fournit une trivialisation holomorphe de ce fibré.

Le groupe du revêtement de $\hat{M}_1$ sur M s'identifie à R. L'action de ce groupe sur $\hat{M}_1 \simeq \mathbb{C}^n \times C$ est de la forme suivante :

$$\hat{\phi}_1(\lambda) \cdot (z, c) = (z + \lambda, \rho_{\lambda,z}(c))$$

où ρ_λ est une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $Aut(C)$. Or, comme C est hyperbolique, $Aut(C)$ est fini et $\rho_{\lambda,z}$ ne dépend pas de z.

On en déduit que ρ est un morphisme de R dans $Aut(C)$. Ainsi, $Ker\ \rho$ est un sous-groupe d'indice fini de R et le revêtement fini $\hat{M}$ de M dont le groupe de revêtement est $R/Ker\ \rho$ est clairement biholomorphe à un fibré produit $T_1 \times C$ pour un certain revêtement T_1 de T_0.

On est donc dans le cas ii) du théorème.

Donc, dans tous les cas, M est bien de la forme indiquée dans l'énoncé du théorème, qui est donc démontré. $\square$

Part II

Actions préservant une forme de volume

Chapter 4

Préliminaires

Définition **4.0.1** *Soit G un groupe de Lie abélien complexe connexe, simplement connexe. Soit M une variété complexe compacte connexe.*

On dit qu'une action ϕ du groupe G sur la variété M satisfait la condition (C) si les conditions suivantes sont réalisées :

i) L'action ϕ est une action holomorphe.

ii) $dim_{\mathbb{C}}(M) = dim_{\mathbb{C}}(G) + 1$.

iii) L'action ϕ est une action localement libre (cf définition 1.1.3 de la première partie).

iv) Il existe une forme de volume Ω sur la variété M, de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, qui est préservée par cette action, c'est-à-dire que pour tout élément g de G, on a $\phi_g^*(\Omega) = \Omega$.

Ce sont les actions vérifiant cette condition que nous allons étudier dans cette deuxième partie. Fixons nous donc une fois pour toutes une action holomorphe ϕ d'un groupe de Lie complexe G sur une variété complexe compacte connexe M, action vérifiant la condition (C). Notons de plus n la dimension complexe du groupe G (n $\geq 1); onpeutidentifier$GavecC ^{n}.

D'après la proposition 1.2.1, l'action de ϕ munit la variété M d'un feuilletage dont les feuilles sont les orbites de ϕ. Nous noterons $\mathcal{F}$ ce feuilletage. Montrons alors l'importante proposition suivante :

Proposition **4.0.6** *Soit M une variété complexe supportant une action ϕ d'un groupe G satisfaisant la condition (C). Alors, le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement riemannien.*

Preuve Soit Ω une forme de volume sur M invariante par ϕ et soit v un vecteur tangent à M en un point x. On choisit une base $w_1, ..., w_n$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G.

L'application $D_x\phi\ : \mathcal{G} \to \mathcal{T}_\S\mathcal{M}$ est injective et son image est exactement l'espace tangent en x au feuilletage $\mathcal{F}$.

Pour $1 \leq j \leq n$, posons $v_j = D_x\phi(w_j)$. Posons alors :

$$q(v) = \Omega(v_1, J_x(v_1), ..., v_n, J_x(v_n), v, J_x(v))$$

où J_x est l'endomorphisme de T_xM induisant la structure complexe.

On remarque que q est une forme quadratique dont le noyau est $Im(D\phi) = T_x\mathcal{F}$. De plus, cette forme est, au signe près de Ω, définie positive sur le quotient. Cette forme est de plus invariante par ϕ d'après la définition des v_j.

On a donc bien trouvé une structure riemannienne transverse au feuilletage $\mathcal{F}$. $\square$

On peut alors affirmer, d'après ([**?**], lemme 5.1) que dans ce cas, l'adhérence d'une orbite de ϕ est une sous-variété réelle de M. Le feuilletage étant de codimension 2 réelle, la codimension réelle de l'adhérence d'une orbite de ϕ est au plus 2, et est exactement égale à 2 si et seulement si l'orbite est compacte. Trois cas sont alors possibles :
- Soit toutes les orbites sont denses.
- Soit toutes les orbites sont compactes.
- Soit il existe des feuilles qui ont une adhérence de codimension réelle égale à 1. Dans ce cas, on peut dire qu'il n'y a pas d'orbite dense et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites compactes.

Le cas le plus intéressant est le cas des actions à feuilles denses. Les autres cas sont décrits dans le dernier chapitre.

Chapter 5

Actions à feuilles denses. Premières propriétés

Définition **5.0.2** *On dit qu'une action ϕ du groupe complexe G sur la variété complexe M satisfait la condition (C_d) si elle vérifie (C) et s'il existe une orbite de ϕ qui est dense dans la variété M.*

On fait, dans ce chapitre et dans les trois suivants, l'hypothèse que l'action ϕ vérifie la condition (C_d).

On s'attache ici à déterminer précisément la structure transverse de $\mathcal{F}$, et à étudier l'action naturelle du groupe fondamental de M sur le revêtement universel $\tilde{M}$ de M. Nous établissons en particulier que $\tilde{M}$ est biholomorphe à $\mathbb{C}^{n+1}$, que le groupe fondamental de M est un sous-groupe unipotent du groupe affine complexe $GA(n+1)$ dont la longueur est au plus égale à 2.

5.1 Structure transverse du feuilletage $\mathcal{F}$

Comme nous venons de le dire, l'existence d'une orbite dense pour un feuilletage transversalement riemannien implique la densité de chaque orbite.

On en déduit alors facilement le petit résultat suivant :

Remarque **5.1.1** Tous les points de M ont même stabilisateur et le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage sans holonomie. ▷

La preuve de ces deux faits est immédiate : si un élément g de G stabilise un point x de M, il résulte de la commutativité de G le fait que g stabilise tous les points de l'orbite de x. Mais comme de plus cette orbite est dense, g agit trivialement sur tout M.

Définition **5.1.1** *On appellera Stab le stabilisateur d'un point quelconque de M.*

Considérons maintenant un lacet $\sigma\ : [0,1] \to F$ dans une feuille de $\mathcal{F}$. Il existe alors un chemin c_t dans G, tel que pour tout $t \in [0,1]$, on ait $\sigma(t) = \phi_{c_t} \cdot \sigma(0)$. Alors, c_1 est un élément de $Stab$ car σ est un lacet. Le chemin décrit par l'action de c_t à partir d'un autre point x de M donne un lacet dans la feuille contenant x car c_1 est dans $Stab_x = Stab$. Ainsi, l'holonomie (au sens des feuilletages) du lacet σ est triviale. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc sans holonomie.

Le résultat suivant, décrivant la nature transverse du feuilletage $\mathcal{F}$, est fondamental pour la suite :

Proposition **5.1.2** *Le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement de Lie de groupe $\mathbb{C}$.*

Pour démontrer cette proposition, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme **5.1.1** *Le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement homogène pour un espace homogène à courbure constante.*

Preuve Le feuilletage $\mathcal{F}$ défini par l'action ϕ est transversalement riemannien. De plus, le feuilletage $\mathcal{F}$ étant de codimension complexe égale à 1, la variété T est une surface réelle. On peut donc définir la courbure transverse de ce feuilletage. C'est en un point x de M la courbure de la variété T en un point qui est l'image de x par une des submersions définissant le feuilletage. Du fait que les changements de cartes sont des isométries, on déduit que cette application est bien définie, et il est clair qu'elle est constante sur chaque feuille. Comme de plus elle est continue et que les orbites de ϕ sont denses dans M, on peut affirmer que cette courbure transverse est constante.

Or, toute variété à courbure constante est localement isométrique à une variété complète simplement connexe de même courbure. On peut donc s'arranger pour que la variété T soit complète et simplement connexe. De plus, une variété complète simplement connexe à courbure constante est un espace homogène de son groupe d'isométries et toute isométrie locale d'une telle variété est la restriction d'une isométrie globale, donc d'une translation dans l'espace homogène $Isom(T)/I$, I étant le groupe d'isotropie d'un point de T.

Ainsi, le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement homogène. □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition.

Preuve Nous savons maintenant que le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement homogène et à courbure transverse constante. D'après un théorème de Blumenthal [**?**], on peut affirmer que le revêtement universel $\tilde{M}$ de la variété M fibre sur un espace simplement connexe à courbure constante que l'on peut prendre comme variété transverse T

pour définir le feuilletage et que les changements de carte peuvent être définis à partir d'isométries globales de T. Ces isométries nous fournissent une représentation d'holonomie globale $h : \pi_1(M) \to Isom(T)$ où $\pi_1(M)$ est le groupe fondamental de M.

On peut de plus faire une remarque importante sur les isométries qui sont dans l'image de h. Supposons en effet que pour un certain ρ dans $\pi_1(M)$, $h(\rho)$ possède un point fixe. Ce point correspond à une feuille $\tilde{F}$ de $\tilde{M}$. Alors, un point x de $\tilde{F}$ est envoyé par ρ sur un point de $\tilde{F}$, que nous noterons y. Or, il existe un élément z_0 de $\mathbb{C}^n$ tel que $\tilde{\phi}_{z_0}(x) = y$. Comme x et y sont dans la même orbite sous l'action de $\pi_1(M)$, ils ont la même projection sur M et donc z_0 est dans $Stab$. Ainsi, ρ et $\tilde{\phi}_{z_0}$ sont deux éléments de $\pi_1(M)$ qui envoient x sur y. Ils sont donc égaux et ainsi $h(\rho) = Id$.

Ainsi, la variété transverse ne peut être la sphère S^2, car il n'existe pas de groupe d'isométries agissant librement et avec des orbites denses sur cette variété.

De plus, les seules isométries du plan euclidien qui sont triviales ou sans point fixe sont les translations. Ainsi, si la courbure transverse de $\mathcal{F}$ est nulle, on peut affirmer que l'image de h est constituée de translations. Cela revient à dire que $\mathcal{F}$ est transversalement de Lie $\mathbb{R}^2$.

La question qu'on se pose est donc de savoir s'il est possible que $\mathcal{F}$ soit transversalement hyperbolique. La réponse nous est fournie par un théorème de Carrière [?] qui affirme qu'un feuilletage riemannien à croissance polynomiale sur une variété compacte (ce qui est clairement le cas de $\mathcal{F}$) possède une algèbre de Lie structurale nilpotente, et il est clair que l'algèbre de Lie structurale d'un feuilletage transversalement hyperbolique et à feuilles denses d'une variété compacte contient l'algèbre de Lie du groupe affine réel, donc n'est pas nilpotente. Le feuilletage $\mathcal{F}$ ne peut donc être transversalement hyperbolique.

Ainsi, le seul cas possible est que $\mathcal{F}$ soit transversalement de Lie de groupe $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. □

On peut ainsi affirmer qu'il existe une fibration, que nous noterons p, de $\tilde{M}$ sur $\mathbb{C}$, les fibres de p étant les orbites de l'action $\tilde{\phi}$, relevé à $\tilde{M}$ de l'action ϕ. On peut même raffiner ce résultat :

Proposition **5.1.3** *Le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est biholomorphe à $\mathbb{C}^{n+1}$. Plus précisément, c'est un fibré holomorphe principal en $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}$, l'action principale de $\mathbb{C}^n$ s'identifiant avec $\tilde{\phi}$.*

Preuve Nous avons déjà mentionné que $\tilde{M}$ fibrait au dessus de $\mathbb{C}$, la fibre s'identifiant au revêtement universel d'une orbite de ϕ, c'est-à-dire à $G = \mathbb{C}^n$. Il est clair que cette fibration est principale. De plus, l'application p est holomorphe. En outre, il est clair que pour toute petite courbe holomorphe ouverte U dans $\tilde{M}$ transverse aux fibres de p, on a un biholomorphisme entre $U \times \mathbb{C}^n$ et $p^{-1}(p(U))$ donné par l'action $\tilde{\phi}$. On en déduit que p est une fibration holomorphe principale.

Or, toute fibration holomorphe principale sur $\mathbb{C}$ est triviale. En effet, d'après le principe de Oka et le fait que $\mathbb{C}$ soit une variété de Stein, tout fibré holomorphe topologiquement trivial sur $\mathbb{C}$ est holomorphiquement trivial (voir, par exemple, [?], p.145). Comme de plus $\mathbb{C}$ est contractile, tout fibré sur $\mathbb{C}$ est topologiquement trivial. Ainsi, il existe un biholomorphisme σ entre $\tilde{M}$ et $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^{n+1} \\ p \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{Id} & \mathbb{C} \end{array}$$

où p_1 est la première coordonnée. $\square$

5.2 Structure du groupe fondamental de M

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$. Nous en déduirons le théorème 5.2.6 qui nous indiquera une direction dans laquelle chercher pour trouver les variétés M supportant des actions vérifiant (C_d).

Rappelons que si nous prenons une variété quelconque, on peut définir son groupe fondamental comme le groupe des automorphismes de son revêtement universel. Ainsi, ce groupe agit de façon naturelle sur le revêtement universel de la variété que nous considérons.

On a d'abord le résultat suivant :

Proposition **5.2.1** *L'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$ commute avec l'action $\tilde{\phi}$, c'est-à-dire que $\pi_1(M)$ agit sur la base $\mathbb{C}$ par translations (c'est l'holonomie), et sur les fibres de façon équivariante par rapport aux actions principales.*

On peut alors immédiatement regarder le groupe dérivé de $\pi_1(M)$.

Proposition **5.2.2** *L'action d'un élément du groupe dérivé de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$ est identique à l'action d'un élément de Stab. On écrira, par abus de langage, $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \subset Stab$.*

Preuve Il est clair qu'il suffit de remarquer ce fait sur un commutateur, puisque *Stab* est un groupe. Or, l'action d'un commutateur de deux éléments de $\pi_1(M)$ sur la base de $\tilde{M}$ est le commutateur des actions de ces deux éléments sur la base de $\tilde{M}$, autrement dit le commutateur de deux translations de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'action triviale.

De plus, sur chaque fibre, ce commutateur agit par translation, mais comme c'est un élément de $\pi_1(M)$, il agit trivialement sur M, donc agit sur chaque fibre de $\tilde{M}$ comme un unique élément de *Stab*. Comme *Stab* est discret, l'élément correspondant est le même pour chaque fibre, donc l'action du commutateur initial est identique à celle de cet élément. $\square$

On peut également faire la remarque suivante :

Remarque **5.2.3** Un élément de $\pi_1(M)$ dont l'holonomie est nulle est dans le centre de $\pi_1(M)$. $\triangleright$

En effet, un tel élément de $\pi_1(M)$ agit sur $\tilde{M}$ comme une translation indépendante de la fibre, donc comme un élément de *Stab* comme on vient de le voir. La remarque découle alors du fait que l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$ commute avec l'action $\tilde{\phi}$.

Ainsi, en réunissant les résultats de la proposition et de la remarque précédentes, on obtient le résultat suivant :

Proposition **5.2.4** *Soit M une variété complexe compacte, connexe, supportant une action de $\mathbb{C}^n$ vérifiant (C_d). Alors, le groupe fondamental de M est un groupe nilpotent de longueur au maximum 2.*

Étudions plus précisément l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$.

Nous avons vu que les holonomies des éléments de $\pi_1(M)$ formaient un sous-groupe dense de $\mathbb{C}$. Ce sous-groupe contient alors des réseaux de $\mathbb{C}$. Considérons un tel réseau R engendré par deux éléments λ_1 et λ_2, ainsi que deux éléments h_1 et h_2 de $\pi_1(M)$ d'holonomies respectives λ_1 et λ_2. Il y a un revêtement intermédiaire entre M et $\tilde{M}$ dont le groupe fondamental est le groupe engendré par h_1 et h_2. Ce revêtement sera noté $\hat{M}_1$.

Cette variété $\hat{M}_1$ est un fibré principal sur $\mathbb{C}/R$, la fibre étant $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}\cdot[h_1,h_2])$. Un élément h de $\pi_1(M)$ agira par translation sur la base de $\hat{M}_1$, et enverra chaque fibre sur une autre fibre en commutant avec l'action de $\mathbb{C}^n$. En ce sens, nous dirons que h agit sur les fibres par des translations. On cherche à comprendre comment varient ces translations par rapport aux fibres du fibré $\hat{M}_1$ (en réalité, c'est surtout la variation de ces translations par rapport aux fibres de $\tilde{M}$ qui nous intéresse). Pour cela, il faut il faut pouvoir "mesurer" les translations envoyant une fibre sur une fibre différente. Pour ce faire, il suffit de se donner sur chaque fibre un point particulier qu'on prendra pour origine de la fibre.

La proposition 1.3.2 de la première partie nous permet de montrer :

Lemme **5.2.1** *Il existe une section holomorphe du fibré $\tilde{M}$ (celle correspondant à $z'=0$ quand h_1 et h_2 agissent comme dans la proposition sus-citée) qui est stable sous l'action de h_1 et dont l'image par h_2 est identique à son image par une certaine fonction affine de coefficient directeur $(\frac{1}{\lambda_1}\cdot[h_1,h_2])$.*

On utilisera alors cette section pour paramétrer les translations sur les fibres (c'est-à-dire qu'on considèrera chaque point de cette section comme origine pour sa fibre). On peut alors décrire précisément l'action de $\pi_1(M)$:

Proposition **5.2.5** *Soit h un élément de $\pi_1(M)$. Les translations sur les fibres de $\tilde{M}$ définies par l'action de h varient de manière affine par rapport aux fibres.*

Preuve En effet, cette variation est holomorphe. Soit r un élément de R. Pour x dans $\mathbb{C}$, appelons $t(x)$ le coefficient de translation sur la fibre d'abscisse x définie par l'action de h. On a alors $t(x+r)-t(x) \in Stab$ puisque h agit trivialement sur M. Et ainsi $t(x+r)-t(x)$ ne dépend pas de x. La fonction t, qui est de plus holomorphe, est alors affine sur $\mathbb{C}$. $\square$

Avant de passer plus concrètement à la classification des différents cas, il est utile de résumer les résultats que nous avons obtenus jusqu'ici. C'est ce que nous faisons dans le théorème suivant :

Théorème **5.2.6** *Soit M une variété complexe, compacte, connexe, de dimension n+1, supportant une action vérifiant (C_d). Alors M est biholomorphe au quotient de $\mathbb{C}^{n+1}$ par l'action libre d'un sous-groupe unipotent de longueur au plus 2 du groupe affine.*

De plus, l'action de $\mathbb{C}^n$ sur $\tilde{M} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ qui relève l'action initiale est constituée de translations qui commutent avec les éléments unipotents précédents.

Démonstration Nous avons déjà mentionné que le revêtement universel de M était biholomorphe à $\mathbb{C}^{n+1}$.

D'après la proposition 5.2.5, l'action d'un élément de $\pi_1(M)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ est de la forme suivante :

$$h(z,(z_1,...,z_n)) = (z+\lambda_h,(z_1,...,z_n)+z\cdot(K_1,...,K_n)+t(0))$$

où λ_h est l'holonomie de h et $K_h=(K_1,...,K_n)$ est la "pente" de la fonction affine définie par l'action de h.

Il est clair que h agit comme un élément du groupe affine et l'application linéaire sous-jacente est :

$$(z,(z_1,...,z_n)) \to (z,(z_1,...,z_n)+z\cdot(K_1,...,K_n))$$

donc est unipotente.

De plus, d'après la proposition 5.2.4, la longueur de ce groupe est au plus 2. Enfin, nous avons déjà mentionné que l'action $\tilde{\phi}$ était une action par translations suivant un hyperplan de $\mathbb{C}^{n+1}$ et nous avons également dit que l'action de $\pi_1(M)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ commutait avec $\tilde{\phi}$. $\square$

C'est en utilisant ce théorème que que pourrons décrire précisément les variétés et les actions que nous cherchons. Nous chercherons en effet les sous-groupes unipotents discrets du groupe affine qui agissent librement, à orbites cocompactes, et qui préservent une fibration de $\mathbb{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{C}$ dont les fibres sont des hyperplans. Les variétés M cherchées seront des quotients de $\mathbb{C}^{n+1}$ par de telles actions.

On peut de plus régler immédiatement le problème de l'existence d'une forme de volume invariante sur une variété obtenue de la sorte.

Proposition **5.2.7** *L'action sur $\mathbb{C}^{n+1}$ d'un élément unipotent du groupe affine préserve la forme de volume canonique sur $\mathbb{C}^{n+1}$.*

Ainsi, pour toute variété M obtenue comme quotient de $\mathbb{C}^{n+1}$ par l'action libre et discrète d'un sous-groupe unipotent du groupe affine, il existe une forme de volume dont le relevé à $\mathbb{C}^{n+1}$ est la forme de volume canonique.

De plus, cette forme de volume est invariante par une action ϕ d'un groupe dont l'action $\tilde{\phi}$ relevée à $\mathbb{C}^{n+1}$ est une action par translations.

Preuve Rappelons que la forme de volume canonique sur $\mathbb{C}^k$ est obtenue en identifiant $\mathbb{C}^k$ avec $\mathbb{R}^{2k}$ par $(z_1, ..., z_k) \leftrightarrow (\mathcal{R}\rceil(\ddagger_\infty), \mathcal{I}\Updownarrow(\ddagger_\infty), ..., \mathcal{R}\rceil(\ddagger_\|), \mathcal{I}\Updownarrow(\ddagger_\|))$ et en prenant sur $\mathbb{R}^{2k}$ la forme de volume canonique $dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{2k}$.

Sous l'action d'une application affine, la forme de volume canonique sur $\mathbb{C}^k$ est multipliée par une constante, qui n'est autre que le module du déterminant de l'application linéaire sous-jacente à l'application affine considérée. Ainsi, si l'application affine considérée est unipotente, la forme de volume canonique sur $\mathbb{C}^k$ est préservée.

En particulier, elle est préservée par toute action par translations.

La proposition en découle. □

Ainsi, comme nous allons obtenir nos variétés comme quotients de $\mathbb{C}^{n+1}$ par des actions libres et discrètes de groupes affines unipotents, l'existence d'une forme de volume invariante sera automatique.

5.3 Commutateurs du groupe fondamental de M

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$. Cela nous permet, en particulier, de calculer facilement le commutateur de deux tels éléments, ce qui nous conduit à l'équation (5.1). Puis nous en montrons une première application.

La formule calculant les commutateurs de deux éléments de $\pi_1(M)$ est la suivante :

Proposition **5.3.1** *Soient h et h' deux éléments de $\pi_1(M)$. On notera λ et λ' leurs holonomies respectives ainsi que K_h et K'_h les coefficients directeurs des fonctions affines définies par leurs actions. On a alors :*

$$[h, h'] = \lambda \cdot K'_h - \lambda' \cdot K_h \tag{5.1}$$

PREUVE Les application h et h', de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans lui-même ont la forme suivante :

$$h(z_0, ..., z_n) = (z_0 + \lambda, (z_1, ..., z_n) + z_0 \cdot K_h + r_h)$$

$$h'(z_0, ..., z_n) = (z_0 + \lambda', (z_1, ..., z_n) + z_0 \cdot K_{h'} + r_{h'})$$

On calcule donc facilement leurs composées :

$$\begin{aligned} h \circ h'(z_0, ..., z_n) &= (z_0 + \lambda' + \lambda, (z_1, ..., z_n) + z_0 \cdot K_{h'} + r_{h'} + (z_0 + \lambda') \cdot K_h + r_h) \\ &= (z_0 + \lambda' + \lambda, (z_1, ..., z_n) + z_0 \cdot (K_{h'} + K_h) + r_{h'} + r_h + \lambda' \cdot K_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h' \circ h(z_0, ..., z_n) &= (z_0 + \lambda + \lambda', (z_1, ..., z_n) + z_0 \cdot (K_h + K_{h'}) + r_h + r_{h'} + \lambda \cdot K_{h'}) \\ &= \phi_{(\lambda \cdot K_{h'} - \lambda' \cdot K_h)} \circ h \circ h'(z_0, ..., z_n) \end{aligned}$$

Donc, $(h' \circ h) \circ (h \circ h')^{-1} = \phi_{(\lambda \cdot K_{h'} - \lambda' \cdot K_h)}$. Cela donne notre équation. □

Ce petit résultat, en apparence banal, est en réalité crucial pour notre propos et nous ne cesserons de nous y référer. Le premier résultat qu'il nous permet d'obtenir est celui-ci :

LEMME **5.3.1** *Soit M une variété compacte supportant une action localement libre, de codimension 1, préservant une forme de volume et à feuilles denses d'un groupe abélien. Alors on a nécessairement une des deux propriétés suivantes :*

-Soit le groupe $\pi_1(M)$ est commutatif.

-Soit le centre de $\pi_1(M)$ s'identifie avec Stab.

PREUVE Conservons les notations précédentes. Supposons que $\pi_1(M)$ n'est pas un groupe commutatif. On peut toujours supposer que h_1 n'est pas dans le centre de $\pi_1(M)$. Soit alors h' un élément de $\pi_1(M)$ tel que $K_{h'} \neq 0$.

Soit h un élément du centre de $\pi_1(M)$. On a alors, d'après la formule (5.1) :
$[h_1, h] = 0 = \lambda_1 \cdot K_h$. Comme λ_1 n'est pas nul, cela montre que K_h est nul.

De même, $[h, h'] = 0 = \lambda \cdot K_{h'}$. Comme $K_{h'}$ n'est pas nul, cela signifie que λ est nul, c'est-à-dire que h s'identifie à un élément de *Stab*. □

On en arrive maintenant à une étude plus concrète des différentes possibilités qui se présentent. Avant de présenter les résultats de classification complexe des variétés et des actions que nous cherchons, nous présentons d'abord une classification réelle, qui présente l'avantage de donner une idée assez précise des rśultats ultérieurs, tout en restant assez simple.

Chapter 6

Classification réelle des variétés et des actions

6.1 Présentation

Dans ce chapitre, nous oublions la structure complexe de la variété M. Nous nous intéressons à la structure de M en tant que variété réelle et considérons l'action ϕ comme une action différentiable d'un groupe commutatif réel.

Néanmoins, les résultats que nous avons déjà obtenus ne sont pas inutiles. Ils nous renseignent assez précisément sur la topologie de la variété M. En effet, le groupe affine complexe de dimension n peut être vu comme un sous-groupe du groupe affine réel de dimension $2n$. De même, un élément unipotent du groupe affine complexe est aussi unipotent dans le groupe réel. Cela nous permet d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION **6.1.1** *Soit M une variété complexe, compacte, connexe, de dimension n+1, supportant une action vérifiant (C_d). Alors, la variété réelle sous-jacente à M est un fibré principal en tores sur un tore.*

De plus, la dimension de la fibre est (ou du moins peut être choisie) égale au rang du groupe dérivé de $\pi_1(M)$, qui, rappelons le, est commutatif.

PREUVE D'après la proposition 5.2.2, le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ agit comme un sous-groupe discret de translations sur $\tilde{M}$, identifié à $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel des translations de $\tilde{M}$ engendré par $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$. L'espace $\mathcal{T}$ s'identifie naturellement à une partie de G.

Posons $\Lambda = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}\sqcup\dashv\lfloor$. C'est un sous-groupe discret de $\mathcal{T}$ contenant $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$. C'est donc un réseau de $\mathcal{T}$.

Posons maintenant $T = \mathcal{T}/*$. C'est un tore qui agit librement sur M. De plus, sa dimension est égale au rang du groupe dérivé de $\pi_1(M)$.

Ainsi, M est un fibré principal en tores sur une variété connexe N, qui est un quotient de $\tilde{M}/\mathcal{T} \simeq \mathbb{R}^{\in\backslash+\in-\lceil\rangle\Updownarrow(\mathcal{T})}$ par $\pi_1(M)/\Lambda$, qui est l'abélianisé libre de $\pi_1(M)$ (c'est-à-dire le quotient de l'abélianisé de $\pi_1(M)$ par son sous-groupe de torsion). D'après la proposition 5.2.1, l'action de $\pi_1(M)/\Lambda$ sur $\tilde{M}/\mathcal{T}$ est une action par translations. Comme la variété M est compacte, c'est que cette action est cocompacte.

Ainsi N est un tore et la proposition est démontrée. $\square$

Un fibré principal en tores sur un tore est un espace homogène d'un groupe de Lie nilpotent. Rappelons en la construction.

Soit E un fibré principal en tores F sur un tore B. On a la suite exacte d'homotopie suivante :

$$0 \to \pi_1(F) \to \pi_1(E) \to \pi_1(B) \to 0$$

Comme le fibré E est principal, $\pi_1(E)$ est une extension centrale de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$.

Appelons k et l les dimensions respectives des tores B et F. Alors, $\pi_1(B)$ et $\pi_1(F)$ peuvent être identifiés respectivement à $\mathbb{Z}^k$ et $\mathbb{Z}^l$.

L'extension étant centrale, le commutateur de deux éléments de $\pi_1(E)$ ne dépend que de leur classe modulo $\pi_1(F)$, c'est-à-dire de leur projection sur $\pi_1(B)$. De plus, $\pi_1(B)$ étant abélien, la projection sur $\pi_1(B)$ du commutateur de deux éléments de E est nulle, c'est-à-dire que le groupe dérivé de $\pi_1(E)$ est inclus dans $\pi_1(F)$. On définit ainsi une application $\gamma\ : \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^l$, qui est bilinéaire et antisymétrique.

Cette application antisymétrique γ se prolonge en une application bilinéaire antisymétrique notée γ_{lin} de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^l$. Cette application γ_{lin} nous fournit une extension centrale :

$$0 \to \mathbb{R}^l \to G_\gamma \to \mathbb{R}^k \to 0$$

Le groupe G_γ que définit cette extension est nilpotent. De plus il est clair qu'il contient $\pi_1(E)$ comme sous-groupe cocompact et que l'espace homogène correspondant est précisément E. Ainsi, le revêtement universel $\tilde{E}$ d'un tel fibré sera identifié au groupe G_γ correspondant.

On peut se demander à quelle condition deux fibrés définis de la manière précédente sont homéomorphes.

Appelons $\check{\gamma}$ l'application linéaire de $\bigwedge^2 \mathbb{Z}^k$ dans $\mathbb{Z}^l$ déduite de γ. Alors, on peut toujours se ramener, quitte à diminuer la dimension de la fibre, au cas où l'image de l'application $\check{\gamma}$ est d'indice fini dans $\mathbb{Z}^l$. Un tel fibré sera appelé semi-primitif.

En effet, supposons que l'image de $\check{\gamma}$ n'est pas d'indice fini dans $\mathbb{Z}^l$. Considérons V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^l$ que cette image engendre et soit $\Pi = V \cap \mathbb{Z}^l$. Alors, le fibré E est un fibré principal de fibre V/Π et de base un fibré B' de fibre $(\mathbb{R}^l/V)/(\mathbb{Z}^l/\Pi)$ et de base B. De plus, B' est, par construction, un fibré trivial, donc un tore et E est bien un fibré principal en V/Π, qui est un tore de dimension strictement inférieure à l, sur un tore.

Lemme **6.1.1** *Deux fibrés semi-primitifs en tores sur des tores E_1 et E_2 sont homéomorphes si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

i) Leurs fibres, de même que leurs bases, ont mêmes dimensions.

ii) Les applications γ_1 et γ_2 sont équivalentes, c'est à dire qu'il existe un élément $P \in GL_k(\mathbb{Z})$ et un élément $Q \in GL_l(\mathbb{Z})$ tels que $\gamma_1 = Q \circ \gamma_2 \circ P$.

Preuve Supposons que deux fibrés semi-primitifs E_1 et E_2 en tores sur des tores soient homéomorphes. Alors, leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

Considérons un isomorphisme i entre $\pi_1(E_1)$ et $\pi_1(E_2)$. Alors, i induit un isomorphisme entre les groupes dérivés qui sont donc de même rang. D'après l'hypothèse de semi-primitivité, ce rang est égal à la dimension de la fibre. Ainsi, E_1 et E_2 ont des fibres de même dimension et comme ils ont même dimension, leurs bases ont aussi même dimension. Cela montre le i).

De même, i induit un isomorphisme au niveau de l'application commutateur, ce qui montre le ii).

Supposons maintenant que nous avons deux fibrés E_1 et E_2 vérifiant les conditions i) et ii).

Alors, il existe un isomorphisme i entre leurs groupes fondamentaux tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi_1(F_1) & \to & \pi_1(E_1) & \to & \pi_1(B_1) & \to & 0 \\ & & \downarrow Q & & \downarrow i & & \downarrow P & & \\ 0 & \to & \pi_1(F_2) & \to & \pi_1(E_2) & \to & \pi_1(B_2) & \to & 0 \end{array}$$

Il est clair qu'alors les groupes G_{γ_1} et G_{γ_2} sont isomorphes par un isomorphisme envoyant $\pi_1(E_1)$ sur $\pi_1(E_2)$. Ainsi, E_1 et E_2, qui sont les espaces homogènes correspondants, sont homéomorphes. $\square$

Remarquons en outre que si l'application $\check{\gamma}$, dont l'image est d'indice fini, n'est pas surjective, alors on peut prendre un revêtement $\hat{E}$ d'indice fini de E tel que l'application $\hat{\check{\gamma}}$ associée est surjective (il suffit de considérer le revêtement de E associé au sous-groupe de $\pi_1(E)$ qui est formé des éléments qui sont congrus modulo $[\pi_1(E), \pi_1(E)]$ à une "section" quelconque de la projection de $\pi_1(E)$ sur $\pi_1(B)$). De plus, deux tels revêtements sont homéomorphes.

Un fibré principal en tores sur un tore associé à une application $\check{\gamma}$ surjective sera dit primitif.

Réciproquement, tout fibré principal en tores sur un tore admet beaucoup de "quotients" finis (on les quotiente par l'action d'un sous-groupe fini de la fibre).

6.2 La classification

On cherche parmi ces fibrés ceux qui possèdent une structure complexe et qui, en même temps, supportent une action holomorphe de codimension 1 complexe, à feuilles denses. Nous obtiendrons le théorème suivant comme corollaire de la classification complexe de ces variétés que nous effectuerons dans les chapitres ultérieurs.

THÉORÈME **6.2.1** *Soit E un fibré primitif en tores (réels) F sur un tore (réel) B. On suppose que E possède une structure complexe de dimension $n+1$ et supporte une action holomorphe de $\mathbb{C}^n$ qui vérifie (C_d).*

Appelons l la dimension de F, k la dimension de B et γ l'application bilinéaire anti-symétrique de $\mathbb{Z}^k$ dans $\mathbb{Z}^l$ définissant le fibré E.

Pour i, j tels que $1 \leq i < j \leq k$, appelons $[i, j]$ l'application de $\mathbb{Z}^k$ dans $\mathbb{Z}$ telle que pour tout $x = (x_1, ..., x_k)$ et tout $x' = (x'_1, ..., x'_k)$, on ait :

$$[i, j](x, x') = x_i \cdot x'_j - x_j \cdot x'_i$$

Alors on a, à équivalence près, les possibilités suivantes :

i) $l = 0, k = 2n + 2$ pour tout $n \geq 1$.

ii) $l = 2, k = 2n, \gamma = ([1, 2], [1, 3])$ pour tout $n \geq 2$.

iii) $l = 2, k = 2n, \gamma = ([1, 2] + [3, 4], [1, 3] + [2, 4])$ pour tout $n \geq 2$.

iv) $l = 3, k = 2n - 1, \gamma = ([1, 2], [2, 3], [3, 1])$ pour tout $n \geq 3$.

v) $l = 4, k = 2n - 2, \gamma = ([1, 2], [3, 4], [1, 3] + [2, 4], [1, 4] - [2, 3])$ pour tout $n \geq 3$.

vi) $l = 6, k = 2n - 4, \gamma = ([1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4])$ pour tout $n \geq 4$.

Une autre question naturelle à se poser, surtout qu'on se sait en présence d'espaces homogènes, est de savoir si les actions considérées sont des actions homogènes réelles. La réponse tient dans la proposition suivante :

PROPOSITION **6.2.2** *Soit M une variété complexe de dimension $n+1$ supportant une action ϕ vérifiant (C_d). Alors ϕ est une action homogène réelle si et seulement si la variété réelle E sous-jacente à M est dans une des classes i) ou iii) du théorème 6.2.1.*

En particulier, l'homogénéité (réelle) de l'action ϕ ne dépend que de la variété réelle sous-jacente à M.

Preuve Nous allons étudier séparément, pour chaque cas de i) à v), si les actions correspondantes sont ou non homogènes.

Le cas i) ne pose pas de problème. En effet, il s'agit d'une action linéaire sur un tore complexe, donc une action homogène complexe, a fortiori homogène réelle.

Le cas iii) ne pose pas beaucoup plus de problèmes. En effet, comme nous le verrons (théorème 7.4.5 et proposition 7.4.4), certaines de ces actions sont homogènes complexes, donc homogènes réelles. Les autres sont isomorphes, en tant qu'actions réelles, à de telles actions, donc sont aussi homogènes réelles.

Les cas v) et vi) aussi sont très faciles. Si la variété M rentre dans ce cadre, il n'existe pas de sous-groupe de codimension 2 de $\tilde{M}$ qui soit commutatif. En effet, la projection d'un tel sous-groupe sur $\tilde{M}/Ker\,\gamma$ serait de codimension au plus 2 dans $\tilde{M}/Ker\,\gamma$, donc de dimension au moins 2. Or, deux éléments dont les projections sur $\tilde{M}/Ker\,\gamma$ sont linéairement indépendantes ne commutent pas (c'est clair sur la formule). Ainsi, l'action ϕ n'est pas une action homogène.

Restent les cas ii) et iv), les plus délicats. Dans ces deux cas, le centre Z de $\tilde{M}$ est de codimension égale à 3 et bien sûr tout sous-groupe de codimension 2 de $\tilde{M}$ contenant Z est commutatif. De plus, le groupe $Stab$ est un sous-groupe cocompact du groupe Z. Il reste donc à déterminer si l'action par $\tilde{\phi}$ d'un élément de $\mathbb{C}^n$ qui n'est pas dans le sous-espace vectoriel réel engendré par $Stab$ est ou non une multiplication dans $\tilde{M}$.

Plaçons nous dans le cas ii). Le noyau de l'application γ_{lin} est de codimension 3 dans $\mathbb{R}^k$ et possède $Stab/Stab \cap [\tilde{M}, \tilde{M}]$ comme sous-groupe cocompact. Considérons $\mathbb{R}^5$ comme la somme directe $\tilde{M}/Z \oplus [\tilde{M}, \tilde{M}]$ et munissons le d'une structure de groupe avec le produit suivant :

$$(x_1, ..., x_5) \cdot (x'_1, ..., x'_5) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3, x_4 + x'_4 + x_1 \cdot x'_2, x_5 + x'_5 + x_1 \cdot x'_3)$$

Ce groupe, qui sera noté H_5, est une extension centrale de $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}^2$ de classe γ_{lin}.

En conjuguant par une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans lui-même, on peut s'arranger pour que l'action de $\pi_1(M)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ soit engendrée par les automorphismes suivants :

Automorphismes de $Stab$:
$u_4 : (z_0, z_1, ..., z_n) \mapsto (z_0, z_1, ..., z_n + 1)$
$u_5 : (z_0, z_1, ..., z_n) \mapsto (z_0, z_1, ..., z_n + i)$
$t_{k,1} : (z_0, z_1, ..., z_n) \mapsto (z_0, ..., z_{k-1}, z_k + 1, z_{k+1}, ..., z_n), 2 \leq k \leq n - 1$
$t_{k,i} : (z_0, z_1, ..., z_n) \mapsto (z_0, ..., z_{k-1}, z_k + i, z_{k+1}, ..., z_n), 1 \leq k \leq n - 1$

Automorphismes hors de $Stab$:
$u_2 : (z_0, z_1, ..., z_n) \mapsto (z_0 + 1, z_1, ..., z_n)$
$u_3 : (z_0, z_1, ..., z_n) \mapsto (z_0 + i, z_1, ..., z_n)$
$u_1 : (z_0, z_1, ..., z_n) \mapsto (z_0 + \alpha, z_1 + 1, ..., z_n + z_0)$ où α est un nombre complexe tel que $1, \mathcal{R}\rceil(\alpha), \mathcal{I}\Updownarrow(\alpha)$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants.

On remarque que $\pi_1(M)$ se projette sur le sous-groupe $H_{\mathbb{Z}}$ de H_5 formé des éléments à coordonnées entières en envoyant chaque $t_{k,1}$ et $t_{k,i}$ sur 0 et en envoyant chaque u_i sur l'élément canonique de h_5 correspondant (c'est-à-dire en envoyant u_2 sur $(0,1,0,0,0)$, etc...). Ainsi, $\pi_1(M)$ agit naturellement sur H_5 par translations à droite.

On considère l'application suivante de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans H_5 :
$(z_0, ..., z_n) \mapsto (\mathcal{R}\rceil(\ddagger_\infty), \mathcal{R}\rceil(\ddagger_\prime) - \mathcal{R}\rceil(\alpha) \cdot \mathcal{R}\rceil(\ddagger_\infty), \mathcal{I}\Updownarrow(\ddagger_\prime) - \mathcal{R}\rceil(\ddagger_\infty) \cdot \mathcal{I}\Updownarrow(\alpha),$
$\mathcal{R}\rceil(\ddagger_\backslash) - \mathcal{R}\rceil(\ddagger_\infty) \cdot \mathcal{R}\rceil(\ddagger_\prime - \alpha), \mathcal{I}\Updownarrow(\ddagger_\backslash) - \mathcal{R}\rceil(\ddagger_\infty) \cdot \mathcal{I}\Updownarrow(\ddagger_\prime - \alpha))$.

On constate que cette application est équivariante par rapport aux actions naturelles de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$ et sur H_5.

Pour un réel r, regardons l'action de la translation dans $\mathbb{C}^n$:
$(z_0, ..., z_n) \mapsto (z_0, z_1 + r, z_2, ..., z_n)$ sur cette identification.

Cela donne l'application suivante : $(x_1, ..., x_5) \mapsto (x_1 + r, x_2 - r \cdot \mathcal{R}\rceil(\alpha), \S_\ni - \nabla \cdot \mathcal{I}\Updownarrow(\alpha),$
$\S_\triangle - \nabla \cdot \S_\in - \nabla \cdot \mathcal{R}\rceil(\alpha) \cdot \S_\infty + \nabla \cdot \mathcal{R}\rceil(\alpha), \S_\bigtriangledown - \nabla \cdot \S_\ni - \nabla \cdot \mathcal{I}\Updownarrow(\alpha) \cdot \S_\infty + \nabla \cdot \mathcal{I}\Updownarrow(\alpha))$.

On s'assure facilement qu'il ne s'agit pas d'une translation à gauche dans H_5. Ainsi, une action rentrant dans le cas ii) du théorème 6.2.1 n'est pas une action homogène réelle.

Le cas iv) se vérifie de manière analogue. $\square$

Nous en arrivons maintenant à l'étude plus précise des variétés complexes et des actions que nous cherchons. En fait, nous allons décomposer notre étude en deux parties, selon que M vérifie ou non une condition que nous allons expliciter et qui revient à demander que M soit revêtue par un fibré principal en $\mathbb{C}^n$ sur un tore de dimension 1, l'action principale correspondant au relevé de l'action ϕ.

Chapter 7

Cas où la variété vérifie la condition (H_+)

Dans tout ce chapitre, nous faisons l'hypothèse que l'application ϕ, qui vérifie déjà la condition (C_d), vérifie également la condition suivante :

(H_+) : Il existe deux éléments de $\pi_1(M)$ qui ont des holonomies $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes, et qui commutent.

Nous noterons h_1 et h_2 deux éléments de $\pi_1(M)$ satisfaisant la condition (H_+) ainsi que λ_1 et λ_2 leurs holonomies respectives. Nous allons d'abord montrer grâce à la formule (5.1) que le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est petit, puis nous en déduirons assez précisément la structure de M.

La force de la formule (5.1) nous est révélée notamment dans le lemme suivant :

LEMME **7.0.1** *Soit M sur variété complexe supportant une action vérifiant (C_d) et (H_+). alors, $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ "est" un sous-groupe discret cocompact d'un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension au plus 1 de $\mathbb{C}^n$.*

PREUVE On a déjà montré que $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ était un sous-groupe de *Stab*. Donc, c'est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}^n$.

De plus, comme tous les sous-groupes des groupes abéliens, il est cocompact dans le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel qu'il engendre. Montrons donc que le sous-$\mathbb{R}$-espace ainsi engendré est en fait un sous-$\mathbb{C}$ espace.

On refait alors la construction que nous avions faite dans le paragraphe 5.2. D'après la formule (5.1), on a : $[h_1, h_2] = \lambda_1 \cdot K_{h_2} - \lambda_2 \cdot K_{h_1}$. Or, $K_{h_1} = 0$. En effet, la section que nous avions prise comme origine est stable sous l'action de h_1. On en déduit alors immédiatement que $K_{h_2} = 0$.

Soit maintenant h un élément quelconque de $\pi_1(M)$. On a alors en appliquant à nouveau la formule (5.1) :

$$\lambda_2 \cdot ([h, h_1]) = \lambda_1 \cdot ([h, h_2])$$

Ainsi, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $[h, h_1]$ et $[h, h_2]$ contient le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les K_h. Toujours d'après la formule (5.1), ce dernier espace contient le groupe dérivé de $\pi_1(M)$.

Ainsi, tous ces espaces sont égaux. En particulier, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Nous noterons G' ce sous-espace. Montrons que G' est de dimension au plus 1.

Supposons que pour un certain couple (h, h') d'éléments de $\pi_1(M)$, on ait : $[h, h_1]$ et $[h', h_1]$ linéairement indépendants, alors : $[h, h_1]$, $[h', h_1]$, $[h, h_2]$, $[h', h_2]$ engendrent un réseau du $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les deux premiers. On doit ainsi avoir que $[h, h']$ appartient à ce réseau, car $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ doit être discret. Or, si un élément h de $\pi_1(M)$ ne commute pas avec h_1, son holonomie doit être $\mathbb{Z}$-linéairement indépendante de λ_1, λ_2.

Ainsi, $[h, h']$ doit être $\mathbb{Z}$-linéairement indépendant des autres. On aboutit alors à une contradiction.

Donc G' est au plus de dimension 1. $\square$

On fait alors deux cas suivant la dimension de G'.

7.1 Cas où G' est de dimension 0

Le cas où le groupe fondamental de M est commutatif est en fait très simple. On peut tout de suite énoncer et démontrer le :

THÉORÈME **7.1.1** *Soit M une variété complexe, compacte supportant une action ϕ qui vérifie (C_d). On fait l'hypothèse supplémentaire que le groupe fondamental de M est commutatif.*

Alors M est un tore complexe et ϕ est une action linéaire.

DÉMONSTRATION Le groupe fondamental de M étant commutatif, on a $K_h = 0$ pour tout élément h de $\pi_1(M)$. Ainsi, ce groupe agit sur $\tilde{M}$, que l'on a identifié avec $\mathbb{C}^{n+1}$, par translations globales. Ainsi, M est un tore complexe de dimension $n + 1$, et l'action ϕ initiale est une action linéaire. $\square$

Ce théorème s'applique en particulier lorsque l'action ϕ est une action libre (en effet, le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ s'identifie avec un sous-groupe de *Stab* et ce dernier est trivial).

Il est alors naturel de se demander si ce théorème admet une réciproque. La réponse, affirmative, tient dans la proposition suivante :

PROPOSITION **7.1.2** *Soit T un tore complexe de dimension $n+1$, de la forme $\mathbb{C}^{n+1}/R$. Alors, toute action linéaire de $\mathbb{C}^n$ sur T préserve la forme de volume canonique sur T (c'est-à-dire la forme volume dont le relevé à $\mathbb{C}^{n+1}$ est la forme de volume canonique de $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$). De plus, une telle action est génériquement libre et à orbites denses.*

PREUVE Nous avons déjà mentionné dans la proposition 5.2.7 que toute action linéaire sur un tore préservait la forme de volume canonique.

Considérons l une forme linéaire sur T dont le noyau est l'hyperplan de $\mathbb{C}^{n+1}$ correspondant à l'action considérée.

Alors l'action est libre si cet hyperplan ne rencontre pas le réseau R de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui définit T, c'est-à-dire, étant donné une base $x_1, ..., x_{2n+2}$ de R, si les $l(x_i)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. C'est évidemment une condition génériquement vérifiée.

De plus, l'action est à feuilles denses si et seulement si les $l(x_i)$ engendrent un sous-groupe dense de $\mathbb{C}$. C'est évidemment aussi une condition génériquement vérifiée.

La proposition est démontrée. $\square$

Cela termine l'étude du cas où G' est nul.

7.2 Cas où G' est de dimension 1. Introduction

On fait maintenant l'hypothèse que le groupe $\pi_1(M)$ n'est pas commutatif.

Dans ce paragraphe d'introduction, nous montrons d'abord que M est un fibré en tores de dimension 1 sur un tore, puis nous montrons que le stabilisateur de l'action ϕ doit être assez gros.

On obtient d'abord le résultat suivant :

PROPOSITION **7.2.1** *Soit M une variété complexe compacte, connexe supportant une action satisfaisant les hypothèses (C_d) et (H_+), mais dont le groupe fondamental n'est pas abélien. Alors M est un fibré holomorphe principal dont la fibre est un tore de dimension 1 et dont la base est un tore complexe.*

PREUVE Soit M une variété satisfaisant aux hypothèses de la proposition. D'après le lemme ci-dessus, le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ agit sur $\tilde{M}$ comme un réseau d'une droite complexe G' de $\mathbb{C}^n$.

De plus, les orbites de l'action de G' sont toutes identifiées à $G'/G' \cap Stab$. Donc, M est un fibré holomorphe en $G'/G' \cap Stab$ sur une variété M'. Mais $G'/G' \cap Stab$ est un tore complexe de dimension 1; en effet, $G' \cap Stab$ étant discret et contenant un réseau de G' est lui-même un réseau de G'.

Or, le groupe fondamental de cette variété M' est abélien et ϕ induit une action de $\mathbb{C}^n/G'$ sur M'. De plus, cette action est localement libre, de codimension 1, à feuilles denses, et est transversalement riemannienne.

D'après le théorème du paragraphe précédent, M' est un tore complexe (de dimension $n-1$), et donc M est un fibré principal en tores de dimension 1 sur un tore de dimension $n-1$. $\square$

En outre, il est clair que chaque fibre de ce fibré est incluse dans une orbite de ϕ.

Puis nous établissons le résultat suivant :

LEMME **7.2.1** *Sous les hypothèses (C_d) et (H_+), on peut dire que l'image de $\pi_1(M)$ par l'holonomie est un sous-groupe de rang 3 ou 4 du groupe (des translations de) $\mathbb{C}$.*

PREUVE On peut déjà dire que l'image de l'holonomie est de rang au moins 3 car, comme nous l'avons déjà mentionné, c'est un sous-groupe dense de $\mathbb{C}$.

De plus, le rang du groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est égal à 2. Soit h un élément de $\pi_1(M)$ tel que $K_h \neq 0$. Alors, $[h, h_1]$ et $[h, h_2]$ engendrent un groupe de rang 2.

Supposons qu'il existe un élément h' dont l'holonomie λ' soit $\mathbb{Z}$-linéairement indépendante des holonomies de h, h_1 et h_2.

On doit alors avoir $K'_h \neq 0$ sinon $[h, h'] = \lambda' \cdot K_h$ serait $\mathbb{Z}$-linéairement indépendant de $[h, h_1]$ et $[h, h_2]$.

Le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ qui, rappelons-le, est de rang 2 et inclus dans une droite complexe, contient les cinq éléments suivants :

$\lambda_1 \cdot K_h$, $\lambda_2 \cdot K_h$, $\lambda_1 \cdot K'_h$, $\lambda_2 \cdot K'_h$, et $\lambda \cdot K'_h - \lambda' \cdot K_h$.

En prenant $\lambda_1 \cdot K_h$ comme origine de cette droite, on trouve que le sous-groupe de $\mathbb{C}$ engendré par les cinq nombres complexes suivants : 1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\frac{K'_h}{K_h}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{K'_h}{K_h}$, et $\frac{\lambda}{\lambda_1} \cdot \frac{K'_h}{K_h} - \frac{\lambda'}{\lambda_1}$ doit être un réseau. Remarquons que l'expression $\frac{K'_h}{K_h}$ a un sens car K_h et K'_h sont des éléments non nuls de la même droite complexe G'.

On remarque en particulier, qu'un tel réseau n'est pas quelconque (c'est, à indice fini près, un réseau quadratique).

Il est alors facile de s'assurer qu'on ne peut plus avoir d'élément dans $\pi_1(M)$ dont l'holonomie soit indépendante des quatre précédents éléments. $\square$

Ainsi, on peut dire que si on n'est pas en présence d'une action linéaire sur un tore, alors le rang de l'holonomie est égal à 3 ou à 4, et d'autre part on se doute que le cas où l'holonomie est effectivement de rang 4 est exceptionnel.

Néanmoins, de telles actions existent et en voici un exemple : Reprenons la definition 1.1.6 de la première partie. Considérons R le sous-groupe de Nil formé des matrices de Nil dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ et appelons M le quotient Nil/R, qui est clairement une variété compacte.

Soit maintenant α un nombre irrationnel et soit G le sous-groupe de Nil formé des matrices $(a_{i,j})$ telles que $a_{1,2} = \alpha \cdot a_{2,3}$. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un sous-groupe de Nil isomorphe à $\mathbb{C}^2$, qui agit sur M par translations à gauche. Comme α est irrationnel les orbites sont denses dans M et on voit facilement que le noyau de l'holonomie est formé des seules translations par les éléments du centre de R. Ainsi, l'holonomie est de rang égal à 4. Et, comme le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est de rang 2, il est nécessaire qu'il y ait des éléments dont les holonomies soient $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes et qui commutent.

L'action que nous venons de décrire est homogène. Nous verrons au paragraphe 7.4.1 des actions non homogènes qui vérifient les mêmes hypothèses.

Intéressons-nous maintenant au problème réciproque : Etant donné une telle variété M, supporte-t-elle une action localement libre d'un groupe abélien? Plus précisément, fixons-nous M un fibré holomorphe en une courbe elliptique sur un tore de dimension n.

NB : Nous utiliserons souvent le terme courbe elliptique pour désigner un tore complexe de dimension 1 bien que cette terminologie soit discutable. En effet, seule la structure complexe de ce tore nous intéressera et non une quelconque structure algébrique.

On cherche à savoir s'il existe une action de $\mathbb{C}^n$ sur M, vérifiant (C_d). On demande en outre que chaque fibre du fibré M soit incluse dans une orbite de cette action (d'après ce qui précède, on peut toujours se ramener à ce cas là).

Un fibré principal en une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore T^n de dimension n est classé à biholomorphisme près par sa classe dans le $H^1(T^n, \mathcal{O}/*)$. Le groupe fondamental de M est quant à lui donné par une application bilinéaire antisymétrique $\gamma : \pi_1(T^n) \times \pi_1(T^n) \to \Lambda$ (application commutateur) qui correspond à une classe de $H^2(T^n, \Lambda)$, image de la classe précédente par le morphisme β du diagramme (D), classe que nous appellerons classe topologique du fibré M.

On peut tout de suite remarquer la chose suivante :

Proposition **7.2.2** *Le fait qu'il existe ou non une action de $\mathbb{C}^n$ ayant les propriétés recherchées ne dépend que de cette classe de $H^2(T^n, \Lambda)$.*

Preuve La preuve de ce fait est plutôt simple, car si deux fibrés ont même classe topologique, les classes du $H^1(T^n, \mathcal{O}/*)$ qui les définissent diffèrent uniquement par des constantes (toujours à cause de la surjectivité de l'application α).Une action de $\mathbb{C}^n$ donne n champs de vecteurs holomorphes qui sont en tout point linéairement indépendants et invariants sous l'action de la fibre. Il est facile de constater que ces n champs se "transposent" d'un fibré à l'autre et gardent les mêmes propriétés.

Plus précisément, considérons un système de cartes pour un certain fibré principal holomorphe en une courbe elliptique sur un tore. On demande que les cartes soient saturées pour la fibration et que les changement de carte commutent avec l'action principale de la courbe elliptique.

Considérons maintenant un autre fibré principal holomorphe en la même courbe sur le même tore possédant les mêmes cartes et dont les changements de cartes diffèrent des précédents par des constantes (c'est-à-dire obtenus à partir des précédents par composition par des actions d'éléments de la fibre).

Prenons maintenant un champ de vecteurs holomorphe sur le premier fibré qui soit invariant par l'action principale de la fibre (c'est d'ailleurs toujours le cas) et considérons ses coordonnées dans les premières cartes.

On peut alors lui associer un champ de vecteurs sur le second fibré qui possède les mêmes coordonnées dans les mêmes cartes. Cela vient du fait que les changements de carte ne différent que par des translations principales et que les translations principales laissent invariants les champs considérés.

De plus, ce nouveau champ possède les propriétés suivantes :

-Il est holomorphe (car il est localement égal au précédent).

-il est invariant par l'action principale de la fibre (pour la même raison).

-Les champs associés à deux champs de vecteurs qui commutent vont eux-même commuter (pour la même raison). □

7.3 Cas où G' est de dimension 1 et où l'holonomie est de rang 3

Commençons par nous demander s'il est possible que M supporte une action satisfaisant le conditions (C_d) et (H_+), et ayant de plus une holonomie de rang 3.

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème **7.3.1** *Soit M un fibré holomorphe principal en une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore T^n, biholomorphe à $\mathbb{C}^n/R$ où R est un réseau de $\mathbb{C}^n$.*

On suppose que l'image par l'application β de la classe de $H^1(T^n, \mathcal{O}/*)$ qui définit M est donnée par l'application bilinéaire antisymétrique $\gamma : R \times R \to \Lambda$.

Alors M supporte une action de $\mathbb{C}^n$ vérifiant (C_d) et (H_+) et dont l'holonomie est de rang égal à 3 si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Le noyau N de l'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire γ est un sous-groupe de R de rang $2n-3$.

(ii) N est inclus dans un hyperplan complexe H de $\mathbb{C}^n$.

(iii) La projection de H sur $T^n = \mathbb{C}^n/R$ est dense dans T^n.

Démonstration Montrons d'abord que si M supporte une action ayant les propriétés requises, alors M vérifie (i),(ii), et (iii).

Montrons d'abord (i) :

On peut d'abord dire que R, le groupe fondamental de T^n, est le quotient de $\pi_1(M)$ par son groupe dérivé. Dans ce cas, l'image réciproque de N par la projection canonique de $\pi_1(M)$ sur R est le centre de $\pi_1(M)$, et ce par définition de γ. On doit ainsi avoir $rg(N) + rg(\Lambda) = rg(Z(\pi_1(M)))$. Autrement dit $rg(N) + 2 = 2n - 1$. On a donc bien $rg(N) = 2n - 3$.

Montrons (ii) :

On va chercher l'espace tangent à une orbite de ϕ en un point x de M. Comme nous l'avons rappelé, la fibre (du fibré M) passant par x est incluse dans l'orbite de x. Donc, l'espace tangent à la fibre doit être inclus dans l'espace tangent à l'orbite.

Reste à trouver l'espace tangent à la projection sur T^n des orbites de ϕ. L'espace tangent à T^n en la projection de x s'identifie à $\mathbb{C}^n$ et l'espace qu'on recherche en est un hyperplan.

Considérons un élément de N. Il engendre une droite de $\mathbb{C}^n$ qui doit être incluse dans l'espace cherché. Il est donc nécessaire qu'il y ait un hyperplan H de $\mathbb{C}^n$ qui contienne N, H étant l'espace tangent à la projection sur T^n des orbites de ϕ. On a donc montré (ii).

On en déduit facilement (iii). En effet, comme nous venons de le dire, la projection de H sur T^n s'identifie avec la projection sur T^n de l'orbite de x. Comme l'orbite de x est dense dans M, la projection de H sur T^n est également dense dans T^n.

Montrons maintenant la réciproque : Si M vérifie (i),(ii), et (iii), alors M supporte une action de $\mathbb{C}^n$ ayant les propriétés demandées.

Pour ce faire, regardons le groupe fondamental de M et son action sur $\tilde{M}$. Nous appellerons p la projection naturelle de $\pi_1(M)$ sur $\pi_1(T^n)$.

M est donné comme nous l'avons dit par une classe de cohomologie du $H^1(T, \mathcal{O}/*)$. Plus précisément, M est un fibré principal en une courbe elliptique sur un tore complexe de dimension n. Donc M admet un revêtement que nous noterons $\bar{M}$ qui est un fibré principal en une courbe elliptique sur $\mathbb{C}^n$. Un tel fibré est trivial, car $\mathbb{C}^n$ est une variété de Stein contractile, donc $\bar{M}$ s'identifie à $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}/\Lambda$.

Regardons l'action d'un élément h de $\pi_1(M)$ sur $\bar{M}$, ou plutôt de l'élément $p(h)$ (qui est dans $\pi_1(T^2) \simeq \pi_1(M)/\pi_1(\bar{M})$). Cette action est de la forme suivante :

$$(z_1, ..., z_n, z) \to (z_1 + h_1, ..., z_n + h_n, z + c_h(z_1, ..., z_n))$$

où la dernière coordonnée est dans $\mathbb{C}/\Lambda$. En changeant l'identification de $\bar{M}$ avec $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}/\Lambda$, nous pouvons changer la fonction c_h. Nous allons chercher une identification qui rende agréable l'expression de ces fonctions.

Lemme **7.3.1** *Tout fibré principal en une courbe elliptique sur un tore complexe peut être défini par des fonctions c affines.*

Preuve Il suffit de définir ces fonctions une à une en s'assurant qu'elles sont affines à chaque étape. Comme nous l'avons rappelé, la classe topologique d'un fibré défini de la sorte se lit sur les commutateurs des biholomorphismes que nous considérons et si deux fibrés ont la même classe topologique et que l'un est défini par les fonctions c_1, alors l'autre peut être défini par des fonctions c_2 qui ne diffèrent des précédentes que par des constantes. Il suffit donc de vérifier qu'on ne change pas les commutateurs des fonctions lorsqu'on les modifie.

Supposons donc qu'un fibré E soit défini par des fonctions c'. On cherche un fibré E' qui soit dans la même classe topologique que E et qui soit défini par des fonctions c affines.

Prenons une base $\lambda_i, 1 \leq i \leq 2n$ de $\pi_1(T^n)$. Soit $k \in \{1, ..., 2n\}$ et supposons que nous ayons défini $c_1, ..., c_{k-1}$, affines et telles que les commutateurs des fonctions $h_1, ..., h_{k-1}$ correspondantes sont ceux qu'on veut. Montrons qu'on peut alors trouver c_k.

On peut définir un revêtement du quotient de $\bar{M}$ par l'action du groupe engendré par les $h_i, 1 \leq i \leq k-1$ sur un fibré en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T^n, topologiquement équivalent à M. Ce revêtement possède un automorphisme que nous noterons h_k de la forme $(z_1, ..., z_n, z) \to ((z_1, ..., z_n) + \lambda_k, z + g_k(z_1, ..., z_n))$.

On cherche donc à remplacer g_k par une fonction affine c_k de telle sorte de ne pas changer les commutateurs avec les fonctions $h_1, ..., h_{k-1}$. On cherche c_k de la forme : $c_k(z_1, ..., z_n) = L_k(z_1, ..., z_n) + C^{ste}$ où L_k est une forme linéaire sur $\mathbb{C}^k$. Appelons l_k l'application $(z_1, ..., z_n, z) \to ((z_1, ..., z_n) + \lambda_k, z + c_k(z_1, ..., z_n))$.

Calculons les commutateurs, pour $q < k$:

$$[l_k, h_q] = c_k(Z + \lambda_q) + c_q(Z) - c_q(Z + \lambda_k) - c_k(Z)$$

Comme on souhaite que $[l_k, h_q] = [h_k, h_q]$, cette quantité doit être indépendante de Z. Ainsi, comme $c_q(Z) - c_q(Z + \lambda_k)$ est constant car c_q est affine, il est nécessaire que $c_k(Z + \lambda_q) - c_k(Z)$ soit indépendant de Z, et la valeur de cette expression est imposée.

Ainsi, considérons de $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les $\lambda_j, j < k$ et prenons-en une base de la forme $\lambda_i, i \in I \subset \{1, ..., k-1\}$.

La valeur de L_k sur les éléments de cette base est imposée par la valeur des commutateurs $[l_k, h_q], q \in I$. Prenons donc pour L_k une forme linéaire quelconque sur $\mathbb{C}^n$ prenant les valeurs imposées sur $\mathbb{C}^I$. Prenons c_k une application affine correspondant à L_k (la valeur de la constante importe peu) et l_k l'automorphisme de $\bar{M}$ correspondant.

Comparons alors les commutateurs $[l_k, h_q]$ et $[h_k, h_q]$. On a pour tout $q < k$:

$$[l_k, h_q] - [h_k, h_q] = c_k(Z + \lambda_q) - c_k(Z) - h_k(Z + \lambda_q) + h_k(Z)$$

Considérons $f_k = l_k - h_k$. Comme par définition de L_k on a $[l_k, h_q] = [h_k, h_q]$ si $q \in I$, f_k est invariante par les $\lambda_i, i \in I$. De plus, pour tout $q < k$, on a $f_k(Z+\lambda_q) - f_k(Z) \equiv C^{ste}$.

Comme f_k est holomorphe et que λ_q est dans le $\mathbb{C}$-espace engendré par les $\lambda_i, i \in I$, on a nécessairement $f_k(Z + \lambda_q) - f_k(Z) \equiv 0$. Ainsi, on a bien que, pour tout $q < k$, $[l_k, h_q] = [h_k, h_q]$.

On en déduit immédiatement que le quotient de $\bar{M}$ par $< h_1, ..., h_{k-1}, l_k >$ revêt bien un fibré en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T^n qui est dans la même classe topologique que M. En particulier, si $k = 2n$, on a bien défini un tel fibré par des fonctions affines. Cela termine la preuve du lemme. □

Ainsi, on peut s'arranger pour que toutes les fonctions c_h que nous choisissons soient affines. On peut même s'arranger pour que les fonctions c_h correspondant aux éléments h de $p^{-1}(N)$ soient constantes.

Considérons alors que M est définie par de telles fonctions. Il est clair qu'alors les champs de vecteurs donnés, pour un élément h de N par

$$X = \sum_{i \leq n} h_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

passent au quotient sur M et commutent. On peut alors en choisir $n-1$ qui sont linéairement indépendants en tout point. De plus, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z}$ commute avec tous ces champs et en est en tout point linéairement indépendant . On obtient ainsi une action localement libre de $\mathbb{C}^n$ sur M. De plus, il est clair que cette action préserve la forme de volume canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$.

De plus, par construction de nos $n-1$ champs de vecteurs, N est inclus dans le noyau de l'holonomie. Donc le rang de l'holonomie est au plus 3. En outre, comme la projection sur la base de M de l'hyperplan H contenant N est dense, cette holonomie est de rang au moins 3. L'holonomie est donc exactement de rang 3 et son noyau est exactement N.

Ainsi, deux éléments h_1 et h_2 de R dont les projections sur R/N sont indépendantes et tels que $\gamma(h_1, h_2) = 0$ fournissent deux éléments de $\pi_1(M)$ d'holonomies indépendantes et qui commutent.

L'action ϕ possède donc toutes les propriétés requises par le théorème. $\square$

Nous sommes maintenant capables de repérer les actions qui vérifient les hypothèses que nous avons imposées. Reste maintenant à construire de telles actions. Le théorème suivant nous montre que les actions que nous cherchons existent, qu'il y en a même beaucoup, et comment on les construit.

Théorème **7.3.2** *Soit $T = \mathbb{C}^n/R$ un tore complexe, où R est un réseau de $\mathbb{C}^n$. Soit γ une application bilinéaire antisymétrique : $R \times R \to \mathbb{Z}^2$. On suppose que γ possède les trois propriétés suivantes :*

(i) Le noyau N de l'application γ est un sous-groupe de R de rang $2n - 3$.

(ii) N est inclus dans un hyperplan complexe H de $\mathbb{C}^n$.

(iii) La projection de H sur $T^n = \mathbb{C}^n/R$ est dense dans T^n.

Alors il existe une unique courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ et un isomorphisme $\Lambda \tilde{\leftrightarrow} \mathbb{Z}^2$ ayant la propriété suivante :

Soit M un fibré principal en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T dont la classe dans le $H^2(T, \Lambda)$ correspond à γ. Alors il existe une action de $\mathbb{C}^n$ sur M vérifiant (C_d).

De plus, pour une telle action, le rang de l'holonomie est égal à 3 et (H_+) est vérifiée.

Démonstration Soit $T = \mathbb{C}^n/R$ un tore complexe et γ une application de $R \times R$ dans $\mathbb{Z}^2$ vérifiant les propriétés (i), (ii), et (iii).

Le morphisme γ passe au quotient de R par N en une application bilinéaire antisymétrique de $R/N \times R/N$ dans $\mathbb{Z}^2$ que nous noterons $\tilde{\gamma}$. Or, d'après la propriété (i) de γ, R/N est un $\mathbb{Z}$-module de rang 3. De plus, ce module est sans torsion.

Ainsi, $R/N \simeq \mathbb{Z}^3$ et $\tilde{\gamma}$ est une application bilinéaire antisymétrique à noyau trivial de $\mathbb{Z}^3$ dans $\mathbb{Z}^2$. On montre aisément qu'il existe un unique sous-module Π de rang 2 de R/N, tel que le quotient de R/N par Π soit sans torsion, et tel que la restriction de $\tilde{\gamma}$ à $\Pi \times \Pi$ soit nulle. Nous appellerons h_1 et h_2 deux éléments de Π formant une base.

Considérons alors H l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ qui contient N. Alors, $H \cap R = N$. En effet, dans le cas contraire il y aurait un élément r de R qui ne serait pas dans N. Comme R/N est sans torsion, r serait $\mathbb{Z}$-linéairement indépendant de N. Ainsi, $H \cap R$ serait un sous-groupe discret de rang $2n-2$ de H, donc un réseau de H. Cela contredirait le point (iii).

Appelons l la forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$, de noyau H et telle que $l(h_1)=1$. Alors, $l(h_2)$ n'est pas dans $\mathbb{R}$. En effet, si $l(h_2)$ était réel, la forme $\mathbb{R}$-linéaire $Im \circ l$ serait nulle sur $N \oplus \Pi$ (où on désigne par $N \oplus \Pi$ l'image réciproque de Π pa la projection de R sur R/N). Or, $R/(N \oplus \Pi)$ est un groupe de rang 1. Ainsi, la forme $Im \circ l$ ne prendrait que des valeurs discrètes sur R. Cela contredirait à nouveau le point (iii).

Appelons Λ_0 le réseau de $\mathbb{C}$ engendré par 1 et $l(h_2)$. On identifie $\mathbb{Z}^2$ avec un réseau Λ de $\mathbb{C}$ contenant Λ_0 de la façon suivante : Soit h_3 un élément de R/N tel que (h_1, h_2, h_3) forment une base. Envoyons $\tilde{\gamma}(h_1, h_3)$ sur 1 et $\tilde{\gamma}(h_2, h_3)$ sur $l(h_2)$. On finit de définir $\tilde{\gamma}$ en prolongeant par $\mathbb{Z}$-linéarité et on obtient ainsi une identification de $\mathbb{Z}^2$ avec un sous-groupe de $\mathbb{C}$ qui contient Λ_0 comme sous-groupe d'indice fini. C'est donc un réseau de $\mathbb{C}$ que nous appellerons Λ.

On cherche M sous la forme d'un fibré principal en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T^n. Le revêtement universel d'une telle variété est biholomorphe à un fibré holomorphe en $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^n = \tilde{T}$. Un tel fibré étant nécessairement holomorphiquement trivial, on peut identifier $\tilde{M}$ à $\mathbb{C}^{n+1}$. On demande alors que le relevé à $\tilde{M} = \mathbb{C}^{n+1}$ de l'action ϕ cherchée soit l'action de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par translations sur les n dernières coordonnées.

Cherchons alors le groupe fondamental de M comme un groupe de biholomorphismes de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Considérons les fonctions t_μ de la forme $(z_0, ..., z_n) \to (z_0, ..., z_{n-1}, z_n + \mu)$ pour tout μ de Λ. Ce sont clairement des biholomorphismes de $\mathbb{C}^{n+1}$.

D'autre part, étant donné un système de générateurs $t_i, 1 \leq i \leq 2n$ de R tel que les $t_i, 4 \leq i \leq 2n$ engendrent N et tel que les projections de t_1 et t_2 sur R/N soient h_1 et h_2, considérons les

$$f_i \ : (z_0, ..., z_n) \to ((z_0, ..., z_{n-1}) + t_i, z_n + \gamma(t_1, t_i) \cdot z_0)$$

Il s'agit encore clairement de biholomorphismes de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Appelons π_1 le groupe engendré par les $t_\mu (\mu \in \Lambda)$ et les f_i. Appelons π' le sous-groupe de π_1 constitué des éléments de la forme t_μ.

Nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme **7.3.2** *Le groupe π_1 agit librement et proprement discontinûment sur $\mathbb{C}^{n+1}$.*

Preuve Le groupe π_1 étant discret, nous cherchons à montrer que pour tout compact K de $\mathbb{C}^{n+1}$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments h de π_1 tels que $K \cap h(K) \neq \emptyset$. On se fixe donc K une partie compacte de $\mathbb{C}^{n+1}$ et on appelle S_K l'ensemble des éléments de π_1 pour lesquels K rencontre son image.

Rappelons que π_1 se projette sur R grâce au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{C}^{n+1} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{R} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

où p est la fibration $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ par omission de la dernière coordonnée.

Ainsi, la projection de K sur $\mathbb{C}^n$ étant compacte, et R agissant proprement discontinûment sur $\mathbb{C}^n$, l'image de la projection de S_K sur R est finie. Reste à voir que l'ensemble des éléments de S_K qui se projettent sur un élément donné de R est fini.

Soit h un élément de S_K et r sa projection sur R. Appelons p_{n+1} l'application $(n+1)$ème coordonnée sur $\mathbb{C}^{n+1}$. Alors, les ensembles $p_{n+1}(K)$ et $p_{n+1}(h(K))$ sont bornés et si un élément h' de S_K se projette sur R, la différence $h' \circ h^{-1}$ est une translation suivant la dernière coordonnée de $\mathbb{C}^{n+1}$ de longueur inférieure à $diam(p_{n+1}(K)) + diam(p_{n+1}(h(K)))$. Or, le noyau de la projection de π_1 sur R est un groupe discret de translations. Il ne possède qu'un nombre fini d'éléments dont la longueur de la translation correspondante est bornée par ce qu'on souhaite. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments de S_K qui se projettent sur un élément fixé de R.

Cela termine la preuve du lemme. $\square$

Fin de la démonstration du théorème :

Le groupe π_1 agissant librement et proprement discontinûment sur $\mathbb{C}^{n+1}$, l'espace des orbites est une variété M, holomorphe, dont le revêtement universel est $\mathbb{C}^{n+1}$. De plus, comme l'action de π_1 commute avec l'action de $\mathbb{C}^n$, cette action se projette en une action de $\mathbb{C}^n$ sur M.

De même, comme l'action de π_1 commute avec la fibration de $\mathbb{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{C}^n$, et que l'action de π_1 sur $\mathbb{C}^n$ composée est une action faite de translations par des éléments de R, M fibre sur T^n. La fibre de ce fibré est le quotient d'une fibre de la fibration de $\mathbb{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{C}^n$ par le sous-groupe de π_1 qui envoie chaque fibre sur elle-même, c'est-à-dire le groupe π'.

Ainsi, on peut dire que la fibre de la fibration de M sur T^n est $\mathbb{C}/\Lambda$. De plus, ce fibré est principal car l'action de π_1 commute avec l'action de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par translation sur la dernière coordonnée. En outre, d'après la définition des f_i, il est clair que la classe de ce fibré dans le $H^2(T^n, \Lambda)$ est égale à γ.

Enfin, l'action de $\mathbb{C}^n$ sur M est localement libre, de codimension 1, à feuilles denses d'après le point (iii), et préserve la forme de volume sur M issue de la forme volume habituelle de $\mathbb{C}^{n+1}$. En effet, d'après la proposition 5.2.7, l'action de $\mathbb{C}^n$ par translations ainsi que l'action de π_1 sur $\mathbb{C}^{n+1}$ préservent cette forme de volume.

Comme d'après la proposition 7.2.2, l'existence d'une action ayant les propriétés précédentes sur un fibré en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T^n ne dépend que de la classe de ce fibré dans $H^2(T^n, \Lambda)$, on a bien démontré l'existence d'une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ satisfaisant au théorème.

Reste à en montrer l'unicité.

Plaçons nous donc sous les hypothèses du théorème et soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions imposées par le théorème. Reprenons les mêmes notations que précédemment pour Π, h_1, h_2 et l.

Soit M un fibré holomorphe en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T^n dont la classe dans le $H^2(T^n, \Lambda \simeq \mathbb{Z}^2)$ est égale à γ. D'après la formule (5.1), il est nécessaire d'avoir, pour tout h dans R/N,

$$\tilde{\gamma}(h, h_2) = l(h_2) \cdot \tilde{\gamma}(h, h_1)$$

Cela vaut en particulier pour un h_3 tel que (h_1, h_2, h_3) forme une base de R/N. Ainsi, en prenant un tel h_3 et en supposant que $\tilde{\gamma}(h_3, h_1) = 1$ (ce qu'on peut toujours supposer car Λ n'est défini qu'à une constante multiplicative complexe près), on a nécessairement $\tilde{\gamma}(h_3, h_2) = l(h_2)$. Comme l'identification entre $\mathbb{Z}^2$ et Λ est $\mathbb{Z}$-linéaire, l'image de $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire Λ est uniquement définie.

Cela entraîne l'unicité de la courbe elliptique et ainsi termine la démonstration du théorème. $\square$

Remarque **7.3.3** De telles actions ne sont pas des actions homogènes complexes. $\triangleright$

En effet, supposons qu'une telle action soit homogène. C'est alors, d'après la proposition 1.1.1 de la prmière partie, une action d'un sous-groupe de codimension 1 de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ sur une variété M qui est le quotient de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ par un réseau Γ.

Le rang de l'intersection de Γ avec G est égal à $2n - 1$. Il existe donc un élément γ de $\Gamma \cap G$ qui n'est pas dans le centre de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$. Le centralisateur de γ dans $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ ne peut alors être que G. Ainsi, le rang du groupe $[\gamma, \Gamma]$ est égal au rang de $\Gamma/\Gamma \cap G$, c'est-à-dire 3.

On en déduit que $\Gamma/\Gamma \cap G$ est un sous-groupe discret de rang 3 du groupe dérivé de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$, qui est une droite complexe. On aboutit donc à une contradiction, ce qui démontre notre remarque.

7.4 Cas où G' est de dimension 1 et où l'holonomie est de rang 4

Regardons maintenant si un fibré holomorphe principal en une courbe elliptique sur un tore de dimension n peut supporter une action de $\mathbb{C}^n$ avec une holonomie de rang 4.

Soit M un fibré holomorphe en une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore $T^n = \mathbb{C}^n/R$ de dimension n. Soit γ l'application de $R \times R$ dans Λ qui définit la classe topologique de M dans $H^2(T^n, \Lambda)$.

D'après le lemme 5.3.1, le fait que l'holonomie de l'action qu'on recherche soit de rang 4 équivaut au fait que le rang du noyau de cette application γ soit égal à $2n-4$.

Or, un sous-groupe de $\mathbb{C}^n$ de rang $2n-4$ peut ou non être inclus dans un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de codimension 2 de $\mathbb{C}^n$. On traitera séparément les deux cas.

7.4.1 Cas où le stabilisateur de l'action n'est pas inclus dans un hyperplan

Dans ce paragraphe, on fait l'hypothèse que le noyau de l'application γ définissant la classe topologique du fibré M n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{C}^n$.

Curieusement, ce cas ressemble beaucoup au cas d'une action où l'holonomie est de rang égal à 3. En particulier, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème **7.4.1** *Soit M un fibré holomorphe principal en une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore T^n, biholomorphe à $\mathbb{C}^n/R$ où R est un réseau de $\mathbb{C}^n$.*

On suppose que la classe topologique de M est donnée par l'application bilinéaire antisymétrique $\gamma : R \times R \to \Lambda$.

Alors M supporte une action de $\mathbb{C}^n$ vérifiant (C_d), (H_+), dont l'holonomie est de rang égal à 4 et dont le stabilisateur n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Le noyau N de l'application γ est un sous-groupe de R de rang $2n-4$.

(ii) N est inclus dans un unique hyperplan complexe H de $\mathbb{C}^n$.

(iii) La projection de H sur $T^n = \mathbb{C}^n/R$ est dense dans T^n.

La démonstration de ce théorème est essentiellement la même que la démonstration du théorème 7.3.1.

On peut se demander si on a également l'analogue du théorème 7.3.2 dans le cas des actions à holonomie de rang 4. En réalité, d'après ce que nous avons dit précédemment, on se doute bien qu'il n'y aura pas toujours existence de la courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$. Néanmoins, l'unicité sera encore vérifiée :

Proposition **7.4.2** *Soit $T = \mathbb{C}^n/R$ un tore complexe, où R est un réseau de $\mathbb{C}^n$. Soit γ une application bilinéaire antisymétrique : $R \times R \to \mathbb{Z}^2$. On suppose que γ possède les trois propriétés suivantes :*

(i) Le noyau N de l'application γ est un sous-groupe de R de rang $2n-4$.

(ii) N est inclus dans un unique hyperplan complexe H de $\mathbb{C}^n$.

(iii) La projection de H sur $T^n = \mathbb{C}^n/R$ est dense dans T^n.

Alors il existe au plus une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ et une identification $\Lambda \xleftrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2$ ayant la propriété suivante :

Soit M un fibré principal en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T dont la classe dans le $H^2(T,\Lambda)$ correspond à γ. Alors il existe une action de $\mathbb{C}^n$ sur M vérifiant (C_d).

Donnons maintenant l'exemple d'une action de $\mathbb{C}^3$ qui possède les propriétés demandées.

Considérons les huit transformations suivantes de $\mathbb{C}^4$:

$$\begin{array}{ll}
t_{3,1} : (z,z_1,z_2,z_3) \to & (z,z_1,z_2,z_3+1) \\
t_{3,i} : (z,z_1,z_2,z_3) \to & (z,z_1,z_2,z_3+i) \\
t_{2,1} : (z,z_1,z_2,z_3) \to & (z,z_1,z_2+1,z_3) \\
t_{1,i} : (z,z_1,z_2,z_3) \to & (z,z_1+i,z_2,z_3) \\
t_{0,1} : (z,z_1,z_2,z_3) \to & (z+1,z_1,z_2,z_3) \\
t_{0,i} : (z,z_1,z_2,z_3) \to & (z+i,z_1,z_2,z_3) \\
u_{2,i} : (z,z_1,z_2,z_3) \to & (z+\pi,z_1,z_2+i,z_3+z) \\
u_{1,1} : (z,z_1,z_2,z_3) \to & (z+i\pi,z_1+1,z_2,z_3+i\cdot z)
\end{array}$$

Appelons π_1 le groupe engendré par ces huit transformations. Il est clair qu'il s'agit d'un groupe de biholomorphismes de $\mathbb{C}^4$.

Lemme **7.4.1** *L'action de π_1 sur $\mathbb{C}^4$ est une action libre, proprement discontinue, et ses orbites sont cocompactes dans $\mathbb{C}^4$.*

Preuve Calculons les commutateurs entre les générateurs du groupe π_1.

On s'aperçoit très vite que les quatre premiers cités sont centraux dans π_1. Pour les autres, on a les commutateurs suivants :

$$[t_{0,1}, t_{0,i}] = [u_{2,i}, u_{1,1}] = 0$$

$$[t_{0,1}, u_{1,1}] = [t_{0,i}, u_{2,i}] = t_{3,i}$$

$$[t_{0,1}, u_{2,i}] = [u_{1,1}, t_{0,i}] = t_{3,1}$$

Ainsi, le groupe dérivé de π_1 est exactement le groupe engendré par $t_{3,1}$ et $t_{3,i}$. Ce groupe sera noté π'.

En outre, nous noterons Z le groupe engendré par π', $t_{2,1}$ et $t_{1,i}$, qui n'est autre que le centre de π_1.

On remarque que l'action du groupe π_1 préserve la fibration de $\mathbb{C}^4$ sur $\mathbb{C}^3$ par omission de la dernière coordonnée.

La démonstration du fait que l'action de π_1 sur $\mathbb{C}^4$ est libre et proprement discontinue est alors tout à fait analogue à la démonstration du lemme 7.3.2.

Le fait que les orbites soient cocompactes provient du fait que l'image du morphisme de π_1 dans le groupe des translations de $\mathbb{C}^3$ (l'analogue du R du lemme 7.3.2) est cocompacte et du fait que π' est cocompact dans le groupe des translations de $\mathbb{C}^4$ qui préservent les trois premières coordonnées. □

Appelons alors M l'espace quotient de $\mathbb{C}^4$ par l'action de π_1. C'est une variété holomorphe de dimension 4 et de groupe fondamental π_1.

Tous les générateurs du groupe π_1 commutent avec l'action de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{C}^4$ par translations sur les trois dernières coordonnées. Il en est donc de même pour tous les éléments de π_1. Cette action descend donc en une action holomorphe ϕ de $\mathbb{C}^3$ sur M.

Reste à voir que ϕ vérifie bien toutes les propriétés requises.

Il est clair que c'est une action localement libre, de codimension 1. Il est clair que le rang de l'holonomie est égal à 4 (l'image de l'holonomie est engendrée par 1, i, π, et $i\pi$), et que *Stab* n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{C}^3$ (puisqu'il contient $(i, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$). Les orbites de ϕ sont denses dans M car l'image de l'holonomie est dense dans $\mathbb{C}$. Enfin, d'après la proposition 5.2.7, il existe une forme de volume sur M invariante par l'action.

En définitive, ϕ satisfait bien toutes les conditions demandées, ce qui montre l'existence de telles actions.

Remarque **7.4.3** De telles actions ne sont pas des actions homogènes de $\mathbb{C}^n$. ▷

En effet, si une telle action était une action homogène de $\mathbb{C}^n$, M serait, d'aprè la proposition 1.1.1, un espace homogène de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$. Or, tout sous-groupe commutatif de codimension 1 de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ en contient le centre, et l'intersection du centre de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ avec un réseau quelconque de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ en est un réseau.

Ainsi, le stabilisateur d'une action de $\mathbb{C}^n$ sur un espace homogène de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ est un réseau d'un hyperplan de $\mathbb{C}^n$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur les actions étudiées dans ce paragraphe.

Nous avons néanmoins la proposition suivante, que nous avons annoncée au chapitre 6 :

Proposition **7.4.4** *Soit M une variété complexe compacte supportant une action de $\mathbb{C}^n$ vérifiant (C_d) et (H_+). On suppose de plus que le rang de l'holonomie est égal à 4 et que le stabilisateur de l'action n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{C}^n$. Alors il existe une structure complexe sur la variété réelle sous-jacente à M et une structure de groupe de Lie complexe (isomorphe à $\mathbb{C}^n$) sur le groupe de Lie réel sous-jacent à G pour lesquelles l'action ϕ est holomorphe, vérifie (C_d) et (H_+) et a un stabilisateur inclus dans un hyperplan de G (le nouveau groupe est identifié avec $\mathbb{C}^n$).*

Preuve Nous allons changer la structure complexe sur G, qui est identifié à $\mathbb{R}^{2n}$. Pour mettre une structure de groupe de Lie complexe isomorphe à $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, il suffit de se donner un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^{2n}$ ayant pour carré $-Id$. Appelons J l'automorphisme induit par la structure complexe précédente de G (identifiée avec la structure canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Appelons V le sous-espace vectoriel réel engendré par $Stab$. Construisons (c'est facile à faire) un automorphisme linéaire J' de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $J'^2 = -Id$.
ii) $J'|_{G'} = J|_{G'}$. (Rappelons que G' est l'espace de dimension réelle égale à 2 engendré par le groupe dérivé de $\pi_1(M)$).
iii) Le sous-espace V est stable par J'.

Modifions maintenant la structure complexe de $\tilde{M} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$. Il suffit pour cela de se donner un automorphisme $\mathcal{J}'$ de $\mathbb{R}^{2n+2}$ de carré $-Id$. Appelons donc $\mathcal{J}'$ l'automorphisme de $\mathbb{R}^{2n+2}$ pour lequel :

$$\mathcal{J}'(\S_{/}, \dagger_{/}, \S_{\infty}, \dagger_{\infty}, ..., \S_{\backslash}, \dagger_{\backslash}) = (-\dagger_{/}, \S_{/}, \mathcal{J}'(\S_{\infty}, \dagger_{\infty}, ..., \S_{\backslash}, \dagger_{\backslash}))$$

Cet automorphisme munit $\tilde{M}$ d'une structure complexe et l'action $\tilde{\phi}$ de (G', J') sur $(\tilde{M}, \mathcal{J}')$ est, par construction, holomorphe.

Lemme **7.4.2** *L'action naturelle de $\pi_1(M)$ sur $(\tilde{M}, \mathcal{J}')$ est constituée de biholomorphismes.*

Preuve Appelons G_0, qui est canoniquement identifié à G, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n+2}$ formé des éléments ayant leurs deux premières coordonnées nulles. Comme nous l'avons déjà dit, l'action sur $\tilde{M}$ d'un élément de $\pi_1(M)$ est une application affine. Dire que c'est un biholomorphisme revient à dire que l'application linéaire sous-jacente est $\mathbb{C}$-linéaire. Or, l'application linéaire sous-jacente est une application dont le noyau contient G_0, dont l'image est dans G', et qui est $\mathbb{C}$-linéaire pour la structure complexe canonique de $\mathbb{R}^{2n+2}$. Elle est alors $\mathbb{C}$-linéaire pour la structure $\mathcal{J}'$ car les structures complexes induites par la structure canonique et $\mathcal{J}'$ coïncident sur G' (d'après la propriété ii) de J') ainsi que sur $\tilde{M}/G_0$ (d'après la formule définissant $\mathcal{J}'$). $\square$

On en déduit que $\mathcal{J}'$ induit bien une structure complexe sur M. Montrons que l'action ϕ vérifie toutes les conditions recherchées (pour les nouvelles structures complexes).

C'est une action holomorphe car l'action $\tilde{\phi}$ est holomorphe (pour les nouvelles structures complexes). Il est alors clair qu'elle vérifie (C_d). On remarque de plus que la représentation d'holonomie n'a pas été modifiée. Ainsi, ϕ vérifie (H_+) et le rang de l'holonomie est encore égal à 4. Enfin, $Stab$ est inclus dans un hyperplan complexe de (G, J') d'après la propriété iii) de J'. $\square$

7.4.2 Cas où le stabilisateur de l'action est inclus dans un hyperplan

Dans ce paragraphe, nous faisons l'hypothèse que le noyau N de γ est inclus dans un sous-espace de codimension 2 de $\mathbb{C}^n$, où, ce qui revient au même d'après le lemme 5.3.1, que *Stab* est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{C}^n$.

En fait, ce paragraphe sera entièrement consacré à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME **7.4.5** *Soit M une variété complexe de dimension $n+1$ qui n'est pas un tore. On suppose que M supporte une action de $\mathbb{C}^n$ vérifiant (C_d) et (H_+).*

On suppose en outre que le stabilisateur de ϕ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{C}^n$.

Alors l'action ϕ est une action homogène complexe d'un sous groupe de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ sur un espace homogène de ce même groupe.

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes. Nous étudierons d'abord le cas particulier $n=2$ (qui sera lui-même décomposé en plusieurs étapes) puis nous généraliserons en dimension supérieure.

Cas particulier : $n=2$

Nous supposons maintenant que $n=2$. D'après la proposition 7.2.1, M est alors un fibré principal en une courbe elliptique sur un tore de dimension 2. Nous établissons d'abord que la base de ce fibré est très particulière :

LEMME **7.4.3** *Soit M un fibré holomorphe topologiquement non trivial en une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore T^2 de dimension 2. On suppose de plus que M supporte une action de $\mathbb{C}^2$ vérifiant les conditions du théorème.*

Alors, le tore T^2 est, à revêtement fini près, le carré d'une courbe elliptique.

Puis, muni de ces informations concernant la structure de T^2 (ou ce qui revient au même de son groupe fondamental R), nous allons pouvoir calculer précisément γ ce qui nous conduira au :

LEMME **7.4.4** *Il existe un réseau Γ de $\mathbb{C}$ qui est aussi un sous-anneau ainsi qu'un bon choix pour R et pour Λ (modulo respectivement $GL(2,\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^*$) qui vérifient les conditions suivantes :*

(i) R est un Γ-module (de rang 2) contenant $\Gamma \times \Gamma$ et Λ est un Γ-module (de rang 1) contenant Γ.

(ii) La restriction à Γ^2 de l'application γ qui définit la classe du fibré M dans le $H^2(T^2, \Lambda)$ est exactement : $\gamma((z_1, z_2), (z_1', z_2')) = z_1 \cdot z_2' - z_2 \cdot z_1'$.

Après avoir établi ce résultat, nous pourrons terminer la démonstration du cas particulier.

Soit donc M un fibré principal en une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore T^2 de dimension 2, vérifiant les hypothèses du théorème.

Montrons d'abord le lemme 7.4.3.

Preuve Prenons R un réseau de $\mathbb{C}^2$ tel que T^2 soit biholomorphe à $\mathbb{C}^2/R$ et π_1, π_2 deux éléments $\mathbb{C}$-linéairement indépendants de R. On va montrer que deux éléments de $\pi_1(M)$ qui se projettent respectivement sur π_1 et π_2 ne peuvent pas commuter.

Quitte à changer par un biholomorphisme de $\mathbb{C}^2$, on peut supposer que $\pi_1 = (1, 0)$ et $\pi_2 = (0, 1)$. Reconstituons maintenant notre variété M comme suit : Considérons $\mathbb{C}^3$ comme le revêtement universel holomorphe de M. Bien entendu, $\mathbb{C}^3$ fibre sur $\mathbb{C}^2$ par omission de la dernière coordonnée et on s'arrange pour que cette fibration commute avec l'action sur $\mathbb{C}^3$ du groupe fondamental de M. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \stackrel{\pi_1(M)}{\rightarrow} & M \\ \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ \mathbb{C}^2 & \stackrel{R}{\rightarrow} & T^2 \end{array}$$

Un élément de $\pi_1(M)$ agit sur la base $\mathbb{C}^2$ comme un élément du groupe fondamental de T^2. De plus, cette action commute avec l'action principale de $\mathbb{C}$ sur M. Prenons alors un système générateur de R : $(1, 0); (0, 1); r_1; r_2$ et analysons l'action d'éléments de $\pi_1(M)$ qui agissent comme eux sur $\mathbb{C}^2$, éléments que nous noterons $t_{(1,0)}; t_{(0,1)}; t_1; t_2$.

Lemme **7.4.5** *Deux éléments de $\pi_1(M)$ commutent si et seulement si leurs projections sur R sont $\mathbb{C}$-linéairement dépendantes.*

Preuve Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc que $t_{(1,0)}$ et $t_{(0,1)}$ commutent.

Si on a bien choisi l'application de revêtement : $\mathbb{C}^3 \to M$, l'action de ces éléments s'exprime par :

$$t_{(1,0)}(z_1, z_2, z) = (z_1 + 1, z_2, z)$$

$$t_{(0,1)}(z_1, z_2, z) = (z_1, z_2 + 1, z + K)$$

où K est une constante.

Les éléments r_1 et r_2 agissent quant à eux par translations sur la base et commutent avec l'action de $\mathbb{C}^2$ sur les fibres. Par hypothèse, M supporte une action holomorphe de $\mathbb{C}^2$, donc un champ de vecteurs en tout point transverse à la fibre. Ce champ se relève à $\mathbb{C}^3$ en un champ holomorphe X transverse en tout point à la fibre et invariant par l'action de $\pi_1(M)$ sur $\mathbb{C}^3$.

Soit $x = (z_1, z_2, z_3)$ un élément de $\mathbb{C}^3$. Les coordonnées du champ X au point x seront notées $X_1, X_2, \xi(x)$, où ξ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^3$. En effet, il est clair que si X est invariant par l'action de $\pi_1(M)$, ses deux première coordonnées ne dépendent pas du point en lequel on les regarde.

De plus, comme X commute avec l'action de $\mathbb{C}$ sur les fibres, sa dernière coordonnée est constante sur chaque fibre, autrement dit $\xi(x)$ ne dépend que de z_1 et de z_2.

De plus, comme $t_{(1,0)}$ et $t_{(0,1)}$ agissent par translation sur $\mathbb{C}^3$, on doit avoir $\xi(t_{(1,0)}(x)) = \xi(t_{(0,1)})(x) = \xi(x)$. On se rend alors compte que la fonction ξ est constante sur $\mathbb{C}^3$, et il en est de même de X.

Cela implique immédiatement que le fibré M est un fibré topologiquement trivial, ce qu'on a exclu. On en déduit donc que l'hypothèse faite de commutation entre $t_{(1,0)}$ et $t_{(0,1)}$ est irréalisable.

Or, le rang du groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est égal à 2 et le rang de R est égal à 4. On en conclut donc que pour tout élément h non nul de R, il existe un élément h' de R, qui est $\mathbb{Z}$-linéairement indépendant de h et tel que deux éléments de $\pi_1(M)$ se projetant respectivement sur h et sur h' commutent. D'après ce qui précède, h et h' sont donc $\mathbb{C}$-linéairement dépendants.

Ainsi, l'intersection de n'importe quelle droite de $\mathbb{C}^2$ avec R est soit vide soit un réseau de cette droite. De plus, si deux éléments de $\pi_1(M)$ agissent sur la base comme des éléments $\mathbb{C}$-linéairement dépendants de R, alors ils commutent nécessairement. $\square$

Appelons Γ le sous-groupe de $\mathbb{C}$ formé des nombres complexes γ tels que $\gamma \cdot R \subset R$. On voit déjà que Γ contient $\mathbb{Z}$.

Pour tout élément x de R, notons G_x le sous-groupe de $\mathbb{C}$ formé des éléments γ tels que $\gamma \cdot x \in R$. On voit facilement que, étant donné deux éléments $\mathbb{C}$-linéairement indépendants x et y, pour que G_{x+y} soit un réseau de $\mathbb{C}$, il faut que $G_x \cap G_y$ soit aussi un réseau de $\mathbb{C}$.

Ainsi, si on se donne quatre éléments $x_i, 1 \leq i \leq 4$ de R, deux à deux $\mathbb{C}$-linéairement indépendants, ils engendreront un réseau de $\mathbb{C}^2$ qui sera donc un sous-groupe d'indice fini de R. Ainsi, Γ sera un sous-groupe d'indice fini de l'intersection des G_{x_i}. Or, l'intersection des G_{x_i} est un réseau de $\mathbb{C}$ d'après la remarque précédente, et il en est de même pour Γ.

Or, comme $(1,0)$ et $(0,1)$ sont dans R, R contient $\Gamma \times \Gamma$, qui est d'indice fini dans R car c'est un réseau de $\mathbb{C}^2$. Et ainsi, à revêtement fini près, T^2 est biholomorphe à $\mathbb{C}/\Gamma \times \mathbb{C}/\Gamma$. $\square$

Maintenant que nous avons compris la structure de la base T^2 de M, nous pouvons nous attacher à comprendre exactement M en tant que fibré. C'est le lemme 7.4.4.

Preuve En fait, par définition, Γ n'est pas seulement un sous-groupe mais est aussi un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Nous avons déjà dit que la classe topologique du fibré M était déterminée par une application bilinéaire : $R \times R \to \Lambda$, où $\mathbb{C}/\Lambda$ est biholomorphe à la fibre. Nous allons montrer que cette application est non seulement $\mathbb{Z}$-bilinéaire, mais est même Γ-bilinéaire.

Ici encore, il suffit de montrer ce résultat pour un sous-groupe d'indice fini de Γ. L'application ci-dessus sera notée $[,]$ (c'est en fait l'application commutateur de deux éléments de $\pi_1(M)$ se projetant sur les deux éléments considérésde $\pi_1(T^2)$). Quitte à multiplier le réseau donnant la fibre par une constante, on peut supposer que :

$$[(0,1),(1,0)] = 1$$

Appelons α un élément non réel de Γ tel que le sous-groupe de $\mathbb{C}$ engendré par 1 et α soit un sous-anneau. Analysons alors l'action sur $\mathbb{C}^3$ de $t_{(1,0)}, t_{(\alpha,0)}$ etc...

Si on a bien choisi l'application revêtement : $\mathbb{C}^3 \to M$, on obtient que pour tout élément (z_1, z_2, z) de $\mathbb{C}^3$:

$$t_{(1,0)}(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + 1, z_2, z)$$

$$t_{(\alpha,0)}(z_1, z_2, z) = (z_1 + \alpha, z_2, z + K z_2 + L)$$
$$t_{(0,1)}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2 + 1, z_3 + z_1 + L')$$
$$t_{(0,\alpha)}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2 + \alpha, z_3 + K' z_1 + K" z_2 + L")$$

où $K, K', K", L, L', L"$ sont des constantes de $\mathbb{C}$.

On a : $[(0,1),(0,\alpha)] = K" = 0$. Et $[(1,0),(0,\alpha)] = K'$.

On sait que α^2 est dans le groupe engendré par 1 et α. On peut donc écrire $\alpha^2 = n_1\alpha + n_2$ avec n_1 et n_2 entiers. Calculons alors :

$$[(1,\alpha),(\alpha,\alpha^2)] = [(1,0),(0,\alpha^2)] + [(0,\alpha),(\alpha,0)] = n_1 \cdot K' + n_2 + [(0,\alpha),(\alpha,0)]$$

Or, d'après le sous-lemme 7.4.5, $[(1,\alpha),(\alpha,\alpha^2)] = 0$, donc $[(\alpha,0),(0,\alpha)] = -[(0,\alpha),(\alpha,0)] = n_1 \cdot K' + n_2$.

Regardons de même :

$$\begin{aligned} [(\alpha,1),(\alpha^2,\alpha)] &= [(\alpha,0),(0,\alpha)] + [(0,1),(\alpha^2,0)] \\ &= n_1 \cdot K' + n_2 - n_1 \cdot [(\alpha,0),(0,1)] - n_2 \\ &= n_1 \cdot (K' - [(\alpha,0),(0,1)]) \end{aligned}$$

Or, $[(\alpha,1),(\alpha^2,\alpha)] = 0$. Donc, si on a choisi α tel que $n_1 \neq 0$, ce qui est toujours possible, on s'aperçoit que $[(\alpha,0),(0,1)] = K'$.

Or, on peut aussi calculer $[(\alpha, 0), (0, 1)]$ d'après leurs actions sur $\mathbb{C}^3$, ce qui donne :

$$[(\alpha, 0), (0, 1)] = \alpha - K$$

C'est-à-dire $K' = \alpha - K$.

Calculons alors de même $[(\alpha, 0), (0, \alpha)]$:

$$[(\alpha, 0), (0, \alpha)] = K'\alpha - K\alpha = 2K' \cdot \alpha - \alpha^2$$

On a ainsi $2K' \cdot \alpha - \alpha^2 = n_1 \cdot K' + n_2$. On trouve donc ainsi $K' = \alpha$, et on en déduit alors immédiatement que l'application cherchée est $\mathbb{Z}(\alpha)$-bilinéaire et par suite Γ-bilinéaire.

Il est alors facile de s'assurer que l'application $[,]$ est exactement :

$$[(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_1', \gamma_2')] = \gamma_1 \cdot \gamma_2' - \gamma_2 \cdot \gamma_1'$$

□

A partir de là, il est clair que M est, à revêtement fini près, un fibré qui est dans la même classe topologique qu'un espace homogène de Nil, exactement Nil quotienté (du bon côté) par le sous-groupe formé des éléments ayant toutes leurs coordonnées dans Γ.

Montrons alors la chose suivante :

Lemme **7.4.6** *Soit N un espace homogène de Nil qui est aussi un fibré principal en une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore T^2 de dimension 2.*

Soit N' un fibré principal en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T^2. On suppose que N et N' ont même classe topologique. Alors N' est aussi un espace homogène de Nil.

Preuve Considérons n_1 et n_1' les classes de cohomologie respectives de N et N' dans $H^1(T^2, \mathcal{O}/*)$.

Par hypothèse, ces deux classes ont même image par l'application β. Ainsi, leur différence est un élément du noyau de β, donc l'image d'une classe de $H^1(T^2, \mathcal{O})$. Or, l'application α est surjective. Donc, cette dernière classe est elle-même l'image par α d'une certaine classe de $H^1(T^2, \mathbb{C})$.

Or, une classe de $H^1(T^2, \mathbb{C})$ correspond à un morphisme de groupes de $\pi_1(T^2)$ dans $\mathbb{C}$ et nous appellerons l le morphisme correspondant à la classe que nous venons de construire.

Considérons Γ un réseau de Nil tel que $N \simeq Nil/\Gamma$ et tel que $\Gamma \cap Z(Nil)$ soit l'ensemble des matrices telles que $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = 0$ et $\alpha_{1,3} \in \Lambda$. Appelons p la projection naturelle de Γ sur $\pi_1(T^2)$.

Considérons alors l'application suivante de Γ dans Nil :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} + l \circ p(\gamma) \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On s'assure facilement que l'image Γ_1 de cette application est un réseau de Nil qui contient $\Gamma \cap Z(Nil)$, que $\Gamma_1/(\Gamma \cap Z(Nil)) \simeq \pi_1(T^2)$, et que $Nil/\Gamma_1 \simeq N'$.

Ainsi, N' est bien un espace homogène de Nil. $\square$

On déduit de ce lemme qu'à revêtement fini près, M est un espace homogène de Nil.

Ainsi, M est le quotient d'un espace homogène de Nil par un sous-groupe fini d'automorphismes qui respectent l'action de $\mathbb{C}^2$. Or, un espace homogène de Nil est un fibré holomorphe principal en une courbe elliptique sur un tore de dimension 2. Comme l'action de $\mathbb{C}^2$ contient cette action principale, il est clair que M est aussi un fibré principal en une courbe elliptique sur une surface complexe. De plus, un automorphisme d'un tore complexe qui commute avec un sous-groupe de translations qui a ses orbites denses commute avec toute translation, donc est lui-même une translation.

Ainsi, la variété M est un espace homogène du groupe Nil.

On cherche maintenant à montrer que l'action ϕ est homogène complexe, c'est-à-dire l'action par translations d'un sous-groupe de Nil sur M.

En fait, c'est très facile à voir. En effet, M étant un espace homogène du groupe Nil, Nil agit localement librement sur M par translations, donc fournit trois champs de vecteurs holomorphes $X_i, 1 \leq i \leq 3$ linéairement indépendants en tout point. Ainsi, un champ de vecteurs sur M s'écrit $\sum f_i(x) \cdot X_i$, où les fonctions $f_i, 1 \leq i \leq 3$ sont des fonctions holomorphes sur M, donc constantes. On en déduit que tout champ de vecteurs sur M est le champ donné par l'action d'un élément de l'algèbre de Lie de Nil.

Nous avons donc démontré le théorème dans le cas particulier où $n = 2$. Montrons le maintenant en dimension quelconque.

Cas général

Soit M un fibré principal en une courbe elliptique sur un tore de dimension n. On suppose que M vérifie les conditions du théorème.

Comme $Stab$ est un sous-groupe discret d'un hyperplan de $\mathbb{C}^n$, on a $rg(Stab) \leq 2n - 2$. Comme, de plus, d'après le lemme 5.3.1, $rg(Stab) + rg(hol) = 2n + 2$, on en déduit que le rang de l'holonomie associée à l'application ϕ est au moins égal à 4.

Or, d'après le lemme 7.2.1, le rang de l'holonomie est au plus égal à 4. C'est donc que l'holonomie est exactement de rang 4, et alors $Stab$ est exactement de rang $2n-2$. Comme il est discret dans un $\mathbb{C}$-espace de dimension $n-1$, c'est donc que $Stab$ est un réseau d'un hyperplan de $\mathbb{C}^n$.

La variété M est alors un fibré principal en tores de dimension $n-1$ sur un tore de dimension 2, la fibre étant elle-même un fibré principal topologiquement trivial en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore de dimension $n-2$.

Il existe donc un fibré M' en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur T^n dont la classe topologique est la même que celle de M, et qui est également un fibré principal sur un tore de dimension 2 dont la fibre est le produit direct de $\mathbb{C}/\Lambda$ par un tore de dimension $n-2$.

Une telle variété est un fibré holomorphe principal topologiquement trivial de fibre un tore de dimension $n-2$ et de base un fibré principal en $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore de dimension 2 que nous noterons V.

Or, d'après la proposition 7.2.2 (en réalité une proposition analogue à la proposition 7.2.2 où la fibre n'est plus supposée être de dimension 1), cette variété supporte une action de $\mathbb{C}^n$ ayant les propriétés désirées si et seulement si le produit direct holomorphe de ce tore de dimension $n-2$ et de ce fibré V supporte aussi une telle action, ce qui revient à demander que V lui-même supporte une action de $\mathbb{C}^2$ ayant les propriétés requises.

Or, d'après le cas particulier que nous venons de démontrer, V est un espace homogène du groupe Nil et l'action de $\mathbb{C}^2$ que nous venons d'introduire est une action homogène. On veut montrer qu'il en est de même pour l'action ϕ initiale.

Montrons d'abord que c'est le cas pour M'. Rappelons que M' est un fibré principal topologiquement trivial en un tore de dimension $n-2$ sur V, qui est un espace homogène de Nil.

Il nous faut alors l'analogue de la surjectivité de l'application α du diagramme (D) dans le cas où la base n'est plus un tore mais un espace homogène de Nil.

Lemme **7.4.7** *Soit* V *un espace homogène de* Nil.

Alors, l'application naturelle : $H^1(V,\mathbb{C}) \to H^1(V,\mathcal{O})$ *est surjective.*

En fait, Kodaira a démontré un résultat plus général dont on pourra trouver la démonstration dans [**?**]. Nous donnons ici une démonstration du cas particulier, par des méthodes différentes.

Preuve Il est clair que V est un fibré holomorphe principal en une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ sur un tore T^2 de dimension 2. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(T^2,\mathbb{C}) & \to & H^1(V,\mathbb{C}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \\ H^1(T^2,\mathcal{O}) & \to & H^1(V,\mathcal{O}) \end{array}$$

La première flèche verticale est surjective. Pour montrer que la deuxième l'est aussi, il suffit de montrer que les deux flèches horizontales sont des isomorphismes. L'isomorphisme entre $H^1(T^2, \mathbb{C})$ et $H^1(V, \mathbb{C})$ est clair (en effet, le groupe dérivé du groupe fondamental de V est un sous-groupe d'indice fini du groupe fondamental de la fibre de V). Reste à voir que l'application naturelle de $H^1(T^2, \mathcal{O})$ dans $H^1(V, \mathcal{O})$ est un isomorphisme.

Pour cela, nous allons montrer qu'étant donné un fibré principal N en $\mathbb{C}$ sur V et une fibre E du fibré V, alors la restriction à E du fibré N est triviale. Commençons par montrer que la restriction de N à une fibre de V ne dépend pas de la fibre choisie.

Soit donc N un fibré principal en $\mathbb{C}$ sur V. La restriction de N à une fibre E de V est un fibré principal en $\mathbb{C}$ sur E, donc correspond à une classe dans le $H^1(E, \mathcal{O})$. Or, $H^1(E, \mathcal{O})$ est canoniquement isomorphe à $H^1(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O})$ (pour constater cela, il suffit de vérifier que l'action par translation sur la fibre d'un élément de $\mathbb{C}/\Lambda$ ne change pas la classe du fibré, fait qui résulte de la compacité de la fibre et du fait que $H^1(E, \mathcal{O})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Ainsi, la restriction de N à une fibre nous fournit une application holomorphe de T^2 dans $H^1(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O}) \simeq \mathbb{C}$, donc constante. Cela revient à dire que la restriction du fibré N à une fibre de V ne dépend pas de cette fibre.

Ainsi, N peut également être considéré comme un fibré principal de base T^2 et de fibre Q, le fibré principal en $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}/\Lambda$ dont nous parlions. Remarquons que Q peut être défini comme le quotient de $\mathbb{C}^2$ par un sous-groupe discret de rang 2. Cherchons la forme des cocycles définissant ce fibré. C'est un ensemble de fonctions sur des ouverts de T^2 à valeurs dans Q dont les projections sur $\mathbb{C}/\Lambda$ forment un cocycle définissant le fibré V.

On peut donc définir N comme le quotient de $\mathbb{C}^2 \times Q$ par un groupe d'applications affines de la forme suivante :

$$u_r \ : (z, (z_1, z_2)) \to (z + r, (z_1, z_2) + L(z) \cdot K_r + C_r^{ste})$$

où r parcourt le groupe fondamental de T^2. On calcule alors les commutateurs de ces différentes applications et on veut trouver qu'ils engendrent un sous-groupe discret de Q, donc de la fibre de Q qui est identifiée à $\mathbb{C}$.

On a : $[u_r, u_{r'}] = L(r) \cdot K_{r'} - L(r') \cdot K_r$. Or, nous avons déjà vu, lors de la démonstration du lemme 7.4.4 que, du fait que L est $\mathbb{C}$-linéaire, si le groupe engendré par ces commutateurs est discret dans $\mathbb{C}$, alors $[u_r, u_{r'}] = 0$ dès que r et r' sont $\mathbb{C}$-linéairement dépendants. On en déduit alors que le fibré Q est un fibré produit.

Ainsi, pour tout fibré principal en $\mathbb{C}$ sur N et toute fibre E de N, la restriction à E du fibré est un fibré trivial sur E. On en déduit que tout fibré principal en $\mathbb{C}$ sur E est le pullback d'un fibré principal en $\mathbb{C}$ sur T^2, ce qui nous fournit l'isomorphisme entre $H^1(T^2, \mathcal{O})$ et $H^1(V, \mathcal{O})$, et on en déduit notre lemme. □

Ce lemme nous permet d'affirmer que M' est bien un espace homogène de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ (la preuve de ce fait est analogue à la preuve du lemme 7.4.6).

Pour les mêmes raisons, M est aussi un espace homogène de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$. De plus, l'action ϕ est homogène pour la même raison que dans le cas où M était un espace homogène de Nil.

Nous avons ainsi terminé la démonstration du théorème.

Comme dans le cas des tores, ce théorème admet une réciproque.

Proposition **7.4.6** *Soit M un espace homogène du groupe $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$. Alors, tout sous-groupe commutatif de codimension 1 de $Nil \times \mathbb{C}^n$ agit sur M en préservant la forme de volume canonique (c'est-à-dire la forme de volume dont le relevé à $Nil \times \mathbb{C}^{n-2} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ est la forme de volume canonique). De plus, une telle action est génériquement à feuilles denses.*

Preuve La forme de volume canonique sur $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ est clairement invariante par toute translation à droite et toute translation à gauche. Elle passe donc au quotient en une forme de volume sur M invariante par toute action homogène.

Le fait qu'une telle action soit génériquement à feuilles denses provient de ce qu'un sous-groupe commutatif de codimension 1 de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ est l'image réciproque d'une droite de $\mathbb{C}^2$ par la projection canonique de $Nil \times \mathbb{C}^{n-2}$ sur son quotient par son centre, et que pour n'importe quel tore T^2 de dimension 2, l'action linéaire d'une droite de $\mathbb{C}^2$ sur T^2 est génériquement à feuilles denses. □

Chapter 8

Cas où la variété vérifie l'hypothèse (H_-)

Dans ce chapitre, nous faisons l'hypothèse inverse de celle que nous avons faite durant le chapitre précédent, c'est-à-dire que nous supposons qu'outre (C_d), ϕ vérifie également la condition (H_-) suivante :

(H_-) : Deux élément de $\pi_1(M)$ dont les holonomies engendrent un réseau de $\mathbb{C}$ ne commutent pas.

Nous utiliserons dans cette section des méthodes proches de celles utilisées lors du chapitre précédent. Cependant, nous obtiendrons des résultats assez différents. Nous discuterons suivant le rang de l'application d'holonomie de $\pi_1(M)$ dans $\mathbb{C}$ qui, comme sous l'hypothèse (H_+), ne peut valoir que 3 ou 4. Dans le cas de rang 4, nous montrerons que la variété M est un fibré en tores sur un tore, tandis que dans le cas de rang 3 (cas que l'on pourrait appeler générique), nous indiquerons comment construire de telles variétés et de telles actions.

8.1 Généralités

Commençons notre étude par la remarque simple suivante :

Remarque **8.1.1** Deux éléments de $\pi_1(M)$ dont les holonomies ne sont pas $\mathbb{Z}$-linéairement dépendantes ne commutent pas. $\triangleright$

En effet, prenons deux éléments h et h' de $\pi_1(M)$ dont les holonomies sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes. Alors :

-Si ces holonomies sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes, h et h' ne commutent pas d'après (H_-).

-Si ces holonomies sont $\mathbb{R}$-linéairement dépendantes, elles engendrent un sous-groupe dense d'une droite réelle de $\mathbb{C}$.

Supposons que h et h' commutent et soit h_2 un élément de $\pi_1(M)$ dont l'holonomie est $\mathbb{R}$-linéairement indépendante des deux précédentes. On s'aperçoit que les commutateurs $[h, h_2]$ et $[h', h_2]$ sont proportionnels aux holonomies respectives de h et de h'.

Ainsi, ces deux commutateurs engendrent un sous-groupe dense d'une droite réelle de $\mathbb{C}^n$. Cela contredit la discrétude de *Stab*. Il est donc impossible que h et h' commutent.

Nous montrons maintenant que les actions que nous cherchons ont une "petite" holonomie.

PROPOSITION **8.1.2** *Soit M une variété complexe supportant une action ϕ qui vérifie (C_d) et (H_-).*

Alors le rang de l'holonomie pour cette action est égal à 3 ou à 4.

De plus, si le rang de cette holonomie est égal à 4, le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est un réseau d'un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de dimension 2 ou 3 et M est alors un fibré principal holomorphe en tores de dimension 2 ou 3 sur un tore de dimension $n-1$ ou $n-2$.

PREUVE L'image de $\pi_1(M)$ par l'holonomie étant un sous-$\mathbb{Z}$-module dense de $\mathbb{C}$, son rang est au moins égal à 3. Nous cherchons à montrer que ce rang ne peut être strictement plus grand que 4.

Faisons l'hypothèse que le rang de l'holonomie est exactement 4. Reprenons alors les notations du paragraphe 5.2. Soient $h_i, 1 \leq i \leq 4$ des éléments de $\pi_1(M)$ tels que les holonomies λ_i des h_i, pour $1 \leq i \leq 4$, engendrent toute l'holonomie de $\pi_1(M)$, avec λ_1 et λ_2 $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

Soient K_3 et K_4 les coefficients des fonctions affines définies par h_3 et h_4. Il résulte de la formule (5.1) que le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est inclus dans le $\mathbb{C}$-espace engendré par K,K_3 et K_4. On a alors deux possibilités :

-Soit les $[h_i, h_j]$, $i < j$, sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants. Dans ce cas, $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ est un sous-groupe discret de rang 6 d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. C'est donc un réseau.

-Soit les $[h_i, h_j]$, $i < j$, ne sont pas $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants. Rappelons que si deux éléments de $\pi_1(M)$ ont des holonomies $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes, alors ils ne commutent pas.

Considérons la somme $s = [a, b] + [c, d]$ de deux commutateurs d'éléments de $\pi_1(M)$. Supposons que les quatre éléments a, b, c, d n'engendrent pas un sous-groupe de rang 4 de $\pi_1(M)$. Alors il existe un multiple entier de s qui est un commutateur d'éléments de $\pi_1(M)$. En effet, si $d = q_1 \cdot a + q_2 \cdot b$, où q_1 et q_2 sont dans $\mathbb{Q}$, on a alors $s = [a + q_2 \cdot c, b - q_1 \cdot c]$.

Cela montre en particulier que tout élément de $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ possède un multiple qui est somme de deux commutateurs d'éléments de $\pi_1(M)$.

Ainsi, pour satisfaire l'hypothèse sur les $[h_i, h_j]$, il est nécessaire d'avoir quatre éléments $\alpha_i, 1 \leq i \leq 4$ de $\pi_1(M)$ dont les holonomies engendrent un $\mathbb{Z}$-module de rang 4, et tels que $[\alpha_1, \alpha_2] = [\alpha_3, \alpha_4]$.

On peut alors supposer (quitte à changer les h_i) que pour chaque i, α_i est multiple de h_i. Il est alors immédiat, d'après la formule 5.1, que K est dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par K_3 et K_4. Il est également facile de s'assurer que $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ est de rang au moins 4, donc est un réseau dans ce sous-espace.

Donc, dans les deux cas, le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est un réseau d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel G'. On voit alors, comme plus haut, que M est un fibré principal en $\frac{G'}{[\pi_1(M), \pi_1(M)]}$ sur un espace dont le groupe fondamental est commutatif et qui possède une action d'un groupe abélien qui soit localement libre, de codimension 1, à feuilles denses et transversalement riemannienne. Cet espace est, d'après le théorème 7.1.1, un tore complexe.

Grâce à cette démonstration, nous allons éliminer le cas où le rang de l'holonomie est au moins 5.

Supposons qu'il existe cinq éléments $h_i, 1 \leq i \leq 5$ de $\pi_1(M)$ dont les holonomies soient $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes. Par la même démonstration que ci-dessus, le groupe dérivé du groupe engendré par les $[h_i, h_j], 1 \leq i, j \leq 4$ serait un réseau Γ d'un sous-espace vectoriel complexe V de $\mathbb{C}^n$. nous dinstinguons alors deux cas :

Premier cas : Le coefficient K_5 de la fonction affine définie par h_5 n'est pas dans V.

Dans ce cas, l'ensemble des éléments de la forme $[h, h_5]$, où h est dans le groupe engendré par les $h_i, 1 \leq i \leq 4$ est un groupe de rang 4 dont l'intersection avec Γ est réduite à $\{0\}$. Donc les commutateurs des $h_i, h_j, 1 \leq i, j \leq 5$ engendrent un groupe dont le rang est égal à $rg(\Gamma) + 4$. Il ne peut donc être discret dans un espace vectoriel dont la dimension est égale à $dim(V) + 1$.

Deuxième cas : Le coefficient K_5 de la fonction affine définie par h_5 est dans V.

Dans ce cas, le groupe engendré par les $[h_i, h_j], 1 \leq i, j \leq 5$ est lui-même contenu dans V. De plus, il doit être discret et Γ est déjà un réseau de V. Il existe donc un sous-groupe d'indice fini r du groupe des commutateurs de la forme $[h, h_5]$ qui est inclus dans Γ.

On remarque de plus que les h_i jouent des rôles symétriques, c'est-à-dire que si on choisit quatre éléments quelconques de $\pi_1(M)$ d'holonomies indépendantes, alors le groupe engendré par leurs commutateurs est d'indice fini dans le groupe dérivé de $\pi_1(M)$.

Or, $r\cdot[h_1, h_5]$ est dans Γ, donc s'écrit sous la forme $[h_1, \alpha]+[\alpha_1, \alpha_2]$, pour des α, α_1 et α_2 bien choisis dans le groupe engendré par les $h_i, 2 \leq i \leq 4$. D'où $[h_1, h_5-\alpha] = [\alpha_1, \alpha_2]$.

Or, d'après la remarque précédente les commutateurs des éléments $h_1, r(h_5-\alpha), \alpha_1, \alpha_2$ engendrent un sous-groupe d'indice fini de Γ. Ils engendrent aussi un réseau dans un espace vectoriel de dimension 2 (et non 3 à cause de l'égalité précédente).

Ainsi, le groupe engendré par les commutateurs des $h_i, 1 \leq i \leq 5$ serait un réseau dans un espace de dimension deux, donc de rang au plus 4, ce qui est clairement impossible.

Donc, dans tous les cas, le rang de l'holonomie est au plus 4. □

8.2 Cas où l'holonomie est de rang 3

On fait dans ce paragraphe l'hypothèse que l'holonomie est de rang 3.

Théorème **8.2.1** *Soit M une variété supportant une action ϕ vérifiant (C_d) et (H_-).*

Si le rang de l'image de $\pi_1(M)$ par l'holonomie est égal à 3, alors le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ est un $\mathbb{Z}$-module de rang 3 qui est inclus dans un sous-espace vectoriel de dimension complexe égale à 2 de $\mathbb{C}^n$.

De plus, Stab est un $\mathbb{Z}$-module de rang $2n-1$ qui engendre un hyperplan réel de $\mathbb{C}^n$ contenant l'espace vectoriel complexe engendré par $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$.

Démonstration Si le rang de $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ était au plus 2, on pourrait trouver deux éléments d'holonomies indépendantes et qui commuteraient, ce qui contredirait l'hypothèse (H_-). On a de plus déjà vu que $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ était inclus dans le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $[h_1, h_2]$ et $[h_1, h_3]$, pour n'importe quel élément h_3 de $\pi_1(M)$ dont l'holonomie est indépendante de λ_1 et λ_2 .

Donc, $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ est un sous-groupe de rang 3 d'un sous-espace vectoriel complexe de dimension 2 de $\mathbb{C}^n$. Nous appellerons V ce sous-espace vectoriel.

Le groupe $\pi_1(M)$ agit librement et proprement discontinûment sur $\tilde{M}$. Considérons l'image de l'holonomie de $\pi_1(M)$. C'est un $\mathbb{Z}$-module de rang 3 engendré par λ_1, λ_2, et par un troisième élément λ_3, qui est l'holonomie d'un certain élément h_3 de $\pi_1(M)$.

Or, il existe une forme $\mathbb{C}$-linéaire l non nulle sur $\mathbb{C}^3$, qui est dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les trois projections canoniques, telle que $l(h_1, h_2, h_3) = 0$. De plus, elle est unique à homothétie (réelle) près.

On aura $l(z_1, z_2, z_3) = l_1 \cdot z_1 + l_2 \cdot z_2 + l_3 \cdot z_3$, avec les l_i réels.

Soit h un élément de $\pi_1(M)$. Son action sur $\tilde{M}$ définit pour chaque fibre une translation, translation qui dépend affinement de la fibre avec un coefficient dans V. Appelons p l'application qui va de $\pi_1(M)$ dans $\mathbb{C}^n/V$ et qui associe à h la projection du vecteur correspondant à une telle translation (cette projection ne dépend plus de la fibre).

Remarquons de plus que p est un morphisme, en particulier que p passe au quotient par le groupe dérivé de $\pi_1(M)$.

Posons $d = l_1 \cdot p(h_1) + l_2 \cdot p(h_2) + l_3 \cdot p(h_3)$ et D une image réciproque de d par la projection canonique de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^n/V$.

La proposition résulte alors du lemme suivant :

LEMME **8.2.1** *Le sous-groupe de $\mathbb{C}^n$ engendré par Stab et D est un réseau de $\mathbb{C}^n$. De plus, V est inclus dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par Stab.*

PREUVE Appelons R le sous-groupe de $\mathbb{C}^n$ engendré par *Stab* et D. Nous allons montrer successivement que R est discret puis que R est cocompact dans $\mathbb{C}^n$.

a) Montrons que le sous-groupe de $\mathbb{C}^n$ engendré par *Stab* et par D est discret.

Le sous-groupe $\mathbb{Z} \cdot (l_1, l_2, l_3)$ possède des points non nuls à distance aussi petite que l'on veut de $\mathbb{Z}^3$ (comme tout sous-groupe non nul de $\mathbb{R}^3$).

Prenons un point (n_1, n_2, n_3) de $\mathbb{Z}^3$ proche de ce sous-groupe monogène. Considérons une action d'un élément h_0 de $\pi_1(M)$ dont l'image par la projection canonique sur $\frac{\pi_1(M)}{[\pi_1(M),\pi_1(M)]}$ est égale à $n_1 h_1 + n_2 h_2 + n_3 h_3$ (on appelle encore h_i l'image de h_i dans l'abélianisé de $\pi_1(M)$).

Cette action est très proche, modulo V, de l'action d'un multiple de D.

On fait maintenant l'hypothèse que R n'est pas discret. Alors il existe des éléments de $\pi_1(M)$, d'holonomies non nulles mais aussi proches que l'on veut de 0, et dont les actions sur les fibres de $\tilde{M}$ sont constituées de translations aussi proches que l'on souhaite de V.

Mais on s'est autorisé à choisir h_0 comme on veut dans une classe modulo $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$.

Ainsi, étant donné une fibre, on peut en changeant le choix de h_0, faire varier de n'importe quel élément de $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ la translation effectuée par h_0 sur cette fibre.

De plus, étant donné h_0, on peut en changeant la fibre faire varier de n'importe quel élément de $\mathbb{C} \cdot K_{h_o}$ la translation effectuée par h_0 sur une fibre.

Ainsi, en choisissant bien h_0 et la fibre de $\tilde{M}$ sur la quelle on évalue la translation, on peut faire varier cette translation comme on veut dans une classe du groupe $\mathbb{C} \cdot K_{h_o} + [\pi_1(M), \pi_1(M)]$, groupe que nous noterons H_{h_0}. Or, on peut faire trois remarques sur ces groupes H_{h_0}.

Premièrement, pour tout multiple entier $n \cdot h_0$ de h_o, le groupe $H_{n \cdot h_0}$ est égal à H_{h_0}.

Deuxièmement, H_{h_0} est un sous-groupe fermé de V. De plus, considérons q un morphisme de groupes continu de $\mathbb{C}^n$ sur V/H_{h_0} dont la restriction à V est égale à la projection canonique. Alors, l'application de $\mathbb{Z}$ dans V/H_{h_0} qui à un entier n fait correspondre l'image par q des translations sur les fibres définies par $n \cdot h_0$ est un morphisme de groupes.

Troisièmement, la distance d'un point de V à H_{h_0} (i.e. le diamètre de V/H_{h_0}) est bornée par une constante qui ne dépend pas de h_0 (pour n'importe quelle norme sur V).

Avec ces trois remarques, on peut affirmer que, étant donné un élément h_0 de $\pi_1(M)$ dont l'holonomie est non nulle mais très petite et qui définit des translations très proches de V sur les fibres, il existe un élément h_1, dans la même classe qu'un multiple de h_0 modulo $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$, dont l'holonomie est petite, et pour lequel il existe une fibre de $\tilde{M}$ qui est peu translatée par son action.

C'est également vrai si on considère l'action sur $\hat{M}$ au lieu de $\tilde{M}$. Mais comme l'ensemble des fibres de $\hat{M}$ est compact, il est impossible que l'action de $\pi_1(M)$ sur $\hat{M}$ soit proprement discontinue. On aboutit donc à une contradiction.

Il en résulte que R est discret.

b) R est cocompact dans $\mathbb{C}^n$.

D'après la formule 5.3.1, on peut affirmer que $rg(Stab) = 2n - 1$ et donc, R est de rang $2n$ dans un espace vectoriel réel de dimension $2n$. Comme il est discret d'après le a), c'est que c'est un réseau donc il est également cocompact.

Reste à voir que V est inclus dans le $\mathbb{R}$-espace engendré par $Stab$. Nous avons pris pour D un élément quelconque de $\mathbb{C}^n$ dont la projection sur $\mathbb{C}^n/V$ était égale à d, c'est-à-dire que D peut être choisi comme on veut dans une classe modulo V et que le groupe engendré par $Stab$ et D sera toujours discret. Comme $Stab$ engendre un hyperplan réel, cela implique que cet hyperplan contient V, sans quoi il rencontrerait l'espace affine dans lequel on s'est autorisé à choisir D, chose qui est impossible. □

Le théorème se trouve ainsi démontré. □

De plus, ce théorème admet une réciproque :

Proposition **8.2.2** *Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes discrets de $\mathbb{C}^n$ vérifiant les conditions suivantes :*

i) H_1 est un groupe de rang 3 inclus dans un sous-espace P de dimension 2 de $\mathbb{C}^n$.

ii) Il n'existe aucune droite de $\mathbb{C}^n$ qui possède un réseau inclus dans H_1.

iii) H_2 est un groupe de rang $2n-1$ qui contient H_1 et qui engendre un espace vectoriel réel contenant le plan complexe P.

Alors il existe une variété M compacte de dimension n+1 et une action ϕ de $\mathbb{C}^n$ sur M, vérifiant (C_d), (H_-), ainsi que :

a) Le stabilisateur sous l'action ϕ de n'importe quel point de M est H_2.

b) L'action de H_1 sur le revêtement universel de M par le relevé de l'action ϕ est identique à l'action naturelle du groupe dérivé du groupe fondamental de M.

Preuve Prenons donc H_1 et H_2 deux sous-groupes de $\mathbb{C}^n$ vérifiant les conditions de la proposition. On cherche le groupe fondamental de M comme un groupe de biholomorphismes de $\mathbb{C}^{n+1}$. De plus, comme on demande que $\mathbb{C}^n$ agisse sur M, on cherche des biholomorphismes qui commutent avec l'action de $\mathbb{C}^n$ par translations sur les n dernières coordonnées.

Comme on désire que l'action de H_2 soit triviale sur M, le groupe T_{H_2} des translations sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par les éléments de H_2 doit être inclus dans le groupe fondamental de M.

Appelons $t_{(1,1)}$ la translation de vecteur $(1, 0, ..., 0)$ de $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

Considérons maintenant K_1, K_2, K_3 une base de H_1, et P le plan complexe contenant H_1.

D'après l'hypothèse ii), K_1 et K_2 ne sont pas inclus dans la même droite. Donc ils engendrent P comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On peut donc écrire $K_3 = \lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2$.

Alors, 1, λ_1 et λ_2 sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants.

En effet, supposons que λ_2 s'écrive $q_1 + q_2 \cdot \lambda_2$ avec q_1 et q_2 dans $\mathbb{Q}$, alors
$K_3 = \lambda_1 \cdot K_2 + (q_1 + q_2 \cdot \lambda_1) \cdot K_1$.

Ainsi, K_3 possède un multiple de la forme $n\lambda_1 \cdot K_2 + (n_1 + n_2 \cdot \lambda_1)K_1$ où n, n_1, et n_2 sont des entiers. Ainsi, H_1 possède l'élément $\lambda_1 \cdot (n \cdot K_2 + n_2 \cdot K_1)$. Or, il possède aussi l'élément $n \cdot K_2 + n_2 \cdot K_1$. Comme d'après l'hypothèse ii) l'intersection de H_1 avec toute droite de P est de rang au plus 1, on en déduit que λ_1 est un nombre rationnel.

Alors, λ_2 est aussi un nombre rationnel et ainsi le groupe engendré par K_1, K_2 et K_3 ne peut être de rang 3. On obtient une contradiction. Donc 1, λ_1 et λ_2 sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants.

Considérons maintenant les deux biholomorphismes suivants de $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$:

$$h_1(z, Y) = (z + \lambda_1, Y - z \cdot K_2)$$

$$h_2(z, Y) = (z + \lambda_2, Y + D + z \cdot K_1)$$

pour un élément D de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}$-linéairement indépendant de H_2.

Soit alors π_1 le groupe engendré par T_{H_2}, $t_{(1,1)}$, h_1 et h_2. On montre alors facilement, par des arguments identiques à ceux que nous avons déjà employés, que l'action de π_1

sur $\mathbb{C}^{n+1}$ est libre, proprement discontinue, cocompacte, que l'action de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ passe au quotient par π_1 en une action ϕ de $\mathbb{C}^n$ sur M et que ϕ possède bien toutes les propriétés requises par la proposition. $\square$

8.3 Cas où l'holonomie est de rang 4

On fait maintenant l'hypothèse que ϕ vérifie (C_d), (H_-) et que le rang de l'holonomie est égal à 4.

Rappelons que dans ce cas, nous avons démontré dans la proposition 8.1.2 qu'il existe un sous-espace vectoriel de dimension 2 ou 3 de $\mathbb{C}^n$ dont l'action sur M est à orbites compactes.

8.3.1 Cas où le groupe dérivé est de rang 4

Nous étudions d'abord le cas où $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ est un réseau dans un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{C}^n$. Nous obtenons alors le résultat suivant :

Proposition **8.3.1** *Soit M une variété complexe supportant une action de $\mathbb{C}^n$ vérifiant (C_d), (H_-), et dont l'holonomie et le groupe dérivé sont tous deux de rang 4. Alors, M est un fibré holomorphe principal dont la fibre est un fibré principal topologiquement trivial en une courbe elliptique quadratique sur une courbe elliptique quadratique et dont la base est un tore complexe de dimension $n-1$*

Preuve Soit M une variété complexe de dimension $n+1$ et soit ϕ une action de $\mathbb{C}^n$ sur M vérifiant (C_d) et (H_-), avec la condition supplémentaire que l'holonomie et le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ sont de rangs égaux à 4.

Donnons nous $h_i, 1 \leq i \leq 4$ des éléments de $\pi_1(M)$ dont les holonomies λ_i respectives sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes. Appelons Π_1 le groupe $[h_4, \pi_1(M)]$, H le groupe engendré par les $h_i, 1 \leq i \leq 3$ et Π_2 le groupe $[H, H]$.

Les groupes Π_1 et Π_2 sont des sous-groupes de rang 3 de $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ donc, puisqu'il est clair qu'ils ne sont pas commensurables, leur intersection Π_3 est un sous-groupe de rang 2 de $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$.

Il existe alors un élément h du groupe engendré par les $h_i, 1 \leq i \leq 3$ tel que, à indice fini près, $\Pi_3 \subset [h, \pi_1(M)] \cap \Pi_2$. On peut même supposer que $h = h_1$.

Il existe un sous-groupe H' de rang 2 de H tel que $\Pi_3 = [h_4, H']$. On ne peut avoir h_1 dans H' (ni aucun multiple de h_1) sinon $[h_1, \pi_1(M)]$ serait de rang au plus 2. On peut donc supposer que h_2 et h_3 engendrent H'.

Si $H_{2,3}$ est le groupe engendré par h_2 et h_3, alors $[h_1, H_{2,3}]$ et $[h_4, H_{2,3}]$ sont commensurables, et il en est donc de même de $[h_1, \pi_1(M)$ et de $[h_1, \pi_1(M)$. On peut également supposer que $[h_1, h_2] = [h_3, h_4]$.

On pourra alors écrire $[h_2, h_4] = q_1 \cdot [h_1, h_3] + q_2 \cdot [h_1, h_2]$, avec q_1 et q_2 rationnels.

En outre, appelons $K_i, 1 \leq i \leq 4$ les pentes des fonctions affines définies par les h_i. On peut toujours supposer que $\lambda_1 = 1$ et que $K_1 = 0$.

Ecrivons alors les formules :

$$K_2 = [h_1, h_2] = [h_3, h_4] = \lambda_3 \cdot K_4 - \lambda_4 \cdot K_3$$

$$\lambda_2 \cdot K_4 - \lambda_4 \cdot K_2 = [h_2, h_4] = q_1 \cdot [h_1, h_3] + q_2 \cdot [h_1, h_2] = q_1 \cdot K_3 + q_2 \cdot K_2$$

Ainsi, en remplaçant K_2 par son expression :

$$\lambda_2 \cdot K_4 - \lambda_3\lambda_4 \cdot K_4 - (\lambda_4)^2 \cdot K_3 = q_1 \cdot K_3 + q_2\lambda_3 \cdot K_4 - q_2\lambda_4 \cdot K_3$$

Or, K_3 et K_4 sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. On doit donc avoir :

$$(\lambda_4)^2 - q_2 \cdot \lambda_4 + q_1 = 0$$

Ainsi, on a pris un élément h_4 dans $\pi_1(M)$ auquel on a juste imposé d'avoir une holonomie non nulle. Nous lui avons alors associé un élément h_1 qui possède les mêmes commutateurs à indice fini près et dont l'holonomie est $\mathbb{Z}$-linéairement indépendante. Nous avons constaté que le rapport que leurs holonomies était quadratique. Nous avons aussi associé à h_1 et h_4 deux éléments h_2 et h_3 engendrant un groupe Π tels que les $h_i, 1 \leq i \leq 4$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants et tels qu'à indice fini près, $[h_1, \Pi] = [h_4, \Pi]$.

Ainsi, pour tout élément ayant une holonomie non nulle, il existe un autre élément tel que le rapport de leurs holonomies soit quadratique irrationnel. On constate aisément que cela implique que tous les nombres quadratiques associés à tous les éléments ayant une holonomie non nulle sont dans un même corps quadratique.

Étudions maintenant la restriction de l'application commutateur au produit des abélianisés des groupes engendrés par h_1, h_4 et h_2, h_3. L'application commutateur nous induit une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire $[,]$ de $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ dans Π_3 où les deux $\mathbb{Z}^2$ de départ sont les abélianisés respectifs des groupes engendrés par h_1, h_4 et h_2, h_3. Cette application bilinéaire induit une application linéaire L sur $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ dont le noyau est de rang 2.

De plus, d'après l'hypothèse (H_-), l'image par $[,]$ d'un couple est non nulle dès que ses deux composantes sont non nulles. Il est alors facile de montrer qu'il existe deux éléments α_1, α_4 de l'abélianisé de $< h_1, h_4 >$ et deux éléments $< \alpha_2, \alpha_3 >$ de l'abélianisé de $< h_2, h_3 >$ tels que le noyau de L soit engendré par les deux éléments suiavants de $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$: $(\alpha_1 \otimes \alpha_2) - (\alpha_4 \otimes \alpha_3)$ et $(\alpha_1 \otimes \alpha_3) + (\alpha_4 \otimes \alpha_2)$.

On peut alors supposer, quitte à faire les bons choix au départ, que $\alpha_1 = h_1$. Appelons alors ρ l'holonomie de α_4 qui est un nombre quadratique, $K = [\alpha_1, \alpha_4]$, λ l'holonomie de α_2 et $K_2 = [\alpha_1, \alpha_2]$, $\mu = \rho' \cdot \lambda$ l'holonomie de α_3 où ρ' est dans $\mathbb{Q}(\rho)$ et $K_3 = [\alpha_1, \alpha_3]$.

Les deux relations $[\alpha_1, \alpha_2] = -[\alpha_4, \alpha_3]$ et $[\alpha_1, \alpha_3] = [\alpha_2, \alpha_4]$ imposent deux relations linéaires sur K, K_2, et K_3. Comme ces trois éléments engendrent un espace vectoriel de dimension 2, les deux relations obtenues doivent être proportionnelles. Cela impose des relations quadratiques sur λ et μ. La proposition découle alors d'un calcul simple. $\square$

Donnons maintenant un exemple d'une action de $\mathbb{C}^3$ vérifiant les conditions demandées. Considérons les huit biholomorphismes suivants de $\mathbb{C}^4$:

$$t_1 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \to (z_1, z_2, z_3, z_4 + 1)$$

$$t_2 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \to (z_1, z_2, z_3 + 1, z_4)$$

$$t_3 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \to (z_1, z_2, z_3 + e^{i\pi/3}, z_4)$$

$$t_4 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \to (z_1, z_2, z_3 + 2 \cdot e^{-i\pi/6}, z_4 + i)$$

$$u_1 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \to (z_1 + 1, z_2, z_3, z_4)$$

$$u_2 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \to (z_1 + i, z_2, z_3 + z_1, z_4)$$

$$u_3 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \to (z_1 - 2 \cdot e^{-i\pi/6}, z_2 + 1, z_3, z_4 + z_1)$$

$$u_4 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \to (z_1 + 2e^{-2i\pi/3}, z_2 + i, z_3 + 2e^{-i\pi/6} \cdot z_1, z_4 + i \cdot z_1)$$

Appelons π_1 le groupe engendré par ces huit transformations. Il est clair que les t_i sont centraux dans π_1. Calculons les autres commutateurs : $[u_1, u_2] = t_1$, $[u_1, u_3] = t_2$, $[u_1, u_4] = t_3$, $[u_2, u_3] = t_3$, $[u_2, u_4] = (t_3)^4 \circ (t_1)^{-1}$, $[u_3, u_4] = (t_3)^4 \circ (t_2)^{-4}$.

On montre alors simplement que l'action de π_1 sur $\mathbb{C}^4$ est libre, proprement discontinue, cocompacte et commute avec l'action de $\mathbb{C}^3$ par translations sur les trois dernières coordonnées. l'action de $\mathbb{C}^3$ passe donc au quotient en une action ϕ sur $M = \mathbb{C}^4/\pi_1$. Il est clair que ϕ est holomorphe, de codimension 1. Elle est à feuilles denses car l'image de l'holonomie est dense dans $\mathbb{C}$. L'holonomie est de rang 4 et d'après 5.2.7, elle préserve une forme de volume sur M. De plus, son groupe dérivé est exactement le groupe engendré par les $t_i, 1 \leq i \leq 4$.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que ϕ vérifie (H_-), ce qui résulte facilement du fait que $[u_1, u_2], [u_1, u_3], [u_1, u_4], [u_3, u_4]$ sont linéairement indépendants et que le rang de l'holonomie est égal à 4 (car $[u_1, u_4] = [u_2, u_3]$ et $[u_2, u_4] = [u_3, u_1]$). Ainsi, l'action ϕ vérifie bien toutes les propriétés demandées.

8.3.2 Cas où le groupe dérivé est de rang 6

Intéressons nous maintenant au cas où ϕ verifie (C_d), (H_-) et où le groupe dérivé de M est un réseau dans un $\mathbb{C}$-espace de dimension 3. Nous en faisons donc l'hypothèse.

Remarque **8.3.2** Dans une base bien choisie de $\mathbb{C}^3$, il existe trois nombres complexes μ, ν et ξ tels que le groupe dérivé de $\pi_1(M)$ soit le groupe engendré par les six éléments suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (-\nu,\mu,0); (-\xi,0,\mu); (0,-\xi,\nu)$$

$\triangleright$

En fait, la preuve de cette remarque est très simple. Il suffit de calculer, dans une base bien choisie, les commutateurs des éléments $h_i, 1 \leq i \leq 4$, que l'on suppose d'holonomies respectives $\lambda_i, 1 \leq i \leq 4$ engendrant l'image de l'holonomie et où on suppose de plus $\lambda_1 = 1$. On prend bien sûr pour base $(K; K_3; K_4)$ et on pose : $\mu = \lambda_2$, $\nu = \lambda_3$ et $\xi = \lambda_4$. On obtient immédiatement que les coordonnées des commutateurs sont celles annoncées dans la remarque, qui est donc démontrée.

On peut également ajouter que les nombres $1, \mu, \nu, \xi$ doivent être $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants et engendrer un sous-groupe dense de $\mathbb{C}$. Nous allons maintenant donner un exemple d'une action de $\mathbb{C}^4$ vérifiant les conditions imposées dans ce paragraphe.

Considérons les dix transformations suivantes de $\mathbb{C}^5$:

$$\begin{aligned}
t_{1,4} &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z,z_1,z_2,z_3,z_4+1)\\
t_{1,3} &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z,z_1,z_2,z_3+1,z_4)\\
t_{1,2} &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z,z_1,z_2+1,z_3,z_4)\\
t_{2,3} &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z,z_1,z_2-\pi^2,z_3+i\pi,z_4)\\
t_{2,4} &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z,z_1,z_2-i\pi^3,z_3,z_4+i\pi)\\
t_{3,4} &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z,z_1,z_2,z_3-i\pi^3,z_4+\pi^2)\\
h_1 &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z+1,z_1,z_2,z_3,z_4)\\
h_2 &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z+i\pi,z_1,z_2+z,z_3,z_4)\\
h_3 &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z+\pi^2,z_1+1,z_2,z_3+z,z_4)\\
h_4 &: (z,z_1,z_2,z_3,z_4) \to (z+i\pi^3,z_1+i,z_2,z_3,z_4+z)
\end{aligned}$$

Appelons π_1 le groupe engendré par toutes ces transformations. Il est clair que π_1 est un groupe de biholomorphismes affines unipotents de $\mathbb{C}^5$.

Lemme **8.3.1** *Le groupe π_1 agit librement et proprement discontinûment sur $\mathbb{C}^5$.*

Preuve On s'assure facilement que chaque $t_{i,j}, 1 \leq i < j \leq 4$ est central dans π_1. De plus, pour tout couple (i,j) tel que $1 \leq i < j \leq 4$, on a $[h_i, h_j] = t_{i,j}$.

Ainsi, le groupe dérivé de π_1, qui est aussi son centre, est le groupe engendré par les $t_{i,j}$. On s'assure alors facilement (comme dans le lemme 7.3.2) que cette action est libre et proprement discontinue. $\square$

L'action de π_1 sur $\mathbb{C}^5$ est de plus cocompacte. On peut voir cela en considérant un point quelconque de $\mathbb{C}^5$. On peut borner les deux premières coordonnées d'un point de son orbite en faisant agir les h_i. On peut ensuite borner les trois dernières coordonnées sans changer les deux premières en faisant agir les $t_{i,j}$.

Ainsi, le quotient de $\mathbb{C}^5$ par l'action de π_1 est une variété compacte M de dimension 5. De plus, l'action de $\mathbb{C}^4$ sur $\mathbb{C}^5$ par omission de la dernière coordonnée passe au quotient sur M en une action holomorphe localement libre. De plus, d'après 5.2.7, il existe une forme de volume sur M invariante par cette action. De plus, il est clair que les orbites de l'action sont denses et, comme le groupe dérivé du groupe fondamental de M est de rang 6, il est nécessaire que l'action ait une holonomie de rang 4 et satisfasse (H_-).

En définitive, l'action précédente vérifie bien toutes les conditions que nous avons demandées.

Nous avons donc épuisé tous les cas possibles et nous en déduisons entre autre le théorème 6.2.1.

Chapter 9

Actions à orbites non denses

Dans ce chapitre, nous discutons du cas où l'action ϕ vérifie la propriété (C) mais où ses orbites ne sont pas denses dans M. Comme nous le signalions à la fin du chapitre 4, il y a alors deux possibilités, que nous traiterons séparément.

9.1 Le cas des actions à orbites compactes

On suppose ici que l'action ϕ vérifie la propriété (C) et que toutes ses orbites sont compactes.

Nous cherchons alors à montrer le résultat suivant :

Proposition **9.1.1** *Soit M une variété supportant une action de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition (C) et qui a toutes ses orbites compactes. Alors, soit il existe un revêtement fini $\hat{M}$ de M et une application holomorphe de $\hat{M}$ sur une surface de Riemann compacte V qui est une fibration réelle et dont les fibres sont les orbites du relevé $\hat{\phi}$ de ϕ à $\hat{M}$, soit M est obtenue en recollant deux copies de $\bar{D} \times T^{2n}$ sur leur bord où $\bar{D}$ est le disque fermé et T^{2n} est le tore réel de dimension $2n$. De plus, le feuilletage défini par ϕ est le feuilletage en tores correspondant (le recollement préserve cette fibration sur $\partial D \times T^{2n}$).*

Commençons par la remarque suivante :

Remarque **9.1.2** Dans le cas où toutes les orbites sont compactes, il n'y a qu'un nombre fini de feuilles ayant de l'holonomie et l'holonomie de chacune de ces feuilles est finie. $\triangleright$

Preuve Soit F une feuille de $\mathcal{F}$ ayant de l'holonomie. Le feuilletage étant transversalement riemannien, l'holonomie de cette feuille ne peut être constituée que de rotations locales. Si l'angle d'une telle rotation est irrationnel, alors les feuilles voisines de F ne sont pas compactes ce qui est contraire à notre hypothèse. Ainsi, l'holonomie d'une feuille est finie.

De plus, pour toute feuille F de $\mathcal{F}$, il existe un voisinage de F, saturé par $\mathcal{F}$ et ne contenant pas d'autre feuille ayant de l'holonomie que F. En effet, s'il y avait des feuilles ayant de l'holonomie aussi proches qu'on veut de F, un point de F serait envoyé par des éléments d'holonomie sur des points de F proches pour la topologie ambiante de F mais pas pour la topologie fine de la feuille F. Cela contredirait la compacité de F, qui ne serait pas une feuille propre.

Ainsi, il n'y a qu'un nombre fini de feuilles ayant de l'holonomie. □

Montrons maintenant la proposition :

Preuve Soit M une variété satisfaisant aux conditions de la proposition. Alors, d'après le lemme précédent, l'espace des orbites de ϕ possède une structure naturelle d'orbifold qui est topologiquement une variété. Si, de plus, cette orbifold est bonne, alors il existe un revêtement de M qui est un fibré holomorphe dont les fibres sont des tores complexes et dont la base est l'orbifold non singulière qui revêt l'orbifold de départ.

Si, par contre, cette orbifold est mauvaise, on connait sa structure d'après [?]. Il s'agit d'une sphère ayant un ou deux point singuliers. Dans les deux cas, on peut supposer que le(s) point(s) singulier(s) se trouve(nt) au(x) pole(s). On découpe alors la sphère suivant l'équateur et on regarde la topologie des deux morceaux obtenus comme images réciproques des hémisphères. Il s'agit du quotient d'un produit $D \times T^{2n}$ par un groupe cyclique agissant par rotation sur D et par translations sur T^{2n}. Il est alors clair que ce morceau est lui-même difféomorphe à un produit $D \times T^{2n}$.

De plus, nous avons montré que M était obtenue en recollant deux tels morceaux le long de leur bord, ce qui montre la proposition. □

9.2 Cas où l'adhérence de certaines orbites est de codimension réelle égale à 1

Nous supposons toujours que ϕ vérifie (C). Nous faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire qu'il existe au moins une orbite de ϕ dont l'adhérence est une sous-variété réelle compacte de codimension 1 de M.

Les feuilles dont l'adhérence n'est pas une sous-variété de codimension réelle égale à 1 sont les feuilles compactes. Nous cherchons à montrer la proposition suivante :

Proposition **9.2.1** *L'ensemble M' des points appartenant aux orbites non compactes est un ouvert de M, et est, à revêtement d'ordre 2 près, un fibré (réel) au* *dessus d'une variété de dimension 1, les fibres étant les adhérences des orbites de l'action.*

Si cette variété est l'intervalle ouvert, il y a exactement deux orbites compactes pour le revêtement de M, les adhérences des autres orbites sont des tores et on obtient la variété qui revêt M en recollant deux variétés de la forme $T \times \bar{D}$ le long de leur bord où T est un tore de dimension réelle $2n$ et où $\bar{D}$ est un disque fermé

Si cette variété est le cercle, le feuilletage défini par l'action est développable (en fait transversalement euclidien ou hyperbolique).

Preuve On appellera M' le complémentaire des orbites compactes de M.

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme **9.2.1** *Les adhérences des feuilles non compactes forment un feuilletage de M'. Ce feuilletage possède au plus une feuille ayant de l'holonomie et l'holonomie de cette feuille est d'ordre au plus 2.*

En effet, le feuilletage considéré est un feuilletage de codimension 1 à feuilles compactes. De plus, les feuilles compactes étant de codimension réelle égale à 2, la variété M' est connexe. Alors, si M' n'est pas transversalement orientable, il existe un revêtement d'ordre 2 de M' sur lequel le relevé du feuilletage sur M est transversalement orientable. D'après ([**?**]],Th II.3.12), un tel revêtement est un fibré réel au dessus d'une variété de dimension 1 réelle.

On peut donc supposer que M' fibre lui-même sur une variété réelle de dimension 1.

Si cette variété est l'intervalle, l'intersection (dans M) des adhérences des images réciproques des intervalles de la forme $]0, \epsilon[$ est compact, connexe et disjoint de M'. C'est donc une orbite compacte de ϕ. Il en va de même à l'autre bout de l'intervalle. L'action a donc exactement deux orbites compactes, qui sont des tores.

Prenons un petit voisinage tubulaire ouvert saturé d'une orbite compacte, qui est un tore. Considérons un petit disque transverse au feuilletage. Considérons alors le groupe d'holonomie de l'orbite compacte. le feuilletage défini par ϕ étant transversalement riemannien, ce groupe s'identifie à un groupe d'isométrie de notre disque transverse qui possède le centre du disque comme point fixe et dont toute autre orbite est dense dans un cercle centré . Ainsi, le feuilletage défini par l'adhérence des feuilles est le feuilletage produit du tore de base par le feuilletage en cercles concentriques sur le disque transverse.

Ce phénomène est vrai a priori dans un voisinage d'une feuille compacte mais si on considère l'image réciproque de $]0, \frac{1}{2}]$ et qu'on lui ajoute la feuille compacte correspondante, on s'aperçoit qu'elle se rétracte sur un petit voisinage tubulaire de l'orbite compacte (et même en préservant le feuilletage). De même à l'autre bout de la variété. On en déduit la proposition dans le cas où M' fibre sur un intervalle.

Si M fibre sur le cercle, l'action ϕ n'a pas d'orbite compacte et les orbites de la fibration de M sur le cercle sont les adhérences des orbites de ϕ qui sont sans holonomie. D'après ([**?**], Th IV.2.7), on peut affirmer que le revêtement universel de M est difféomorphe à $\mathbb{R}^{n+2}$ et que le relevé du feuilletage donné par la fibration de M sur S^1 est un feuilletage linéaire de codimension 1. Ainsi, le relevé du feuilletage défini par l'action ϕ est un feuilletage linéaire de codimension 2. En particulier, il est développable. □

Commençons par supposer que le feuilletage $\mathcal{F}$ défini par ϕ est développable, c'est-à-dire qu'il existe une fibration localement triviale du revêtement universel $\tilde{M}$ de M sur une surface de Riemann B dont les fibres sont les relevés des feuilles de $\mathcal{F}$. Pour la même raison que dans le cas où les feuilles étaient denses, cette fibration est une fibration holomorphe. On peut de plus supposer que B est simplement connexe, quitte à en prendre un revêtement. Ainsi, il n'y a que trois possibilités pour B et nous allons étudier chacune séparément.

9.2.1 Cas transversalement sphérique

Si la variété B est $\mathbb{C}P^1$, alors les biholomorphismes sont biholomorphiquement conjugués à des multiplications par des éléments de S^1, le cercle unité de $\mathbb{C}$. En effet, ce sont les seuls biholomrphismes qui préservent une forme de volume.

Un point fixe de $\mathbb{C}P^1$ par un de ces biholomorphismes correspond à une feuille de $\mathcal{F}$ ayant de l'holonomie. En fait, il est nécessaire que cette feuille soit compacte et que S^1 soit l'adhérence de son holonomie. En effet, si elle n'était pas compacte, sa projection sur S^2 ne le serait pas non plus, et son holonomie engendrerait un sous-groupe dense de $SO(3)$. Ainsi, le feuilletage serait à feuilles denses, ce qu'on a exclu. De plus, son holonomie étant infinie, elle est incluse dans S^1.

Il y a donc exactement deux feuilles compactes pour $\mathcal{F}$, les autres étant sans holonomie, et ayant toutes même stabilisateur Γ.

Le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est un fibré principal sur $\mathbb{C}P^1$, la fibre étant de la forme $\mathbb{C}^n/\Lambda$, avec $\Lambda \subset \Gamma$.

On a même le résultat suivant :

Proposition **9.2.2** *Pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, il existe des variétés compactes supportant une action de $\mathbb{C}^n$ qui sont revêtues par un fibré principal de classe γ sur $\mathbb{C}P^1$.*

Preuve Soit γ un élément de Γ. On construit un fibré principal holomorphe de classe γ sur $\mathbb{C}P_1$ de la façon suivante : On prend deux cartes $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n/\Gamma$ que l'on recolle sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n/\Gamma$ par l'identification suivante : $(z, Z) \sim (\frac{1}{z}, Z + z \cdot \gamma)$.

Il est alors clair que l'action par translations de $\mathbb{C}^n$ est localement libre et il suffit de voir qu'il existe un groupe d'automorphismes agissant librement et de façon cocompacte sur ce fibré en respectant l'action de $\mathbb{C}^n$. Il suffit pour cela de considérer un sous-groupe discret cocompact de $\mathbb{C}^n/\Gamma$, que nous noterons Δ et un homomorphisme de groupe h de Δ dans S^1 à image dense.

On définit alors une action de Δ sur le fibré de la manière suivante : Si (z, Z) est dans la première carte et δ dans Δ, alors $\delta \cdot (z, Z) = (h(\delta) \cdot z, Z + \delta)$. On vérifie aisément que cette action est libre, cocompacte et préserve l'action de $\mathbb{C}^n$. $\square$

9.2.2 Cas transversalement euclidien

Si la variété B est $\mathbb{C}$, alors le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement de Lie de groupe $\mathbb{C}$.

En effet, l'image de l'holonomie est constituée de biholomorphismes de $\mathbb{C}$ qui préservent une métrique riemannienne. Il s'agit d'applications affines dont le coefficient est de module 1. On cherche à voir que ce coefficient est exactement 1.

Supposons qu'un de ces coefficients ne soit pas égal à 1. L'isométrie de $\mathbb{C}$ correspondante a un unique point fixe z_0. Soit h un élément de $\pi_1(M)$ dont l'holonomie est l'isométrie considérée. L'action de h sur la feuille de $\tilde{M}$ correspondant à z_0 est la même que l'action par $\tilde{\phi}$ d'un élément du stabilisateur de la feuille de M correspondante. Comme z_0 n'a qu'un point fixe, h n'est pas dans le stabilisateur d'une feuille de $\tilde{M}$ proche de la précédente.

On en conclut que l'orbite de z_0 sous l'action de l'holonomie est discrète. Or, par compacité de M, cette orbite est aussi cocompacte.

L'ensemble des valeurs prises par les coefficients des éléments de l'image de l'holonomie est fini. On en déduit qu'il existe un sous-groupe fini de l'image de l'holonomie qui est formé de translations. L'orbites de z_0 sous l'action de ce groupe est discrète, donc toutes les orbites sous l'action de ce groupe sont discrètes. Ainsi, les orbites de l'action de $\pi_1(M)$ par holonomie sont aussi discrètes.

Cela implique que ϕ a toutes ses orbites compactes, ce qui est contradictoire. Ainsi, l'image de l'holonomie n'est constituée que de translations ce qui veut dire que le feuilletage défini par ϕ est transversalement de Lie de groupe $\mathbb{C}$.

La situation est alors extrêmement proche du cas où ϕ vérifiait (C_d). En particulier, le théorème 5.2.6 s'applique.

9.2.3 Cas transversalement hyperbolique

On suppose maintenant que B est le disque de Poincaré. Remarquons que dans le cas des surfaces, ce cas correspond aux surfaces de Inoue positives. Nous nous demandons si ces surfaces se généralisent en dimension supérieure. Nous allons pour cela étudier la représentation d'holonomie de $\pi_1(M)$.

LEMME **9.2.2** *L'image de la représentation d'holonomie de $\pi_1(M)$ dans $Isom(D)$ laisse fixe un point du bord de D. De plus, toute orbite de l'action sur D de l'holonomie est une réunion dénombrable d'horocycles correspondant à ce point fixe.*

PREUVE Soit H l'image de la représentation d'holonomie de $\pi_1(M)$ dans $Isom(D)$. Nous allons montrer que H ne contient pas d'élément elliptique et que la longueur de translation d'un élément hyperbolique de H est minorée. Le lemme s'en déduira alors facilement.

Le fait que H ne contienne pas d'élément elliptique est assez simple. Le stabilisateur de la feuille correspondant au point fixe de l'élément elliptique considéré est différent de celui d'une feuille correspondant à n'importe quel autre point. En particulier, ce point est fixe par tout élément de H, ce qui contredit la compacité de M.

Montrons que la longueur de translation d'un élément de H est minorée. Rappelons que comme M est sans orbite compacte, l'ensemble des orbites de ϕ est un cercle et que l'action de H sur le disque induit un feuilletage de dimension 1 sur D, les feuilles étant les composantes connexes des adhérences de orbites. Par compacité, la distance entre deux éléments de la même orbite qui ne sont pas dans la même feuille du feuilletage est minorée. Ainsi, si un élément hyperbolique de D possède une longueur de translation très petite, la géodésique stable constitue une feuille du feuilletage. Comme il s'agit de la seule géodésique invariante par l'élément hyperbolique en question, tout élément de H doit fixer globalement cette géodésique. Cela contredit la compacité de M.

Ainsi, le groupe H possède des éléments paraboliques. Considérons-en un et soit q le point du bord de D qu'il fixe. Si H possédait un élément hyperbolique ne fixant pas q, la composition de cet élément et de l'élément parabolique serait un élément elliptique. C'est impossible, donc tout élément de H fixe q.

Le lemme s'en déduit alors facilement. Soit p un point de D. Un élément de H envoyant p proche de lui-même est un élément parabolique fixant q. Comme p n'est pas isolé dans son adhérence, l'horocycle basé en q et contenant p est inclus dans l'adhérence de l'orbite de p sous l'action de H. Le feuilletage induit sur D par l'action de H est donc le feuilletage horocyclique basé en q. Par compacité de M, il existe des éléments hyperboliques mais les valeurs de leurs longueurs de translation forment un ensemble discret. Ainsi, l'adhérence de l'orbite de p est une réunion dénombrable d'horocycles. $\square$

On peut alors regarder le disque de Poincaré comme le demi-plan $\mathbb{H}^2$ en supposant que le point fixe de $\partial\mathbb{H}^2$ est le point à l'infini. Ainsi, H est inclus dans le groupe affine réel, c'est-à-dire l'ensemble des applications de $\mathbb{H}^2$ dans lui-même de la forme $z \to \alpha \cdot z + \beta$ avec α et β réels, $\alpha > 0$.

Une telle application est hyperbolique si et seulement si $\alpha \neq 1$ et a alors une longueur de translation proportionnelle à $|ln(\alpha)|$. Ainsi, l'ensemble des valeurs prises par α sur les éléments de H est un sous-groupe discret, donc monogène de $\mathbb{R}_+^*$. Les éléments paraboliques correspondent au sous-groupe formé des éléments pour lesquels $\alpha = 1$.

Finalement, on en déduit que l'image de l'holonomie est engendrée par une homothétie de centre 0 et dont on notera α le rapport et par un certain nombre de translations réelles de la forme $z \to z + \beta_i$.

9.2.4 Cas où le feuilletage défini par l'action ϕ n'est pas développable

Nous supposons que M supporte une action de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition (C). Nous nous intéressons maintenant au cas où le feuilletage défini sur M par cette action n'est pas un feuilletage développable. Nous allons en fait nous contenter de donner un exemple.

Considérons une matrice A de $M_2(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres γ_1 et γ_2 sont réelles de même signe mais ne sont pas commensurables. Considérons X le champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^2$ $\{(0,0)\}$ défini par cette matrice et appelons M le quotient de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ par l'exponentielle de la matrice A (autrement dit le temps 1 du flot de X). Comme les valeurs propres de la matrice A sont de même signe, M est une surface de Hopf.

Il est clair que X passe au quotient en un flot sur M que nous noterons encore X. De plus, X préserve une forme de volume sur M. En effet, le flot réel de X induit un difféomorphisme entre M et $S^3 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. De plus, le flot du champ iX agit sur $\mathbb{C}^2$ par isométries pour la métrique euclidienne canonique. Ainsi, les deux champs X et iX préservent la forme de volume sur M image réciproque de la forme de volume canonique sur $S^3 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ainsi, le flot de X vérifie la condition (C).

Pour voir que le feuilletage défini sur M par le flot de X n'est pas développable, on remarque que ce feuilletage est le produit par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ du feuilletage sur S^3 engendré par l'action suivante de $\mathbb{R}$:

$$r \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\gamma_1} \cdot z_1, e^{i\gamma_2} \cdot z_2)$$

où nous avons supposé γ_1 et γ_2 non commensurables. Ce feuilletage est le prototype du feuilletage transversalement riemannien non développable (cf [?]).

Ainsi, le flot de X nous donne un exemple d'action de $\mathbb{C}$ sur une surface qui vérifie la condition (C) mais qui n'est pas développable.