

Licence de Sciences 1^{ère} année
Parcours renforcé
2L03R
Université de Poitiers
Année 2007-2008

Cours d'Analyse élémentaire

par BOSIO Frédéric

Contents

1	Suites	3
1.1	Propriétés de l'ensemble \mathbb{N} et de ses sous-ensembles	3
1.2	Topologie de \mathbb{R}	7
1.3	Introduction aux suites	13
1.4	Suites monotones	15
1.5	Suites bornées	17
1.6	Suites convergentes	18
1.7	Limites infinies	23
1.8	Suites extraites	26
1.9	Suites adjacentes	28
1.10	Suites de Cauchy	29
1.11	Suites obtenues par itération (dites parfois "suites définies par récurrence" ou "suites récurrentes")	31
1.12	Suites et topologie	32
1.13	Suites à valeurs complexes	34
	Exercices	38
2	Limites de fonctions et continuité	41
2.1	Limites de fonctions	41
2.2	Continuité. Définition et premières propriétés	48
2.3	Exemples de fonctions continues	52
2.4	Fonctions continues sur des intervalles	53
	Exercices	58
3	Dérivation	60
3.1	Définition et premières propriétés	60
3.2	Fonctions dérivées des fonctions usuelles	64

3.3	Dérivation et variations des fonctions	65
3.4	Dérivées d'ordre supérieur	70
3.5	Fonctions convexes	73
	Exercices	79
4	Développements limités	81
4.1	Comparaison	81
4.2	Développements limités	85
4.3	Opérations élémentaires sur les développements limités	89
4.4	Applications des développements limités à l'étude des fonctions . . .	93
4.5	Variantes des notions de comparaison	95
	Exercices	97
5	Intégration	99
5.1	Intégration des fonctions en escalier sur un intervalle	99
5.2	Intégrale de Riemann	103
5.3	Intégration des fonctions continues	110
5.4	Calcul d'intégrales	111
5.5	Calcul approché d'une intégrale	117
	Exercices	119

1 Suites

1.1 Propriétés de l'ensemble \mathbb{N} et de ses sous-ensembles

Il est difficile de bien aborder l'étude des suites sans quelques connaissances fondamentales sur l'ensemble des entiers naturels et ses parties. Rappelons l'existence d'un ordre "naturel" sur les entiers naturels, que nous ne redéfinissons pas. Nous commençons par le résultat suivant, qui est fondamental :

THÉORÈME 1.1 *Toute partie de \mathbb{N} , excepté la partie vide, possède un plus petit élément (plus petit au sens de l'ordre).*

DÉMONSTRATION Nous le montrons par une récurrence (forte) sur un élément de la partie considérée. Plus précisément, posons l'hypothèse de récurrence suivante : H_n : Toute partie de \mathbb{N} , contenant n possède un plus petit élément.

Il est clair que H_0 est vraie car si une partie de \mathbb{N} , contient 0, alors c'est son plus petit élément.

Prenons maintenant un entier naturel $k \geq 1$ et supposons que H_i soit vraie pour tout entier naturel i vérifiant $i < k$. Montrons alors H_k . Soit E une partie de \mathbb{N} , contenant k .

Si E contient un entier i tel que $i < k$, alors, H_i étant vraie par hypothèse, E contient un plus petit élément.

Si E ne contient aucun entier i strictement inférieur à k , alors k est le plus petit élément de E .

On a donc montré H_k et, par le principe de récurrence forte, H_n est vraie quel que soit n .

Comme toute partie non vide de \mathbb{N} contient un entier naturel, l'hypothèse précédente est valable pour cet entier et la partie considérée a bien un plus petit élément. \square

DÉFINITION 1.1 *On dit qu'une partie E de \mathbb{N} est finie s'il existe un entier naturel n et une bijection de l'ensemble $[1..n]$ sur l'ensemble E . Si la partie E de \mathbb{N} n'est pas finie, on dit qu'elle est infinie.*

Ici, l'ensemble $[1..n]$ désigne l'ensemble des entiers i vérifiant $1 \leq i \leq n$; en particulier, l'ensemble $[1..0]$ désigne l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble qui n'a aucun élément. Ainsi, l'ensemble vide est une partie finie de \mathbb{N} .

PROPOSITION 1.2 *Soit E une partie de \mathbb{N} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) E est finie ;*
- ii) E est majorée ;*
- iii) Soit E est vide, soit E possède un plus grand élément.*

PREUVE Montrons d'abord l'implication *ii) \Rightarrow i)*, c'est-à-dire que toute partie majorée de \mathbb{N} est finie. Nous procédons par récurrence sur le (un) majorant de E .

On pose H_n l'hypothèse suivante : Toute partie de \mathbb{N} qui est majorée par n est finie.

Montrons H_0 : Il n'existe que deux parties de \mathbb{N} qui sont majorées par 0, à savoir l'ensemble vide et l'ensemble qui a 0 pour seul élément. L'ensemble vide est fini d'après ce qu'on a dit, le singleton réduit à $\{0\}$ est aussi fini car l'application de $[1\dots 1]$ ($= \{1\}$) dans $\{0\}$ envoyant 1 sur 0 est une bijection.

Montrons que, pour tout entier k , si on a H_k alors on a aussi H_{k+1} : Supposons H_k et soit F une partie de \mathbb{N} majorée par $k+1$. On a alors deux possibilités :

- Si $k+1$ n'est pas dans F , alors k majore F et d'après l'hypothèse on a la bijection désirée.

- Si $k+1$ est dans F , alors on a un entier n_0 et une bijection ϕ de $[1\dots n_0]$ dans $F \setminus \{k+1\}$ car cette dernière partie est majorée par k . On peut alors définir une bijection ψ de $[1\dots n_0+1]$ dans F en posant $\psi(i) = \phi(i)$ si i est dans $[1\dots n_0]$ et $\psi(n_0+1) = k+1$.

Cela prouve H_{k+1} sous l'hypothèse H_k et, par le principe de récurrence, cela prouve que toute partie majorée de \mathbb{N} est finie.

Montrons réciproquement *i) \Rightarrow ii)*, soit que toute partie finie de \mathbb{N} est majorée. Nous procéderons par récurrence sur l'entier n de la définition.

On pose H'_n l'hypothèse suivante : Toute partie de \mathbb{N} qui est en bijection avec $[1\dots n]$ est majorée.

Si $n = 0$, l'ensemble $[1\dots n]$ est vide et aucun autre ensemble n'est en bijection avec lui. De plus, il est clairement majoré dans \mathbb{N} (par exemple par 0). Ainsi, H'_0 est vraie.

Montrons que, pour tout entier k , si on a H'_k alors on a aussi H'_{k+1} : Supposons H'_k et soit ϕ une bijection de $[1\dots k+1]$ dans une partie E de \mathbb{N} . Si on restreint ϕ à $[1\dots k]$, on obtient une bijection de $[1\dots n]$ dans $E \setminus \{\phi(k+1)\}$. D'après l'hypothèse de récurrence cette dernière partie est majorée et appelons-en M un majorant. On a alors deux possibilités :

- Si $\phi(k+1) \leq M$, alors M est un majorant de E .

- Si $\phi(k+1) \geq M$, alors $\phi(k+1)$ est un majorant de E .

De toute façon, E est majorée.

Cela prouve H'_{k+1} sous l'hypothèse H'_k et, par le principe de récurrence, cela prouve que toute partie finie de \mathbb{N} est majorée.

Nous avons donc montré l'équivalence *i) \Leftrightarrow ii)*.

Montrons à présent l'implication *iii) \Rightarrow ii)*.

Si E est vide, alors tout entier naturel, par exemple 0, en est un majorant.

Si E possède un plus grand élément, que nous notons M , alors on a $x \leq M$ pour tout x de E , autrement dit M est un majorant de E .

On a donc bien l'implication voulue.

Reste l'implication $ii) \Rightarrow iii)$.

Supposons donc que E est une partie majorée de \mathbb{N} . L'ensemble de ses majorants est une partie non vide de \mathbb{N} et possède donc un plus petit élément que nous notons M .

Si M est dans E , alors, comme on a $x \leq M$ pour tout x de E , M est le plus grand élément de E , ce qui montre que E en a un.

Si M n'est pas dans E , alors on a $x < M$ pour tout x de E . Si M n'était pas égal à 0, on aurait, pour tout x de E , $x \leq M - 1$ et $M - 1$ serait aussi majorant de E , ce qui n'est pas le cas. On doit donc avoir $M = 0$ et tout élément x de E est un entier naturel vérifiant $x < 0$. Comme aucun entier naturel ne vérifie cette inégalité, c'est que E est vide.

On a donc bien montré l'implication voulue.

Finalement, on a bien l'équivalence des assertions $i)$, $ii)$ et $iii)$. \square

COROLLAIRE 1.3 *Toute partie d'une partie finie de \mathbb{N} est elle-même finie.*

COROLLAIRE 1.4 *La réunion de deux parties finies de \mathbb{N} est aussi une partie finie de \mathbb{N} . Plus généralement, la réunion de n parties finies de \mathbb{N} , pour un entier naturel n , est aussi une partie finie de \mathbb{N} .*

PROPOSITION 1.5 *Soit E une partie finie de \mathbb{N} . Alors, il existe un entier naturel n et une bijection strictement croissante ϕ de $[1..n]$ dans E . De plus, l'entier n et la bijection ϕ sont uniques.*

En fait, cela revient à classer les éléments de E dans l'ordre croissant (ce qu'on sait bien sûr possible par expérience).

PREUVE Commençons par prouver l'unicité d'une telle application. Supposons qu'on ait une bijection strictement croissante ϕ_1 de $[1..n_1]$ dans une partie finie E de \mathbb{N} et une bijection strictement croissante ϕ_2 de $[1..n_2]$ dans cette même partie E . On doit alors montrer que $\phi_1 = \phi_2$. On peut supposer $n_1 \leq n_2$. S'il existait un $k \leq n_1$ pour lequel on aie $\phi_1(k) \neq \phi_2(k)$, alors appelons k_0 le plus petit de tous ces entiers.

Ainsi, pour tout $k \in [1..n_1]$, on a $\phi_1(k) = \phi_2(k)$. Si on avait $n_1 > n_2$, alors $\phi_2(n_1 + 1)$ serait dans E , donc on pourrait trouver k_0 dans $[1..n_1]$ tel que $\phi_1(k_0) = \phi_2(n_1 + 1)$. Mais, comme k_0 est dans $[1..n_1]$, on a aussi $\phi_1(k_0) = \phi_2(k_0)$ et les deux entiers k_0 et

$n_1 + 1$ devraient avoir la même image par ϕ_2 . Comme ils sont différents et que ϕ_2 est injective, on aboutirait à une contradiction.

Pour prouver l'existence de la bijection, on peut procéder par récurrence sur un majorant de E . On pose donc H_n : Pour toute partie E de \mathbb{N} majorée par n , il existe un entier n_0 et une bijection strictement croissante de $[1..n_0]$ dans E .

H_0 est vraie car il n'y a rien à vérifier pour montrer la stricte croissance d'une application ayant au plus un élément au départ.

Soit k un entier pour lequel H_k est vraie et soit E une partie de \mathbb{N} majorée par $k + 1$. Alors, si E ne contient pas $k + 1$, E est majorée par k et l'hypothèse de récurrence nous fournit la bijection désirée.

Si E contient $k + 1$, alors considérons $E \setminus \{k + 1\}$. C'est une partie de \mathbb{N} majorée par k . Par hypothèse de récurrence, on a un entier n_0 et une bijection strictement croissante ϕ de $[1..n_0]$ dans $E \setminus \{k + 1\}$. En définissant ψ sur $[1..n_0 + 1]$ par $\psi(j) = \phi(j)$ si $j \leq n_0$ et $\psi(n_0 + 1) = k + 1$, on obtient une bijection strictement croissante de $[1..n_0 + 1]$ dans E .

Ainsi, on a bien H_{k+1} et le principe de récurrence permet de conclure la validité de H_n pour tout n . La proposition en découle. \square

DÉFINITION 1.2 Soit E une partie finie de \mathbb{N} . L'entier n pour lequel il existe une bijection (strictement croissante) de $[1..n]$ dans E s'appelle le cardinal (ou le nombre d'éléments) de E . On le note $\#E$ ou $\text{Card}E$.

PROPOSITION 1.6 Soit E une partie infinie de \mathbb{N} . Alors il existe une unique bijection strictement croissante de \mathbb{N} dans E .

Ici encore, cela revient à ranger les éléments de E dans l'ordre croissant.

PREUVE Montrons d'abord l'unicité. Supposons qu'on ait deux bijections strictement croissantes et distinctes ϕ_1 et ϕ_2 de \mathbb{N} dans une de ses parties E . Soit alors n le plus petit entier pour lequel $\phi_1(n) \neq \phi_2(n)$. Quitte à les intervertir, on peut supposer que $\phi_1(n) < \phi_2(n)$. Appelons alors n' l'antécédent de $\phi_1(n)$ par ϕ_2 . Comme $\phi_2(n') < \phi_2(n)$ et que ϕ_2 est strictement croissante, cela veut dire que $n' < n$. Mais alors, par définition de n , on a $\phi_1(n') = \phi_2(n') = \phi_1(n)$. Cela contredit l'injectivité de ϕ_1 , ce qui est contradictoire.

On a donc bien l'unicité de la bijection strictement croissante de \mathbb{N} dans E .

Montrons maintenant l'existence de cette bijection. Construisons en fait sa bijection réciproque. Pour tout élément i de E , posons $E_{<i}$ l'ensemble des éléments de E qui sont strictement inférieurs à i . C'est un ensemble fini car majoré (par i). Appelons donc ϕ l'application de E dans \mathbb{N} qui à un élément i associe le cardinal de $E_{<i}$.

Il est clair que ϕ est strictement croissante. En effet, si on a deux éléments $i_1 < i_2$, alors $E_{<i_1} \cup \{i_1\}$ est inclus dans $E_{<i_2}$ et a donc un cardinal inférieur. Donc $\phi(i_1) < \phi(i_2)$.

Vérifions que ϕ est bijective. L'injectivité découle du fait que ϕ est strictement croissante.

Montrons par récurrence que ϕ est surjective. Il est déjà clair que si i_0 est le plus petit élément de E , l'ensemble $E_{<i_0}$ est vide et donc $\phi(i_0) = 0$.

Supposons maintenant que l'entier k soit dans l'image de ϕ , et appelons i un de ses antécédent (en fait il n'en a qu'un par injectivité de ϕ). L'ensemble E étant infini, il n'est pas majoré et il existe donc des éléments de E qui sont strictement supérieurs à i . Soit j le plus petit d'être eux. On a $E_{<j} = E_{<i} \cup \{i\}$, ce qui donne $\phi(j) = \phi(i) + 1 = k + 1$.

Par le principe de récurrence, tous les entiers sont dans l'image de ϕ qui est ainsi surjective.

L'application ϕ est une bijection strictement croissante de E dans \mathbb{N} et sa bijection réciproque est elle strictement croissante de \mathbb{N} dans E , ce qui montre l'existence d'une telle bijection.

Cela termine la preuve de la proposition. \square

1.2 Topologie de \mathbb{R}

Nous nous intéressons ici aux propriétés analytiques de l'ensemble des nombres réels.

Bornes supérieure et inférieure

DÉFINITION 1.3 Soit E une partie de \mathbb{R} . On dit qu'un réel M est un majorant de E si on a, pour tout $x \in E$, $M \geq x$. On dit qu'un réel m est un minorant de E si on a, pour tout $x \in E$, $m \leq x$.

On dit que la partie E est majorée si elle a un majorant, qu'elle est minorée si elle a un minorant et qu'elle est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

DÉFINITION 1.4 Soit E une partie de \mathbb{R} . On dit qu'un réel M est la borne supérieure de E si M est un majorant de E et si tout majorant M' de E vérifie $M' \geq M$.

De même, on dit qu'un réel m est la borne inférieure de E si m est un minorant de E et si tout minorant m' de E vérifie $m' \leq m$.

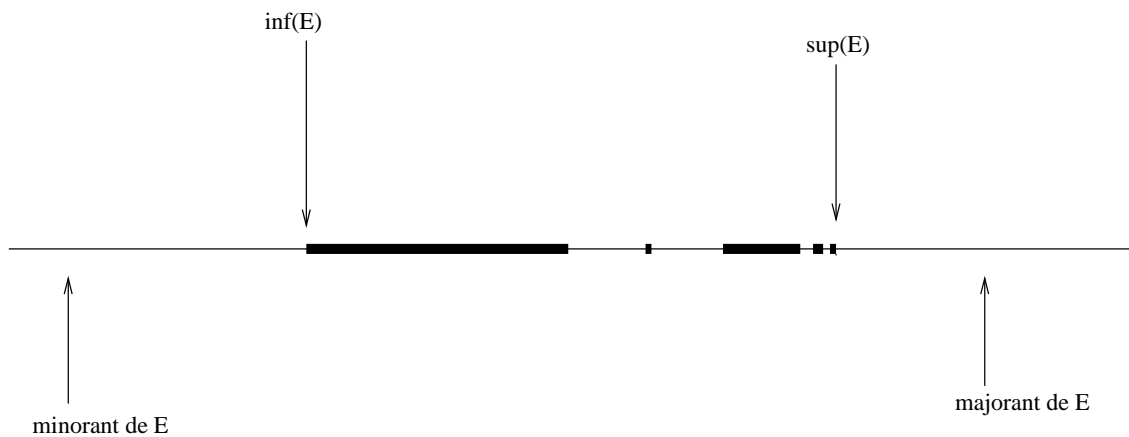
EXEMPLE 1.2.1 Si une partie E de \mathbb{R} possède un élément M plus grand que tous les autres, alors elle n'est pas vide (elle contient M), elle est majorée (par M), et sa

borne supérieure est M (car, comme $M \in E$, tout majorant de E doit être $\geq M$). De même, si une partie de \mathbb{R} possède un plus petit élément, alors ce plus petit élément est sa borne inférieure.

L'ensemble \mathbb{Z} n'est ni majoré, ni minoré.

Soient $a < b$ deux réels. Alors l'intervalle $]a; b[$ possède a comme borne inférieure et b comme borne supérieure. En effet, si $x \in]a; b[$, alors $a < x$. Réciproquement, si $x > a$, alors x n'est pas un minorant de $]a; b[$ (par exemple, $\min(\frac{a+x}{2}, \frac{a+b}{2})$ est dans $]a; b[$ et est strictement plus petit que x).

E :



Il est clair que si une partie E de \mathbb{R} possède une borne supérieure, alors celle-ci est unique (si on en a deux M_1 et M_2 , on a à la fois $M_1 \leq M_2$, car M_1 est borne inférieure de E et M_2 majorant de E , et $M_1 \leq M_2$ pour des raisons analogues, donc $M_1 = M_2$). C'est également vrai de la borne inférieure.

Il est clair aussi que pour avoir une borne supérieure, une partie de \mathbb{R} doit être majorée (sinon elle n'a aucun majorant) et non vide (sinon tout réel la majore et \mathbb{R} n'a pas de plus petit élément). De même, pour avoir une borne inférieure, une partie de \mathbb{R} doit être minorée et non vide.

Nous admettrons le résultat suivant, qui est une propriété fondamentale de \mathbb{R} :

THÉORÈME 1.7 *Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} possède une borne supérieure.*

Ce fait a des conséquences que nous ne cesserons de découvrir sur l'analyse réelle.

On utilisera fréquemment la caractérisation suivante de la borne supérieure :

PROPOSITION 1.8 *Soit E une partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} . Alors, sa borne supérieure M (resp. sa borne inférieure m) est l'unique réel qui*

vérifie les deux propriétés suivantes :

i) M majore E (resp m minore E).

ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x > M - \epsilon$ (resp $x < m + \epsilon$).

PREUVE Soit E une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , M sa borne supérieure. Alors M est par définition un majorant de E . Prenons $\epsilon > 0$. Alors $M - \epsilon < M$ et donc $M - \epsilon$ n'est pas un majorant de E . Il existe donc x dans E tel que $x > M - \epsilon$.

Réciproquement, supposons que nous ayons une partie E de \mathbb{R} et un réel M qui vérifient les conditions i) et ii). Dans ce cas M est un majorant de E . Si on avait un majorant $M' < M$ de E , alors, en posant $\epsilon = M - M'$, on aurait $\epsilon > 0$ et donc un réel $x \in E$ tel que $x > M - \epsilon = M'$. Cela contredit le fait que M' est un majorant de E . Il n'y a donc pas de majorant de E strictement inférieur à M . Donc M est bien la borne supérieure de E .

La preuve est analogue dans le cas de la borne inférieure. \square

Topologie de \mathbb{R}

DÉFINITION 1.5 Soit E une partie de \mathbb{R} et a un réel. On dit que a est intérieur à E ou que E est un voisinage de a s'il existe un réel strictement positif η tel que tout l'intervalle $]a - \eta; a + \eta[$ soit inclus dans E .

On dit que a est un point adhérent à E si, pour tout réel strictement positif η , l'intervalle $]a - \eta; a + \eta[$ a une intersection non vide avec E .

Il est immédiat qu'un point intérieur à une partie est un élément de cette partie et que tout élément d'une partie en est un point adhérent.

On remarque en outre facilement qu'un point a est intérieur (resp adhérent) à une partie E si et seulement si ce n'est pas un point adhérent (resp intérieur) à $\mathbb{R} \setminus E$.

REMARQUE 1.9 La borne supérieure d'une partie non vide et majorée de \mathbb{R} est un point adhérent à la partie considérée. Il en est de même de la borne inférieure d'une partie non vide et minorée.

En effet, soit E une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , M sa borne supérieure. Si on se donne $\eta > 0$, on sait qu'il existe un élément de E qui est strictement plus grand que $M - \eta$. Il est en outre inférieur à M , donc se trouve dans l'intervalle $]M - \eta; M]$, et a fortiori dans l'intervalle $]M - \eta; M + \eta[$. Ainsi, l'intersection de $]M - \eta; M + \eta[$ avec E est non vide.

La preuve concernant la borne inférieure est analogue.

DÉFINITION 1.6 Une partie E de \mathbb{R} est dite ouverte si tous ses éléments lui sont intérieurs.

Une partie de \mathbb{R} est dite fermée si elle contient tous les éléments qui lui sont adhérents.

EXEMPLE 1.2.2 Prenons deux réels $a < b$. Alors l'intervalle ouvert $]a; b[$ est une partie ouverte de \mathbb{R} et l'intervalle fermé $[a; b]$ est une partie fermée de \mathbb{R} .

En effet, si x est dans $]a; b[$, posons $\eta = \min(\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2})$. Alors η est strictement positif et $]x - \eta; x + \eta[=]\frac{x+a}{2}; \frac{x+b}{2}[$ est inclus dans $]a; b[$. Le réel x est donc intérieur à $]a; b[$, qui est bien ouvert.

Supposons maintenant que x soit un réel qui n'appartienne pas à l'intervalle $[a; b]$. Si $x < a$, posons $\eta = a - x$. On a alors pour tout y dans $]x - \eta; x + \eta[$, $y < x + \eta = x + a - x = a$, donc $y \notin [a; b]$. Ainsi, $]x - \eta; x + \eta[\cap [a; b]$ est vide. De même, si $x > b$, posons $\eta = x - b$. On a alors pour tout y dans $]x - \eta; x + \eta[$, $y > x - \eta = x - x + b = b$, donc $y \notin [a; b]$. Ainsi, $]x - \eta; x + \eta[\cap [a; b]$ est encore vide. Dans tous les cas, un réel hors de $[a; b]$ ne lui est pas adhérent. Cela prouve que $[a; b]$ est fermé.

PROPOSITION 1.10 Une partie de \mathbb{R} est ouverte si et seulement si son complémentaire est une partie fermée.

L'ensemble des points intérieurs à une partie E de \mathbb{R} est une partie ouverte et c'est la plus grande (pour l'inclusion) partie ouverte qui est incluse dans E . On l'appelle intérieur de E et on la note $\overset{\circ}{E}$.

L'ensemble des points adhérents à une partie E de \mathbb{R} est une partie fermée et c'est la plus petite partie fermée qui contient E . On l'appelle adhérence de E et on la note \overline{E} .

PREUVE Le premier point est simple. Les points adhérents au complémentaire de E sont ceux qui ne sont pas dans l'intérieur de E . Donc si E est ouverte, ces points ne sont pas dans E et sont donc dans son complémentaire qui, par conséquent, est fermé.

Et si E est fermé, les points intérieurs à son complémentaire sont ceux qui ne sont pas adhérents à E , soit tous les points de $\mathbb{R} \setminus E$, qui est donc ouvert. \square

On remarque immédiatement que si on prend deux parties $E \subset E'$ de \mathbb{R} , alors $\overset{\circ}{E} \subset \overset{\circ}{E'}$ et $\overline{E} \subset \overline{E'}$.

DÉFINITION 1.7 Une partie E de \mathbb{R} est dite dense (dans \mathbb{R}) si tous les réels lui sont adhérents.

Cela équivaut à demander que tous les intervalles qui ne sont pas réduits à un point aient une intersection non vide avec cet ensemble, soit encore que quels que soient les réels $a < b$, on ait un élément x de E tel que $a < x < b$.

PROPOSITION 1.11 *L'ensemble \mathbb{Q} est une partie dense de \mathbb{R} .*

PREUVE Soient $a < b$ deux réels. Il existe un entier naturel q tel que $q(b - a) > 1$. Il y a alors un entier p dans l'intervalle $]qa; qb[$ (par exemple $1 + E(qa)$) et le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est dans $]a; b[$. \square

Intervalles Nous effectuons ici quelques rappels sur les intervalles réels et en donnons une caractérisation très pratique.

On définit un intervalle réel comme une partie de \mathbb{R} appartenant à la liste suivante :

- L'ensemble vide ;
- Un singleton $\{x\}$ où x est un réel ;
- L'intervalle infini à gauche et à droite, \mathbb{R} tout entier, noté parfois $] - \infty; +\infty[$;
- Un intervalle infini à gauche, ouvert à droite : Pour un réel x , l'ensemble noté $] - \infty; x[$ des réels qui sont strictement inférieurs à x ;
- Un intervalle infini à gauche, fermé à droite : Pour un réel x , l'ensemble noté $] - \infty; x]$ des réels qui sont inférieurs à x ;
- Un intervalle ouvert à gauche, infini à droite : Pour un réel x , l'ensemble noté $]x; +\infty[$ des réels qui sont strictement supérieurs à x ;
- Un intervalle ouvert à gauche et à droite : Pour deux réels $x < y$, l'ensemble noté $]x; y[$ des réels qui sont strictement supérieurs à x et strictement inférieurs à y ;
- Un intervalle ouvert à gauche, fermé à droite : Pour deux réels $x < y$, l'ensemble noté $]x; y]$ des réels qui sont strictement supérieurs à x et inférieurs à y ;
- Un intervalle fermé à gauche, infini à droite : Pour un réel x , l'ensemble noté $[x; +\infty[$ des réels qui sont supérieurs à x ;
- Un intervalle fermé à gauche, ouvert à droite : Pour deux réels $x < y$, l'ensemble noté $[x; y[$ des réels qui sont supérieurs à x et strictement inférieurs à y ;
- Un intervalle fermé à gauche et à droite : Pour deux réels $x < y$, l'ensemble noté $[x; y]$ des réels qui sont supérieurs à x et inférieurs à y .

Remarquons qu'un intervalle ouvert à gauche et à droite est une partie ouverte de \mathbb{R} , et qu'un intervalle fermé à gauche et à droite est une partie fermée de \mathbb{R} .

En fait, les intervalles qui sont des parties ouvertes de \mathbb{R} sont soit l'ensemble vide, soit un intervalle qui, à gauche comme à droite, est soit ouvert soit infini. Les intervalles

qui sont des parties fermées de \mathbb{R} sont soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit un intervalle qui, à gauche comme à droite, est soit fermé soit infini.

Voici la caractérisation annoncée des intervalles réels :

PROPOSITION 1.12 *Une partie I de \mathbb{R} est un intervalle si et seulement si pour tout triplet (u, v, w) de réels tels que u et w sont dans I et $u < v < w$, on a aussi v dans I .*

PREUVE Pour montrer qu'un intervalle réel vérifie la propriété ci-dessus, on peut regarder chaque catégorie de la liste. La propriété est claire pour l'ensemble vide et les singletons car il n'y a aucun triplet vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour les autres catégories, la preuve est à chaque fois la même et nous allons la faire sur l'exemple d'un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite.

Considérons deux réels $a < b$ et l'intervalle $]a; b]$. Prenons alors un triplet (u, v, w) de réels vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors $u > a$ et $v > u$, donc $v > a$. Aussi, $w \leq b$ et $v < w$ donc $v \leq b$. On a donc alors $v \in]a; b]$ et $]a; b]$ vérifie bien la propriété voulue.

Montrons maintenant la réciproque, à savoir que si une partie I de \mathbb{R} vérifie la propriété demandée par l'énoncé, alors c'est un intervalle. Si I n'a pas d'élément ou en a un seul, c'est par définition un intervalle. On suppose donc que I possède au moins deux éléments. On essaie alors de savoir si I est ou non majoré et minoré et s'il contient ou non ses bornes éventuelles. Nous allons donner un exemple et faire un tableau.

Supposons que I ne soit pas minoré, mais soit majoré et contienne sa borne supérieure, notée a . Nous allons montrer que $I =]-\infty; a]$. Pour cela il est déjà clair que I est inclus dans $] - \infty; a]$, car cela équivaut à être majoré par a et que I l'est. Réciproquement, prenons $x \leq a$. Si $x = a$, on a bien x dans I par hypothèse. Si $x < a$, prenons $y < x$ dans I (ce qui est possible car I n'est pas minoré). Alors on a $y < x < a$ et y et a sont dans I . La propriété de l'énoncé implique alors que x aussi est dans I , et on obtient bien l'inclusion $] - \infty; a] \subset I$, d'où l'égalité.

Les autres cas sont analogues ; notons toutefois que si I n'avait pas contenu sa borne supérieure a , il aurait fallu, pour $x < a$, trouver z dans I vérifiant $x < z$, ce qui est possible car x ne majore pas I . En fait, le caractère non borné d'un côté de I donne un intervalle infini du côté considéré, le fait que I soit borné d'un côté et ne contienne pas sa borne donne un intervalle ouvert du côté considéré et le fait que I soit borné d'un côté et contienne sa borne donne un intervalle fermé du côté considéré. \square

Le tableau suivant récapitule la correspondance entre nature d'une intervalle et "position des bornes" :

à gauche ↓	à droite →	I non majoré	I ne contient pas sa borne sup b	I contient sa borne sup b
I non minoré		\mathbb{R}	$] - \infty; b[$	$] - \infty; b]$
I ne contient pas sa borne inf a		$] a; +\infty[$	$] a; b[$	$] a; b]$
I contient sa borne inf a		$[a; +\infty[$	$[a; b[$	$[a; b]$

COROLLAIRE 1.13 *L'intersection de deux intervalles est un intervalle, et même toute intersection d'une famille (éventuellement infinie) d'intervalles est un intervalle.*

Supposons qu'on ait une famille $(I_j)_{j \in J}$ d'intervalles. Montrons que leur intersection est aussi un intervalle. Soit (u, v, w) un triplet de réels tels que u et w sont dans $\bigcap_{j \in J} I_j$ et $u < v < w$. Alors pour tout j dans J , I_j est un intervalle et d'après la caractérisation des intervalles ci-dessus, v est dans I_j . Comme j est quelconque dans J , v est aussi dans $\bigcap_{j \in J} I_j$ et alors, toujours d'après la caractérisation ci-dessus, $\bigcap_{j \in J} I_j$ est bien un intervalle.

1.3 Introduction aux suites

DÉFINITION 1.8 *On appelle suite réelle une application de l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.*

Si u est une suite réelle, l'image de l'entier naturel n par u sera habituellement noté u_n de préférence à $u(n)$.

Si on a une fonction f , on dit qu'une suite u est la suite de terme général $f(n)$ si on a, pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.

En fait, il est sans doute bon de se représenter une suite pas tant comme une application, mais plutôt comme une succession de termes venant l'un après l'autre $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$

EXEMPLE 1.3.1 *Soit r un nombre réel. La suite u pour laquelle $u_n = r$ quel que soit n est appelée suite constante de valeur r . On la notera parfois \mathbf{r} .*

On peut prendre la suite u de terme général n , soit $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, \dots$

DÉFINITION 1.9 *Soit u une suite. On appelle terme de u un couple (n, u_n) où n est un entier naturel. L'entier n s'appelle l'indice du terme et u_n la valeur du terme.*

Notons toutefois que ce mot est employé parfois dans un autre sens, notamment dans le sens de "valeur" (par exemple, on dit parfois "suite à termes positifs" au sens de "suite à valeurs positives", ou "suite à termes de valeurs positives"). Mais par exemple, si on considère la suite de terme général $u_n = -n^2 + n + 3$, elle a trois termes positifs (car u_0, u_1 et u_2 le sont et pas les suivants) mais seulement deux valeurs positives 3 ($= u_0 = u_1$) et 1 ($= u_2$).

Opérations élémentaires sur les suites réelles

DÉFINITION 1.10 Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On appelle opposé de u la suite, notée $-u$, de terme général $-u_n$.

On appelle somme de u et de v la suite, notée $u+v$, de terme général $(u+v)_n = u_n + v_n$.

On appelle différence de u et de v la suite, notée $u - v$, de terme général $(u - v)_n = u_n - v_n$.

On appelle produit de u et de v la suite, notée uv , de terme général $(uv)_n = u_n \cdot v_n$.

Soit λ un nombre réel. On appelle produit de u par λ la suite, notée λu , de terme général $(\lambda u)_n = \lambda u_n$. (Remarquons que c'est aussi le produit de u par la suite constante de valeur λ).

On suppose de plus que v_n ne vaut 0 pour aucune valeur de n . On appelle alors inverse de v la suite, notée $\frac{1}{v}$, de terme général $\frac{1}{v_n}$ et quotient de u par v la suite, notée $\frac{u}{v}$, de terme général $\frac{u_n}{v_n}$.

Enfin, on dira qu'une suite u est inférieure à une suite v , et on écrira $u \leq v$ si pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq v_n$.

On remarque facilement que ces opérations satisfont les mêmes propriétés de base que dans les espaces plus familiers (comme \mathbb{R} ou \mathbb{Z}) :

PROPOSITION 1.14 Soit u, v, w trois suites réelles, λ et μ deux réels. On a alors :

1. L'addition est commutative, soit $u + v = v + u$.
2. L'addition est associative, soit $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. Le produit est commutatif, soit $uv = vu$.
4. Le produit est associatif, soit $(uv)w = u(vw)$.
5. Le produit est distributif par rapport à la somme, soit $u(v + w) = uv + uw$ et $(u + v)w = uw + vw$.
6. On a $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
7. On a $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
8. $-u = (-1)u$ et $-(-u) = u$.
9. Si v ne s'annule pas, $u \frac{1}{v} = \frac{u}{v}$ et $\frac{1}{\frac{1}{v}} = v$.

On a également l'existence d'éléments neutres et absorbants pour ces opérations :

$$u + \mathbf{0} = u, u \cdot \mathbf{1} = u, u \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot u = u, \mathbf{0} \cdot u = \mathbf{0}.$$

PREUVE Chacune de ces propriétés se vérifie immédiatement terme à terme, par exemple $(u + v)_n = u_n + v_n = v_n + u_n = (v + u)_n$ et l'égalité pour tout n de $(u + v)_n$ avec $(v + u)_n$ entraîne l'égalité des suites $u + v$ et $v + u$. Λ

1.4 Suites monotones

DÉFINITION 1.11 *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tous entiers m et n tels que $m \leq n$, on a $u_m \leq u_n$ (resp. $u_m \geq u_n$).*

Une suite qui est soit croissante soit décroissante est dite monotone.

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si pour tous entiers m et n tels que $m < n$, on a $u_m < u_n$ (resp. $u_m > u_n$).

Une suite est dite strictement monotone si elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.

En fait, pour étudier la monotonie d'une suite, on utilise très fréquemment le critère suivant, plus pratique à vérifier que la définition :

PROPOSITION 1.15 *Soit u une suite réelle. Alors, u est croissante (resp. décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) si et seulement si, pour tout entier n , on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$, $u_{n+1} > u_n$, $u_{n+1} < u_n$).*

PREUVE Traitons juste le cas croissant, la preuve dans les autres cas (décroissant, strictement croissant, strictement décroissant) étant tout à fait analogue.

Un sens est immédiat. Si u est monotone et n dans \mathbb{N} , alors $n + 1 \geq n$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$.

Dans l'autre sens, on se donne une suite u vérifiant $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n . Prenons alors deux entiers k et l tels que $k \leq l$. On va montrer $u_k \leq u_l$ par récurrence sur $l - k$. On pose donc l'hypothèse de récurrence suivante, pour un entier i :

(H_i) : Pour tout entier m , on a $u_m \leq u_{m+i}$.

Si $i = 0$ et $m \in \mathbb{N}$, on a bien $u_m \leq u_{m+0}$. Donc (H_0) est vraie.

Supposons maintenant que (H_{i_0}) soit vraie pour un certain entier i_0 . Alors soit $m \in \mathbb{N}$. On a $u_m \leq u_{m+i_0}$ par hypothèse de récurrence et $u_{m+i_0} \leq u_{m+i_0+1}$ d'après la propriété de u . Donc $u_m \leq u_{m+i_0+1}$ et la propriété (H_{i_0+1}) est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, la propriété (H_i) est donc vraie pour tout entier i , en particulier pour $k - l$ et on a donc bien $u_k \leq u_l$, ce qui prouve que u est effectivement croissante. Λ

Voici quelques propriétés élémentaires des suites monotones :

PROPOSITION 1.16 Une suite est à la fois croissante et décroissante si et seulement si elle est constante.

Somme Soient u et v deux suites croissantes (resp. décroissantes). Alors $u + v$ est croissante (resp. décroissante). De plus, si l'une des deux au moins l'est strictement, la somme l'est aussi.

Produit Soient u et v deux suites croissantes (resp. décroissantes) et positives. Alors uv est croissante (resp. décroissante) et positive.

Multiplication scalaire Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et u une suite. Alors, λu est croissante (resp. décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) si et seulement si u est croissante (resp. décroissante, strictement croissante, strictement décroissante).

Si λ est strictement négatif, (cas particulier $\lambda = -1$) et u une suite. Alors, λu (cas particulier $-u$) est croissante (resp. décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) si et seulement si u est décroissante (resp. croissante, strictement décroissante, strictement croissante).

Inversion Soit v une suite à valeurs strictement positives. Alors $\frac{1}{v}$ est croissante (resp. décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) si et seulement si v est décroissante (resp. croissante, strictement décroissante, strictement croissante).

PREUVE Le fait qu'une suite soit à la fois croissante et décroissante si et seulement si elle est constante est évident.

Supposons que u et v sont croissantes et vérifions que $u + v$ l'est aussi. Soit n un entier naturel. Alors $(u + v)_{n+1} - (u + v)_n = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n)$ est une somme de deux nombres positifs, donc est positif. Ainsi, $u + v$ est croissante.

Si maintenant u est strictement croissante et v croissante, on a, pour tout entier naturel n , $(u + v)_{n+1} - (u + v)_n = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n) \geq u_{n+1} - u_n > 0$. Donc $u + v$ croît strictement.

La preuve est analogue dans le cas (strictement) décroissant.

Supposons que u et v sont croissantes et positives. Alors on a, pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ et $v_{n+1} \geq v_n \geq 0$. Ainsi $(uv)_{n+1} \geq (uv)_n$ et la suite uv est donc croissante.

La preuve est analogue dans le cas (strictement) décroissant.

Si u est croissante et $\lambda > 0$, alors, pour tout n , on a $u_{n+1} \geq u_n$. On a alors aussi $\lambda u_{n+1} \geq \lambda u_n$ et la suite λu est donc croissante.

La preuve est analogue dans les cas décroissant, strictement croissant, strictement décroissant.

Si u est croissante et $\lambda < 0$, alors, pour tout n , on a $u_{n+1} \geq u_n$. On a alors $\lambda u_{n+1} \leq \lambda u_n$ et la suite λu est donc décroissante.

Pour u décroissante, l'inégalité $u_{n+1} \leq u_n$ entraîne $\lambda u_{n+1} \geq \lambda u_n$; pour u strictement croissante, l'inégalité $u_{n+1} > u_n$ entraîne $\lambda u_{n+1} < \lambda u_n$; pour u strictement décroissante, l'inégalité $u_{n+1} < u_n$ entraîne $\lambda u_{n+1} > \lambda u_n$ et, dans chaque cas, on conclut comme ci-dessus.

Supposons maintenant v à valeurs strictement positives. Si v est croissante, on a pour tout entier naturel n , $0 < v_n \leq v_{n+1}$ qui entraîne $\frac{1}{v_n} \geq \frac{1}{v_{n+1}}$ et la suite $\frac{1}{v}$ est bien décroissante. La preuve dans les autres cas est analogue. \blacktriangle

Attention : Il est par contre impossible de conclure en général quant à la monotonie de la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

1.5 Suites bornées

DÉFINITION 1.12 *On dit qu'une suite réelle u est majorée si l'ensemble de ses valeurs est une partie majorée de \mathbb{R} , autrement dit s'il existe un réel M tel qu'on ait, pour tout n , $u_n \leq M$. Un tel réel M s'appelle alors un majorant de la suite u .*

On dit qu'une suite réelle u est minorée si l'ensemble de ses valeurs l'est, soit s'il existe un réel m tel qu'on ait, pour tout n , $u_n \geq m$. Un tel réel m s'appelle alors un minorant de u .

On dit qu'une suite réelle u est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Une autre manière de dire que u est majorée est de dire qu'il existe une suite constante qui lui est supérieure.

REMARQUE 1.17 *Toute suite croissante est minorée. En effet, si u est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$. Donc u_0 est un minorant de u . De même, toute suite décroissante est majorée par son premier terme.*

Voici quelques propriétés élémentaires des suites bornées :

PROPOSITION 1.18 Valeur absolue *Une suite est bornée si et seulement si sa valeur absolue est majorée (la valeur absolue d'une suite de terme général u_n étant la suite de terme général $|u_n|$).*

Somme *La somme de deux suites bornées est bornée.*

Différence *La différence de deux suites bornées est bornée.*

Produit *Le produit de deux suites bornées est borné.*

Multiplication scalaire *Soient u une suite bornée et λ un réel. Alors λu est une suite bornée.*

PREUVE Supposons que la valeur absolue d'une suite u soit majorée, c'est-à-dire qu'on ait un réel M tel que pour tout entier naturel n , $|u_n| \leq M$. On a alors, pour tout entier n , $-M \leq u_n \leq M$, ce qui montre bien que u est bornée.

Réciproquement, supposons que u soit bornée et soient m et M deux réels tels que, pour tout entier n , $m \leq u_n \leq M$. Posons $A = \max(|m|, |M|)$. On a alors pour tout n , $u_n \leq M \leq |M| \leq A$ et $-u_n \leq -m \leq |m| \leq A$. En tout cas $|u_n| \leq A$ et donc la suite $|u|$ est bornée.

On peut utiliser cette caractérisation pour les autres propriétés :

Soient u et v deux suites bornées, M_u (resp. M_v) un réel tel qu'on ait pour tout n , $|u_n| \leq M_u$ (resp. $|v_n| \leq M_v$). On a alors pour tout n , $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M_u + M_v$. Ceci prouve que $u + v$ est bornée.

Sous les mêmes conditions, on a pour tout n , $|u_n - v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M_u + M_v$. Ceci prouve que $u - v$ est bornée.

Toujours sous les mêmes conditions, on a pour tout n , $|u_n v_n| \leq |u_n| \cdot |v_n| \leq M_u M_v$, ce qui prouve que uv est bornée.

Soient maintenant u une suite bornée et λ un réel. Soit M un réel tel qu'on ait pour tout n , $|u_n| \leq M$. On a alors pour tout n , $|\lambda u_n| = |\lambda| \cdot |u_n| \leq |\lambda| M$. Ceci prouve que λu est bornée. Λ

1.6 Suites convergentes

DÉFINITION 1.13 Soit u une suite et l un réel. On dit que u converge vers l , ou que l est la limite de u si pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, on ait $|u_n - l| \leq \epsilon$.

Une suite u est dite convergente s'il existe un réel l pour lequel u converge vers l .

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

N.B. : Lorsque l'on parle de la *nature* d'une suite, on fait référence à son caractère convergent ou divergent. Notamment, l'énoncé de certains exercices débute par "Déterminer la nature de la suite suivante :".

EXEMPLE 1.6.1 Pour tout réel λ , la suite constante de valeur λ est convergente, de limite λ .

La suite u de terme général $u_n = n$ est divergente.

La suite de terme général $\frac{1}{n}$ (ou $\frac{1}{n+1}$ si on l'exige définie sur \mathbb{N}) est convergente, de limite 0.

Soit $x \in]-1; 1[$. Alors, la suite de terme général x^n est convergente, de limite 0.

La suite de terme général $(-1)^n$ est divergente.

Si $|x| > 1$, la suite de terme général x^n est divergente (nous verrons que si $x > 1$, elle tend vers $+\infty$).

REMARQUE 1.19 Si $x > 0$, la suite de terme général x^n a aussi pour terme général $e^{\lambda n}$, pour $\lambda = \ln x$. Si $x < 0$, elle prend aussi, au signe près, la même forme. Réciproquement, pour λ réel, la suite de terme général $e^{\lambda n}$ a aussi pour terme général x^n où $x = e^\lambda$.

Notons la propriété suivante des suites, que l'on traduit parfois en disant que la nature d'une suite est une notion "asymptotique" :

PROPOSITION 1.20 Deux suites qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes (c'est à dire qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n = v_n$) sont soit toutes deux divergentes, soit toutes deux convergentes et elles ont alors la même limite.

PREUVE Supposons qu'on ait une suite u convergente, de limite l et une suite v qui ne diffère de u que par un nombre fini de termes, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n à l'exception d'un nombre fini, on a $u_n = v_n$. D'après l'équivalence entre parties finies et majorées de \mathbb{N} , il y a un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n = v_n$. Prenons alors $\epsilon > 0$. Soit N' un entier tel que pour tout $n \geq N'$, on ait $|u_n - l| \leq \epsilon$. Posons $A = \max(N, N')$ et prenons $k \geq A$. Alors, $v_k = u_k$ et donc $|v_k - l| = |u_k - l| \leq \epsilon$. Ceci prouve que la suite v converge vers l .

Si maintenant u est divergente et v n'en diffère que par un nombre fini de termes, alors v est aussi divergente car si v convergerait, u convergerait aussi d'après ce qui précède. Λ

N.B. : Ainsi, si deux suites ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, elles ont même nature. Cela permet l'abus de langage suivant :

On appelle parfois improprement suite une fonction u de \mathbb{N} dans \mathbb{R} dont le terme général n'est pas défini pour tout entier, mais est défini pour tous les entiers assez grands (ou de manière équivalente, pour tous les entiers sauf un nombre fini). Toutes les suites ayant les mêmes valeurs que u là où u est définie ont alors même nature, et en cas de convergence même limite, que u . On dit alors que la "suite" u a aussi cette nature (par exemple, comme vu ci-dessus, la "suite" de terme général $\frac{1}{n}$, qui n'est défini que pour $n > 0$, converge vers 0).

Voici quelques propriétés élémentaires des suites convergentes :

PROPOSITION 1.21 Unicité Si une suite u converge vers un réel l , alors elle ne converge vers aucun autre réel (autrement dit : La limite d'une suite, si elle existe, est unique).

Il est équivalent qu'une suite u converge vers un réel l , que la suite $u - l$ converge vers 0 ou que la suite $|u - l|$ converge vers 0.

Toute suite convergente est bornée.

Somme, différence, produit Soient u et v deux suites convergentes, de limites respectives l_u et l_v . Alors $u + v$ est convergente, de limite $l_u + l_v$, $u - v$ est convergente, de limite $l_u - l_v$, uv est convergente, de limite $l_u \cdot l_v$ et, si $l_v \neq 0$, la suite $\frac{u}{v}$ est définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{l_u}{l_v}$.

Soit u une suite convergente de limite 0 et v une suite bornée. Alors la suite uv est convergente, de limite 0.

Multiplication scalaire Soient u une suite convergente, de limite l et λ un réel. Alors, la suite λu est convergente, de limite λl .

Positivité Si u est une suite convergente et positive, alors la limite est positive. De même, si u et v sont deux suites convergentes de limites respectives l_u et l_v et que $u \leq v$, alors $l_u \leq l_v$.

REMARQUE 1.22 Attention, si on a deux suites convergentes u et v telles que $u_n < v_n$ pour tout n , alors l'inégalité $l_u \leq l_v$ n'est **pas forcément stricte**. Par exemple si on prend pour u la suite nulle et pour v la suite de terme général $\frac{1}{n+1}$, on a $u_n < v_n$ pour tout n mais elles convergent toutes deux vers 0.

On dit parfois en ce sens que "les inégalités larges passent à la limite, pas les inégalités strictes".

PREUVE Supposons qu'une suite u converge à la fois vers les réels l et l' . Soit $\epsilon > 0$. On a aussi $\frac{\epsilon}{2} > 0$. On a un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. De même, il y a un entier N' tel que pour tout $n \geq N'$, on a $|u_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Prenons un entier n_0 plus grand à la fois que N et que N' . On a alors $|l - l'| \leq |l - u_{n_0}| + |u_{n_0} - l'| \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ainsi, $|l - l'|$ est à la fois un nombre positif et est inférieur à tout nombre strictement positif. C'est donc 0 et on a donc $l = l'$. Cela prouve l'unicité de la limite de la suite u .

Pour l'équivalence des assertions " u converge vers l ", " $u - l$ converge vers 0" et " $|u - l|$ converge vers 0", il suffit d'écrire leur définition et on s'aperçoit qu'elles sont clairement équivalentes. En effet, pour deux réels u_n et l , on a $|u_n - l| = |(u_n - l) - 0| = ||u_n - l| - 0|$.

Montrons qu'une suite convergente est bornée. Soit u une suite convergente, l sa limite. Il existe alors un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$. Posons alors $M = \max(l + 1, u_0, u_1, \dots, u_N)$. On a alors pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$. De même, posons $m = \min(l - 1, u_0, u_1, \dots, u_N)$. Alors, m est un minorant de u . La suite u est donc bien bornée.

Montrons que la somme de deux suites convergentes est convergente et que sa limite est la somme des deux limites. Soit donc u une suite convergente de limite l_u et v une suite convergente de limite l_v . Prenons ϵ strictement positif (sa moitié l'est aussi). Alors on peut trouver un entier N_u tel que pour tout $n \geq N_u$, on ait $|u_n - l_u| \leq \frac{\epsilon}{2}$. De même, il existe un entier N_v tel que pour tout $n \geq N_v$, on ait $|v_n - l_v| \leq \frac{\epsilon}{2}$. En posant $N = \max(N_u, N_v)$ et en prenant $k \geq N$, on obtient $|(u_k + v_k) - (l_u + l_v)| \leq |u_k - l_u| + |v_k - l_v| \leq 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ceci prouve que la suite $u + v$ converge vers $l_u + l_v$.

Pour la différence $u - v$, reprnons les mêmes hypothèses que ci-dessus et gardons les mêmes ϵ , N_u , N_v et N . Pour $n \geq N$, on a alors $|(u_k - v_k) - (l_u - l_v)| \leq |u_k - l_u| + |-v_k + l_v| = |u_k - l_u| + |v_k - l_v| \leq 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. La suite $u - v$ converge donc bien vers $l_u - l_v$.

Avant de montrer que le produit de deux suites convergentes l'est aussi, montrons que le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite bornée est aussi convergente, de limite 0. Prenons u une suite qui converge vers 0 et v une suite bornée. Soit M un réel (non nul) tel qu'on ait, pour tout entier naturel n , $|v_n| \leq M$.

Prenons $\epsilon > 0$. Il existe alors un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n| \leq \frac{\epsilon}{M}$. On a alors pour un tel entier $|u_n v_n| = |u_n| \cdot |v_n| \leq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$. Cela montre que uv converge vers 0.

Montrons maintenant que le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites de ces deux suites. Prenons u convergente, de limite l_u et v convergente, de limite l_v . On a alors pour tout n , $u_n v_n - l_u l_v = (u_n - l_u)v_n + l_u(v_n - l_v)$. La suite de terme général $(u_n - l_u)v_n$ est le produit d'une suite qui converge vers 0 ($u - l_u$) et d'une suite bornée (car convergente, v). D'après ce qui précède, cette suite converge vers 0. La suite de terme général $l_u(v_n - l_v)$ est le produit d'une suite qui converge vers 0 (la suite $v - l_v$) et d'une suite bornée (car constante, la suite l_u). D'après ce qui précède, cette suite converge aussi vers 0.

La somme de ces deux suites, qui est $uv - l_u l_v$ converge aussi vers 0 et donc la suite uv converge bien vers $l_u l_v$.

Si λ est un réel et u une suite convergente, de limite l , alors λu est le produit de la suite constante de valeur λ , qui est convergente, de limite λ par la suite u . On obtient alors bien une suite convergente, de limite λl .

Montrons que l'inverse d'une suite convergente de limite non nulle est une suite convergente. Vérifions déjà que si une suite converge vers un réel non nul, alors elle ne prend plus la valeur 0 à partir d'un certain indice. Soit v une telle suite, l sa limite. Quitte à raisonner sur $-v$, on peut supposer $l > 0$. Il existe alors un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|v_n - l| \leq \frac{l}{2}$ et en particulier $v_n \geq l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0$, et donc $v_n \neq 0$.

L'inégalité $v_n \geq \frac{l}{2} > 0$ entraîne $0 \leq \frac{1}{v_n} \leq \frac{2}{l}$, inégalité qui est donc vraie pour tout $n \geq N$. La suite $\frac{1}{v}$ est donc bornée. Or, la suite de terme général $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l}$ est le produit de la suite de terme général $v_n - l$ et de la suite de terme général $\frac{-1}{lv_n}$. Il s'agit donc du produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite bornée. Cette suite converge

donc vers 0. Ainsi, la suite $\frac{1}{v}$ est convergente, de limite $\frac{1}{l}$.

Alors, par produit, on a bien que si u converge vers l_u et v vers l_v avec $l_v \neq 0$, alors $\frac{u}{v} = u \frac{1}{v}$ converge vers $\frac{l_u}{l_v}$.

Supposons qu'une suite u converge vers un réel strictement négatif l . Alors, comme $-\frac{l}{2} > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - l| \leq -\frac{l}{2}$. En particulier, on a pour un tel n , $u_n \leq l + (-\frac{l}{2}) = \frac{l}{2} < 0$. La suite u prend donc nécessairement des valeurs strictement négatives. Ainsi, une suite positive et convergente a forcément une limite positive.

Le fait que si u et v sont convergentes et $u \leq v$ alors la limite de u est inférieure à celle de v en résulte en considérant la suite $v - u$. Λ

Ainsi, si on a deux suites convergentes u et w ainsi qu'une suite v vérifiant $u \leq v \leq w$, et si la suite v est convergente, alors sa limite est comprise entre celle de u et celle de w . Une telle suite v n'est pas forcément convergente, mais il y a une hypothèse importante sous laquelle on peut affirmer qu'elle l'est, ce qui donne le théorème suivant, appelé théorème des gendarmes :

THÉORÈME 1.23 *Soient u , v et w trois suites réelles telles que $u \leq v \leq w$. on suppose que u et w sont convergentes et ont même limite. Alors v est aussi convergente et a même limite que u et w .*

DÉMONSTRATION Soient u , v et w trois suites vérifiant les hypothèses du théorème. Dans ce cas, appelons l la limite commune de u et w et prenons $\epsilon > 0$. Il existe un réel N_u tel que, pour tout $n \geq N_u$, on a $|u_n - l| \leq \epsilon$. En particulier, pour un tel n , $u_n \geq l - \epsilon$. De même, il existe un réel N_w tel que, pour tout $n \geq N_w$, on a $|w_n - l| \leq \epsilon$. En particulier, pour un tel n , $w_n \leq l + \epsilon$.

Posons alors $N = \max(N_u, N_w)$ et soit $n \geq N$. On a alors $l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \epsilon$. On en déduit alors que $|v_n - l| \leq \epsilon$ et cela prouve que v converge vers l . Λ

Voici une application directe de ce théorème :

COROLLAIRE 1.24 *Soient u une suite qui converge vers 0 et v une suite vérifiant pour tout entier naturel n , $|v_n| \leq u_n$. Alors v converge aussi vers 0.*

En effet, on a $-u_n \leq v_n \leq u_n$ pour tout n , et les deux suites de termes généraux $-u_n$ et u_n convergent toutes deux vers 0. Le théorème nous donne immédiatement la conclusion.

Le théorème suivant nous fournit un autre critère de convergence, bien utile :

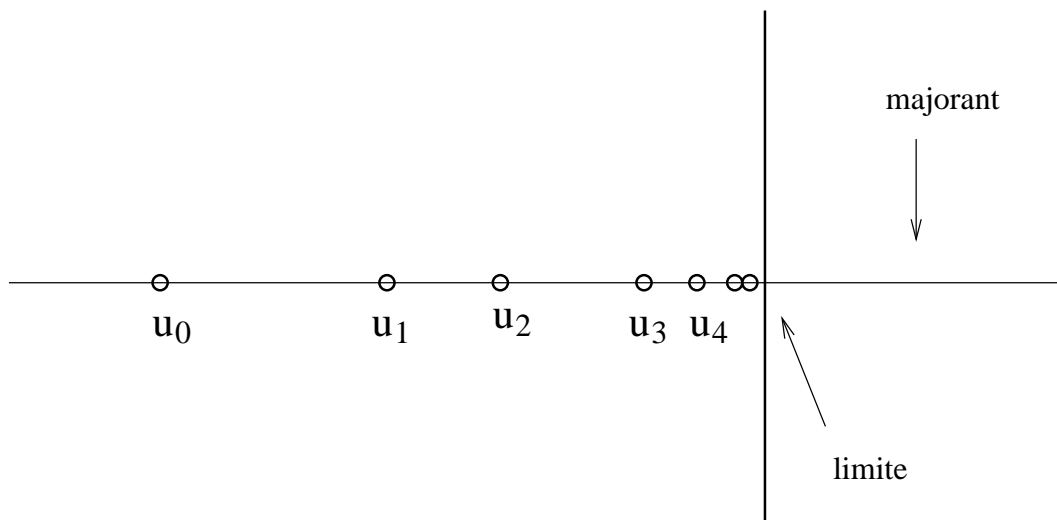
THÉORÈME 1.25 Soit u une suite croissante et majorée. Alors u est convergente.

De même, si u est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

DÉMONSTRATION Supposons que la suite u est croissante et majorée. On considère alors l'ensemble E de ses valeurs, soit $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble est non vide, et est majoré car u l'est. Il possède donc une borne supérieure que nous noterons l , et nous allons voir que l est la limite de u .

Prenons $\epsilon > 0$. Comme l est la borne supérieure de E , il existe un élément x de E qui est plus grand que $l - \epsilon$, et, par définition de E , un entier N tel que $u_N = x$. Si on prend maintenant un entier $n \geq N$, on a $l - \epsilon \leq u_N \leq u_n \leq l$, et donc $|u_n - l| = l - u_n \leq l - (l - \epsilon) = \epsilon$. Ceci prouve bien que u converge vers l , comme demandé.

Si maintenant u est décroissante et minorée, alors $-u$ est croissante et majorée donc, d'après ce qui précède, est convergente. Alors, u aussi est convergente, ce qui termine la preuve du théorème. Λ



REMARQUE 1.26 La démonstration précédent nous affirme en plus que si u est croissante et majorée, alors quel que soit l'entier naturel n , sa limite l vérifie $l \geq u_n$.

1.7 Limites infinies

DÉFINITION 1.14 On dit qu'une suite de terme général u_n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel M , il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq M$.

De même, on dit qu'une suite de terme général u_n tend vers $-\infty$ si, pour tout réel m , il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \leq m$.

N.B. : Lorsque une suite est convergente, de limite l , on dit indifféremment qu'elle converge vers l ou qu'elle tend vers l . Par contre, on ne dit pas qu'une suite converge vers $\pm\infty$ car de telles suites sont divergentes.

Autre remarque : Pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$, on peut se contenter de vérifier la définition pour les valeurs positives du réel M , ce qui se révèle parfois plus pratique.

Voici quelques propriétés des suites ayant des limites infinies :

PROPOSITION 1.27 Asymptoticité *Soit u une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et v une suite qui ne diffère de u que d'un nombre fini de termes. Alors v tend aussi vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Une suite u tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u$ tend vers $-\infty$ et vice versa.

Somme *Soit u une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et v une suite minorée (resp. majorée). Alors $u + v$ tend aussi vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). C'est le cas en particulier si v est bornée ou tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Comparaison *Soient u et v deux suites réelles. Si u tend vers $+\infty$ et $u \leq v$, alors v tend aussi vers $+\infty$.*

Multiplication scalaire *Soit u une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et λ un réel strictement positif. Alors λu tend aussi vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Produit *Soient u une suite qui tend vers $+\infty$ et v une suite qui est minorée par un réel strictement positif. Alors uv tend aussi vers $+\infty$. La conclusion demeure valide si on remplace l'hypothèse concernant v par v tend vers $+\infty$.*

Inversion *Soient u une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Alors la suite $\frac{1}{u}$ existe (à partir d'un certain rang) et converge vers 0.*

PREUVE Supposons que u tende vers $+\infty$ et que $u_n = v_n$ pour tout $n \geq N_0$. Donnons nous un réel M . Il existe alors un entier naturel N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $u_n \geq M$. Soit alors $N = \max(N_0, N_1)$. Pour $n \geq N$, on a $v_n = u_n \geq M$. Cela prouve que v tend vers $+\infty$. La preuve serait analogue avec $-\infty$.

Vérifions que u tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u$ tend vers $-\infty$. Supposons que u tende vers $+\infty$ et soit m un réel. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq -m$. On a donc alors $(-u)_n = -u_n \leq m$ et donc $-u$ tend vers $-\infty$. De même, si $-u$ tend vers $-\infty$, alors si on se donne un réel M , il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $-u_n \leq -M$. On a donc alors $u_n \geq M$ et donc u tend vers $+\infty$.

Pour l'autre sens on peut raisonner sur les opposés des fonctions ou faire une preuve analogue.

Supposons maintenant que u tende vers $+\infty$ et que v soit minorée. Désignons par m un minorant de v et prenons un réel M . Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N_u$, on ait $u_n \geq M - m$. On a alors pour tout $n \geq N$, $u_n + v_n \geq (M - m) + m = M$. Ainsi, $u + v$ tend vers $+\infty$. Le cas d'une limite $-\infty$ est analogue (mais v doit alors être majorée).

Supposons maintenant que u tende vers $+\infty$ et que v soit minorée par un réel strictement positif α . Donnons nous alors M un réel positif. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq \frac{M}{\alpha}$. On a alors pour un tel n , $u_n v_n \geq \frac{M}{\alpha} \alpha = M$. Cela prouve que uv tend vers $+\infty$.

Si v tend vers $+\infty$, alors posons $w = \sup(1, v)$. La suite w étant minorée par 1, uw tend vers $+\infty$. Or la suite uw ne diffère de la suite uv que d'un nombre fini de termes (car $v_n \geq 1$ si n est assez grand). La suite uv tend aussi vers $+\infty$.

Supposons que la suite u tende vers $+\infty$. Il y a alors un entier N tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq N$. A fortiori, pour $n \geq N$, u_n n'est pas nul et $\frac{1}{u_n}$ existe. Prenons $\epsilon > 0$. Il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $u_n \geq \frac{1}{\epsilon} > 0$. Ainsi, pour $n \geq N_1$, on a $0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{(\frac{1}{\epsilon})} = \epsilon$. Ceci prouve que $\frac{1}{u}$ converge bien vers 0. Λ

Attention : Pour le produit, l'hypothèse " v minorée par un réel strictement positif" ne peut pas être remplacée par " v est à valeurs strictement positives". Par exemple, la suite de terme général $u_n = n$, qui tend vers $+\infty$ et la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$), qui est à valeurs strictement positives, ont pour produit la suite constante de valeur 1, qui ne tend pas vers $+\infty$.

Formes indéterminées et nature des suites classiques Nous donnons ici quelques limites de suites classiques. La preuve de ces valeurs sera faite ultérieurement.

Une suite dont le terme général est de la forme $(\ln n)^\alpha n^\beta e^{\gamma n}$ ($n > 0$) pour trois réels α , β et γ a le comportement suivant :

Si $\gamma > 0$, alors la suite diverge quels que soient α et β .

Si $\gamma < 0$, alors la suite converge vers 0 quels que soient α et β .

On dit parfois que "l'exponentielle l'emporte" sur les fonctions puissances et les logarithmes (car le comportement de la suite est dicté par le comportement de l'exponentielle qui la compose).

Dans le cas où $\gamma = 0$, le terme général de la suite se réduit alors à $(\ln n)^\alpha n^\beta$

Si $\beta > 0$, alors la suite diverge quel que soit α .

Si $\beta < 0$, alors la suite converge vers 0 quel que soit α .

On dit alors parfois que "la puissance l'emporte" sur le logarithme.

S'il ne reste que $(\ln n)^\alpha$, alors bien entendu la suite diverge si $\alpha > 0$ et converge vers 0 si $\alpha < 0$.

La suite de terme général $\arctan n$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

La suite de terme général $\arg \tanh n$ converge vers 1.

La suite de terme général $n \sin(\frac{1}{n})$ converge vers 1.

La suite de terme général $n \ln(1 + \frac{1}{n})$ converge vers 1.

Si on prend par exemple une suite u qui tend vers 1 et une suite v qui tend vers $+\infty$, alors la suite uv va tendre vers $+\infty$. On peut en ce sens écrire $1 \cdot +\infty = +\infty$. En revanche, si on prend une suite u qui tend vers 0 et une suite v qui tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure, avec ces seules données, quant au comportement de uv .

Par exemple, prenons a chaque fois v la suite de terme général n . Si on prend u_1 de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$, alors u_1v tend vers $+\infty$. Si on prend u_2 de terme général $\frac{1}{n^2}$, alors u_2v tend vers 0. Si on prend u_3 de terme général $\frac{1}{n}$, alors u_3v tend vers 1. Si on prend u_4 de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$, alors u_4v n'a pas de limite. De plus chacune de ces suites u_i , $1 \leq i \leq 4$ converge bien vers 0 et v tend bien vers $+\infty$. En ce sens, la forme $0 \times \infty$ est une forme indéterminée.

Les formes indéterminées les plus classiques sont :

$$\begin{array}{l} \infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0^0 ; \\ 1^\infty \quad ; \quad \infty^0 \end{array}$$

1.8 Suites extraites

DÉFINITION 1.15 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et ϕ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans lui-même. La suite v de terme général $v_n = u_{\phi(n)}$ est appelée suite extraite ou sous-suite de la suite u .

Ici aussi, je pense qu'il est bon de se représenter une suite extraite d'une suite u comme une succession de termes pris de plus en plus "tard" parmi les termes de u .

PROPOSITION 1.28 Toute suite extraite d'une suite extraite d'une suite u est elle-même une suite extraite de la suite u .

PREUVE En effet, soit u une suite, v une suite extraite de u et w une suite extraite de v . Alors on a une application ϕ strictement croissante de \mathbb{N} dans lui-même telle que pour tout entier naturel n , $v_n = u_{\phi(n)}$. On a aussi une application ψ strictement croissante de \mathbb{N} dans lui-même telle que pour tout entier naturel n , $w_n = v_{\psi(n)}$. On a alors pour tout entier naturel n , $w_n = u_{\phi \circ \psi(n)}$. Or l'application $\phi \circ \psi$ est strictement croissante comme composée d'applications strictement croissantes.

Ceci prouve que w est bien une suite extraite de u . **Λ**

PROPOSITION 1.29 *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et a même limite.*

Aussi, toute suite extraite d'une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) tend aussi vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

PREUVE Soit u une suite convergente de limite l . Soit ϕ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans lui-même et appelons v la suite extraite de u correspondant à ϕ (i.e. pour tout entier naturel n , $v_n = u_{\phi(n)}$).

Fixons un nombre strictement positif ϵ et soit N un entier tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq \epsilon$. Prenons alors un entier N' tel que $\phi(N') \geq N$. Pour tout entier $k \geq N'$, on a $\phi(k) \geq \phi(N') \geq N$ et donc $|v_k - l| = |u_{\phi(k)} - l| \leq \epsilon$.

Ceci prouve que la suite v converge vers l .

La preuve dans le cas d'une limite infinie est analogue. Λ

Le théorème suivant porte le nom de **Théorème de Bolzano-Weierstraß**.

THÉORÈME 1.30 *Soit u une suite réelle bornée. Alors il existe une suite extraite de u qui est convergente.*

Ce théorème sera obtenu comme corollaire du lemme suivant :

LEMME 1.1 *Soit u une suite réelle. Alors il existe une suite extraite de u qui est monotone.*

Le théorème se déduit facilement du lemme car si on se donne une suite bornée et qu'on en extrait une suite monotone, cette dernière suite étant en plus bornée, est convergente (d'après le théorème 1.25), et le théorème s'ensuit. Prouvons donc le lemme :

PREUVE On se donne une suite u de terme général u_n . On considère la partie suivante de \mathbb{N} :

$$E = \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall m > k, u_m < u_k\}$$

Autrement dit, E est l'ensemble des indices des termes qui sont strictement plus grands que tous ceux qui arrivent après. On distingue alors deux cas :

Premier cas : E est infini. Dans ce cas, on sait qu'il existe une bijection strictement croissante ϕ de \mathbb{N} dans E . Considérons donc la suite v de terme général $u_{\phi(n)}$. Il s'agit d'une suite extraite de u et si on se donne deux entiers naturels $n_1 < n_2$, on a $\phi(n_1) < \phi(n_2)$ et $\phi(n_1) \in E$. D'après la définition de E , on a alors $u_{\phi(n_2)} < u_{\phi(n_1)}$, soit $v_{n_2} < v_{n_1}$. Ainsi, v est décroissante (et l'est même strictement).

Second cas : E est fini. Dans ce cas, on peut en considérer un majorant N de E . Nous allons construire par récurrence une application strictement croissante ϕ de \mathbb{N} dans lui-même telle que la suite de terme général $u_{\phi(n)}$ est croissante.

On commence par poser $\phi(0) = N + 1$.

Supposons qu'on ait construit $\phi(0) < \phi(1) < \dots < \phi(k)$ tels que $u_{\phi(0)} \leq u_{\phi(1)} \leq \dots \leq u_{\phi(k)}$. Alors on sait que $\phi(k) \geq \phi(0) > N$. Donc, $\phi(k)$ n'est pas dans E . Il existe donc un entier $A > \phi(k)$ tel que $u_A \geq u_{\phi(k)}$. On pose alors $\phi(k+1) = A$. On a donc construit $\phi(0) < \dots < \phi(k) < \phi(k+1)$ tels que $u_{\phi(0)} \leq \dots \leq u_{\phi(k+1)}$.

On peut donc ainsi définir par récurrence $\phi(n)$ pour tout n , avec la propriété que ϕ est strictement croissante et que la suite de terme général $u_{\phi(n)}$, qui se trouve donc être une suite extraite de u , est croissante.

Cela termine la preuve du lemme. Λ

1.9 Suites adjacentes

DÉFINITION 1.16 Soient u et v deux suites. On dit que ces deux suites sont adjacentes si u est croissante, v décroissante, $u \leq v$ et si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n tel que $v_n - u_n \leq \epsilon$.

L'intérêt de cette notion tient en grande partie au théorème suivant :

THÉORÈME 1.31 Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

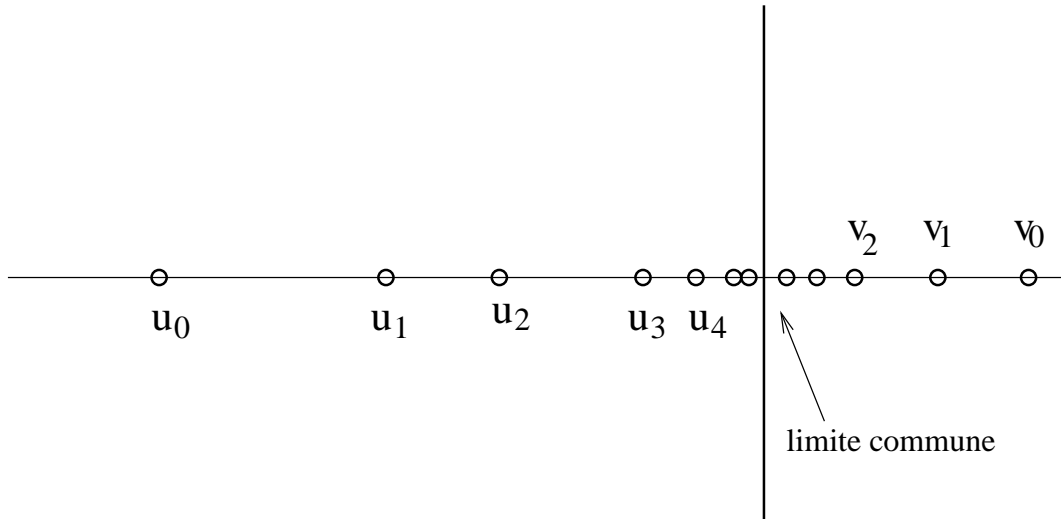
DÉMONSTRATION Soient u et v deux suites adjacentes. Montrons d'abord que u est majorée et que v est minorée.

On a, pour tout n , $u_n \leq v_n$ car $u \leq v$ et $v_n \leq v_0$ car v est décroissante. On en conclut donc $u_n \leq v_0$ et v_0 est donc un majorant de u .

De même, on a, pour tout n , $v_n \geq u_n$ car $v \geq u$ et $u_n \geq u_0$ car u est croissante. On en conclut donc $v_n \geq u_0$ et u_0 est donc un minorant de v .

La suite u , croissante et majorée, est convergente. Nous appellerons l_u sa limite. La suite v , décroissante et minorée, est convergente. Nous appellerons l_v sa limite.

Alors, comme $u \leq v$ et que les deux suites sont convergentes, on sait que $l_u \leq l_v$. On a de plus, pour tout entier naturel n , $u_n \leq l_u$ et $l_v \leq v_n$. Donc $l_v - l_u \leq v_n - u_n$. Si on avait $l_v - l_u > 0$, on pourrait, par hypothèse, trouver un entier n_0 tel que $v_{n_0} - u_{n_0} \leq \frac{l_v - l_u}{2}$, et a fortiori $l_v - l_u \leq \frac{l_v - l_u}{2}$, qui impliquerait $l_v - l_u \leq 0$ ce qui contredit notre hypothèse. On a donc forcément $l_v \leq l_u$ et, comme on a déjà l'inégalité dans l'autre sens, on peut affirmer $l_u = l_v$. Λ



REMARQUE 1.32 Dans la définition de suites adjacentes, on peut remplacer les deux dernières conditions par $u - v$ converge vers 0.

En effet, si $v - u$ converge vers 0, alors il est clair que $v_n - u_n$ est plus petit que n'importe quel réel strictement positif ϵ fixé a priori, et de plus, comme la suite $v - u$ est décroissante et de limite nulle, elle ne peut pas prendre de valeur strictement négative.

Réciproquement, si les conditions $u \leq v$ et pour tout ϵ , il existe n tel que $v_n - u_n \leq \epsilon$ sont vérifiées, alors la suite $v - u$, qui est décroissante et positive (i.e. minorée par 0), est convergente. De plus sa limite l est positive et, pour tout $\epsilon > 0$, on a un entier n pour lequel $v_n - u_n \leq \epsilon$ et on a alors forcément $l \leq v_n - u_n \leq \epsilon$. Ainsi, l est négative, donc $l = 0$.

1.10 Suites de Cauchy

DÉFINITION 1.17 Soit u une suite réelle. On dit que u est une suite de Cauchy ou vérifie le critère de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que quels que soient les entiers naturels $p \geq N$ et $q \geq N$, on ait $|u_p - u_q| \leq \epsilon$.

Donnons des exemples de telles suites :

EXEMPLE 1.10.1 La suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$ est une suite de Cauchy.

En effet, prenons deux entiers naturels p et q , avec $q > p$. On a $0 \leq u_q - u_p = \sum_{i=p+1}^q \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{i^2} = \sum_{i=p+1}^q \frac{1}{i^2}$. Or, pour tout entier naturel non nul n , on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Ainsi, en sommant, on a $\sum_{i=p+1}^q \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=p+1}^q \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} + \dots - \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}$. On remarque immédiatement que tous les termes de

cette somme se compensent, excepté les deux extrêmes, soit $\sum_{i=p+1}^q \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. En particulier, nous avons $u_q - u_p \leq \frac{1}{p}$, et ce quel que soit $q \geq p$.

Donnons-nous maintenant $\epsilon > 0$. Il existe un entier naturel N tel que $\frac{1}{N} \leq \epsilon$. Si on prend alors deux entiers p et q plus grands que N , on a alors $|u_p - u_q| \leq \frac{1}{\min(p,q)} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon$.

Ceci prouve que la suite u est bien une suite de Cauchy.

EXEMPLE 1.10.2 Toute suite convergente est une suite de Cauchy. Supposons en effet la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente et appelons l sa limite. Prenons $\epsilon > 0$. Alors on peut trouver un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Si on prend deux entiers p et q tous deux $\geq N$, on a alors $|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Le réel strictement positif ϵ étant quelconque, on a donc bien prouvé que la suite u était de Cauchy.

EXEMPLE 1.10.3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe k dans $[0; 1[$ tel que, pour tout entier naturel n , on a $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k \cdot |u_{n+1} - u_n|$. Alors cette suite est une suite de Cauchy.

Soient en effet u et k vérifiant ces propriétés. Alors, pour tout entier naturel n , on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ (cela se vérifie par une simple récurrence sur n). On a alors, pour deux entiers naturels quelconques $p < q$, on a $|u_q - u_p| = |(u_q - u_{q-1}) + (u_{q-1} - u_{q-2}) + \dots + (u_{p+1} - u_p)| = \left| \sum_{i=p}^{q-1} (u_{i+1} - u_i) \right| \leq \sum_{i=p}^{q-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=p}^{q-1} k^i |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \cdot \sum_{i=p}^{q-1} k^i = |u_1 - u_0| \cdot \frac{k^p - k^q}{1-k} \leq \frac{k^p}{1-k}$. Comme $\frac{k^p}{1-k}$ ne dépend pas de q et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$, on en conclut que la suite u est de Cauchy, donc convergente.

Nous allons maintenant établir certaines propriétés et caractérisations des suites de Cauchy. Commençons par la remarque suivante :

REMARQUE 1.33 Toute suite de Cauchy est bornée.

En effet, prenons une suite de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe alors un entier N tel que pour tous $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $|u_p - u_q| \leq 1$, en particulier, pour tout $p \geq N$, on a $u_N - 1 \leq u_p \leq u_N + 1$. Si on pose alors $M = \max(u_0, \dots, u_{N-1}, u_N + 1)$, alors tout terme de la suite est inférieur à M et M est donc un majorant de u . De même, si on pose $m = \min(u_0, \dots, u_{N-1}, u_N - 1)$, m est un minorant de u . La suite u est donc bien une suite bornée.

La manière dont nous avons établi le caractère de Cauchy de certaines suites ci-dessus peut être retenu. En fait, nous avons :

PROPOSITION 1.34 Soit u une suite réelle. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- i) La suite u est une suite de Cauchy ;
 ii) Il existe une suite v , qui tend vers 0 et telle que pour deux entiers naturels $p \leq q$ quelconques, on a $|u_p - u_q| \leq v_p$.

PREUVE Montrons d'abord i) \Rightarrow ii). Supposons que u soit de Cauchy. Alors u est bornée d'après la remarque ci-dessus. On peut donc poser pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v_p = \sup_{q \geq p} |u_k - u_n|$. Ainsi, on a par construction que pour tous $p \leq q$, $|u_p - u_q| \leq v_p$. Reste à montrer que v tend vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Comme u est de Cauchy, il existe N tel que, pour tous $p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| \leq \epsilon$. Ainsi, si $p \geq N$ et $q \geq p$, $q \geq N$ et donc $|u_p - u_q| \leq \epsilon$. Ceci prouve que $v_p \leq \epsilon$. On en conclut donc que v (qui est positive) converge bien vers 0. La suite v possède bien les propriétés requises pour pouvoir conclure qu'on a ii).

Réciproquement, supposons ii) et prenons une suite v qui a les propriétés demandées dans l'énoncé. Donnons-nous $\epsilon > 0$. Il existe alors N tel que pour tout $n \geq N$, on a $v_n \leq \epsilon$. Prenons alors deux entiers p et q supérieurs à N . On peut, quitte à les permuter, supposer $p \leq q$. On a alors $|u_p - u_q| \leq v_p \leq \epsilon$. On en déduit que la suite u est bien une suite de Cauchy. Λ

Nous avons vu ci-dessus qu'une suite convergente était une suite de Cauchy. Nous avons en fait également la réciproque :

THÉORÈME 1.35 Une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

DÉMONSTRATION Nous n'avons plus à montrer que toute suite de Cauchy était convergente. Soit donc u une suite de Cauchy. Nous savons déjà que u est bornée. Alors, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une suite extraite de u qui est convergente, suite extraite que nous noterons $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, et dont nous noterons l la limite. Montrons alors que u converge vers l .

Soit $\epsilon > 0$. Il existe un entier N tel que quels que soient p et q supérieurs à N , $|u_p - u_q| \leq \frac{\epsilon}{2}$, car u est de Cauchy. Aussi, il existe un entier N' tel que pour tout $n \geq N'$, on a $|u_{\phi(n)} - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$, car la suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Prenons un entier N_0 assez grand pour que $\phi(N_0) \geq N$ et $N_0 \geq N'$. En prenant alors un entier $n \geq \phi(N_0)$, on a $|u_n - l| \leq |u_n - u_{\phi(N_0)}| + |u_{\phi(N_0)} - l| \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Cela prouve bien que la suite u converge vers l . Ainsi toute suite de Cauchy est effectivement convergente, ce qui termine la démonstration du théorème. Λ

1.11 Suites obtenues par itération (dites parfois "suites définies par récurrence" ou "suites récurrentes")

PROPOSITION 1.36 Soit E une partie de \mathbb{R} , f une application de E dans E et x un élément de E . Alors, il existe une unique suite réelle u qui vérifie :

i) $u_0 = x$;

ii) pour tout entier naturel n , on a $u_n \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = f^{\circ n}(x)$, où $f^{\circ n}$ désigne l'application $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$ fois

N.B. : Dans la proposition précédente, la composée n fois de f par elle-même (on dit aussi *itérée* n fois de f) a été notée $f^{\circ n}$ pour la distinguer de l'application f^n qui à x dans E associe la puissance n -ième de $f(x)$. Dans la suite, nous utiliserons, si aucune ambiguïté ne semble possible, aussi la notation f^n pour désigner $f^{\circ n}$ sans préciser sa signification.

L'étude des propriétés des fonctions nous permettra de préciser le comportement de certaines de ces suites. Nous nous contenterons ici du résultat suivant :

PROPOSITION 1.37 Soit E une partie de \mathbb{R} , f une application de E dans E . On suppose qu'il existe un nombre réel positif $k < 1$ tel que pour tous x, y de E , on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Alors, si on prend une suite u vérifiant $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n , la suite u est convergente. De plus, la limite de cette suite ne dépend pas du premier terme u_0 choisi dans E .

D'autre part, si sa limite, notée l appartient à E , alors $f(l) = l$ et l est l'unique élément de E égal à son image par f .

PREUVE Soit E une partie de \mathbb{R} , f une application de E dans lui-même et k un réel qui vérifient les conditions de l'énoncé. Alors, pour tout entier naturel n , on a $|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k|u_{n+1} - u_n|$. Nous avons vu à l'exemple 1.10.3 que la suite u était une suite de Cauchy, donc une suite convergente.

Si maintenant on prend v_0 quelconque dans E et $v_n = f^n(v_0)$ pour tout n , alors on a pour tout n , $0 \leq |v_n - u_n| = |f^n(v_0) - f^n(u_0)| \leq k^n|v_0 - u_0|$ (cette dernière inégalité résultant d'une récurrence immédiate sur n). D'après le théorème des gendarmes, $v - u$ tend vers 0, et donc $v = (v - u) + u$ est convergente, de même limite que u .

Supposons que la limite l de cette suite soit dans E . Alors on a pour tout n , $0 \leq |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|$. Par le théorème des gendarmes, la suite de terme général $f(u_n) - f(l)$ tend vers 0, donc la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(l)$. Or, cette suite est aussi la suite de terme général u_{n+1} qui est une suite extraite de u . Comme la suite u converge vers l , la suite de terme général $f(u_n)$ converge aussi vers l , et par unicité de la limite, on a $f(l) = l$. Si maintenant on prend $l' \neq l$ dans E , on a $|f(l') - l| = |f(l') - f(l)| \leq k|l' - l| < |l' - l|$, ce qui prouve $f(l') \neq l'$. Λ

1.12 Suites et topologie

Nous avons déjà utilisé la borne supérieure d'un ensemble pour prouver qu'une suite croissante et majorée était convergente. Nous explorons ici plus précisément les rela-

tions entre suites et topologie réelle.

Nous avons en particulier la proposition à la fois simple et fondamentale suivante :

PROPOSITION 1.38 *Soit E une partie (non vide) de \mathbb{R} et soit a un nombre réel. Alors a est adhérent à E si et seulement si il existe une suite u telle que pour tout n , u_n est dans E et qui est convergente, de limite a .*

PREUVE Supposons qu'on ait une partie E de \mathbb{R} et une suite convergente u vérifiant $u_n \in E$ quel que soit n (en particulier, E ne peut être vide). Montrons qu'alors la limite de u , que nous appellerons a , est un point adhérent à E . Prenons $\eta > 0$. Il existe alors un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - a| < \eta$, soit $u_n \in]a - \eta; a + \eta[$. En particulier, $u_N \in E \cap]a - \eta; a + \eta[$, ce qui prouve que ce dernier ensemble n'est pas vide. Ceci valant pour tout $\eta > 0$, a est bien un point adhérent à E .

Réciproquement, supposons qu'on ait un réel a adhérent à une partie (non vide) E de \mathbb{R} . Alors pour tout entier naturel n , appelons u_n un réel qui se trouve dans l'intersection de E avec $]a - \frac{1}{2^n}; a + \frac{1}{2^n}[$ (un tel réel existe car a est adhérent à E). Si on appelle u la suite de terme général u_n , alors u a toutes ses valeurs dans E (par définition) et converge vers a . En effet, si on se fixe $\epsilon > 0$, on a un entier N tel que $\frac{1}{2^N} \leq \epsilon$ et alors pour tout $n \geq N$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} \leq \epsilon$. Ceci termine la preuve de la proposition. Λ

En particulier, si E est majorée, il existe une suite à valeurs dans E qui converge vers sa borne supérieure et, de plus, si on a une suite u à valeurs dans E et si u est convergente, sa limite, que nous noterons l , vérifie $l \leq \sup E$.

Aussi, si E est dense dans \mathbb{R} , alors, pour tout réel x , il existe une suite u à valeurs dans E et qui converge vers x .

La proposition ci-dessus nous fournit un critère de fermeture pour une partie de \mathbb{R} :

COROLLAIRE 1.39 *Une partie E de \mathbb{R} est fermée si et seulement si toute suite convergente à valeurs dans E a pour limite un élément de E .*

En ce qui concerne les points intérieurs à un ensemble, nous avons :

PROPOSITION 1.40 *Un point a est intérieur à une partie E si et seulement si pour toute suite réelle u qui converge vers a , on a un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, u_n est dans E . Dit autrement, la suite u n'a qu'un nombre fini de termes en dehors de E .*

PREUVE Supposons a intérieur à E et u une suite réelle de limite a . Il existe un réel $\eta > 0$ tel que $]a - \eta; a + \eta[$ soit inclus dans E , ainsi qu'un entier naturel N tel que

pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - a| < \eta$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \in]a - \eta; a + \eta[$ et a fortiori $u_n \in E$.

Réciproquement, supposons qu'un réel a n'est pas intérieur à une partie E de \mathbb{R} . Nous avons montré qu'alors a était adhérent au complémentaire de E dans \mathbb{R} . D'après la proposition ci-dessus, il existe une suite u qui converge vers a et qui a tous ses termes (une infinité) dans $\mathbb{R} \setminus E$, c'est-à-dire hors de E . Λ

Le critère d'ouverture associé à cette proposition est le suivant :

COROLLAIRE 1.41 *Une partie E de \mathbb{R} est ouverte si et seulement si toute suite réelle ayant une limite dans E , à partir d'un certain rang, tous ses termes dans E .*

1.13 Suites à valeurs complexes

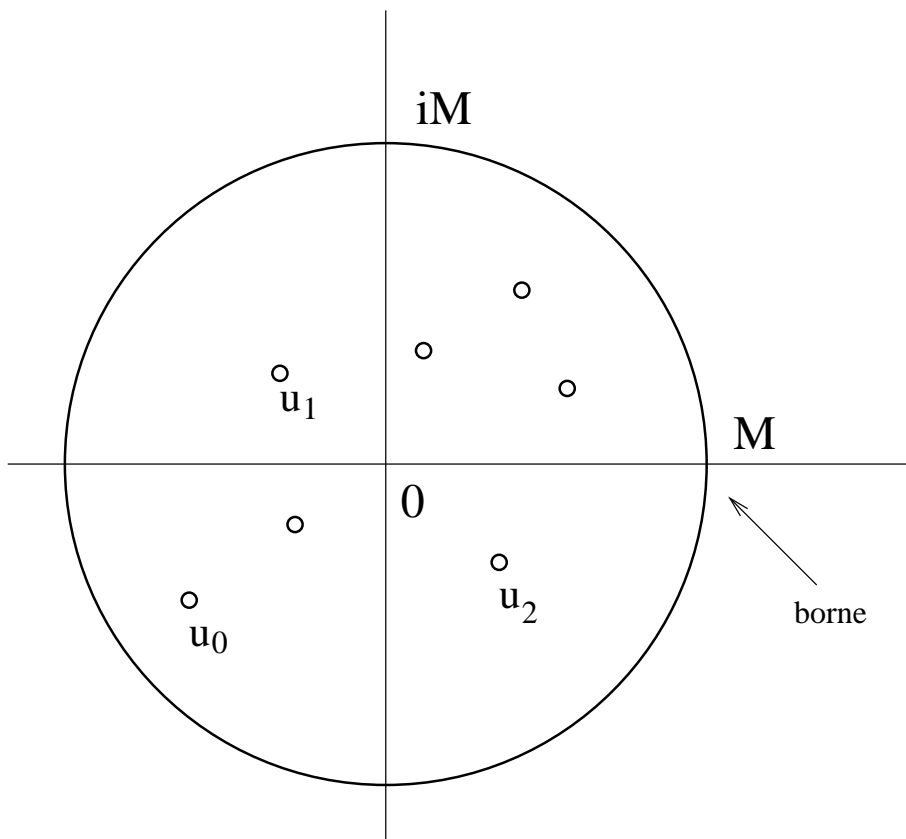
DÉFINITION 1.18 *On appelle suite à valeurs complexes, ou simplement suite complexe une application de \mathbb{N} dans \mathbb{C} .*

Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe, la suite $\Re(u)$ de terme général $\Re(u_n)$ s'appelle la partie réelle de u et la suite $\Im(u)$ de terme général $\Im(u_n)$ s'appelle la partie imaginaire de u .

De manière analogue au cas réel, on définit la somme, la différence, le produit de deux suites complexes, le produit d'une suite complexe par un nombre complexe et éventuellement le quotient de deux suites complexes. Leurs propriétés dans le cas des suites réelles demeurent valides dans le cas complexe.

DÉFINITION 1.19 *On dit qu'une suite complexe u est bornée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $|u_n| \leq M$.*

Remarquons que dans le cas d'une suite à valeurs réelles, cette notion est identique à la précédente.



La somme et le produit de deux suites bornées sont bornés. Le produit d'une suite bornée et d'un nombre complexe est borné.

PROPOSITION 1.42 *Une suite est bornée si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.*

PREUVE Supposons u_n bornée et soit M telle que pour tout entier naturel n , on ait $|u_n| \leq M$. On a alors pour tout n , $|\Re(u_n)| \leq |u_n| \leq M$, donc la partie réelle de u est bornée, et de même, $|\Im(u_n)| \leq |u_n| \leq M$, donc la partie imaginaire de u est aussi bornée.

Réciproquement, supposons que $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont bornées, par M_r et M_i respectivement, alors on a pour tout n , $|u_n| = |\Re(u_n) + i\Im(u_n)| \leq |\Re(u_n)| + |i\Im(u_n)| = |\Re(u_n)| + |\Im(u_n)| \leq M_r + M_i$. Cela prouve bien que u est bornée. Λ

N.B. : Notons toutefois que, du fait qu'il n'existe pas de relation d'ordre satisfaisante sur \mathbb{C} , les notions de suite majorée, minorée, croissante, décroissante, monotone, ne sont pas définies dans le cas complexe, non plus la notion de comparaison entre deux suites.

DÉFINITION 1.20 *Soit u une suite complexe et l un nombre complexe. On dit que u converge vers l , ou que l est la limite de u si pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, on ait $|u_n - l| \leq \epsilon$.*

Ici encore, une suite qui ne converge vers aucun nombre complexe est dite divergente. On remarque aussi immédiatement que si u est une suite à valeurs réelles et λ un nombre réel, alors la convergence de u vers λ en tant que suite réelle ou en tant que suite complexe, c'est pareil.

PROPOSITION 1.43 *Une suite u converge vers un nombre complexe l si et seulement si $\Re(u)$ converge vers $\Re(l)$ et $\Im(u)$ converge vers $\Im(l)$.*

Ainsi, une suite est convergente si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.

PREUVE Supposons que u converge vers l . Dans ce cas, prenons $\epsilon > 0$ et soit N un entier tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq \epsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $|\Re(u_n) - \Re(l)| = |\Re(u_n - l)| \leq |u_n - l| \leq \epsilon$. Ce qui prouve bien que $\Re(u)$ converge vers $\Re(l)$. La preuve pour la partie imaginaire est analogue.

Supposons maintenant que $\Re(u)$ converge vers $\Re(l)$ et $\Im(u)$ converge vers $\Im(l)$. Prenons alors $\epsilon > 0$. Soient N_r un entier naturel tel que pour tout $n \geq N_r$, $|\Re(u_n) - \Re(l)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. De même, soit N_i un entier naturel tel que pour tout $n \geq N_i$, $|\Im(u_n) - \Im(l)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Posons alors $N = \max(N_r, N_i)$. On a alors, pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| = |\Re(u_n) - \Re(l) + i(\Im(u_n) - \Im(l))| \leq |\Re(u_n) - \Re(l)| + |\Im(u_n) - \Im(l)| \leq 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ainsi, u converge bien vers l . Λ

COROLLAIRE 1.44 *Une suite convergente à valeurs réelles a sa limite réelle. Ainsi, une suite à valeurs réelles a la même nature en tant que suite réelle ou que suite complexe.*

Le théorème de Bolzano-Weierstraß est encore valide dans le cas des suites complexes :

PROPOSITION 1.45 *Toute suite complexe bornée possède une sous-suite convergente.*

PREUVE Soit u une suite complexe bornée. La suite $\Re(u)$ est une suite réelle bornée et on peut donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, en extraire une suite convergente $\Re(u_{\phi(n)})$. La suite de terme général $\Im(u_{\phi(n)})$ est extraite de $\Im(u)$ et est donc bornée. On peut donc aussi en extraire une suite convergente, de la forme $\Im(u_{\phi \circ \psi(n)})$. La suite $\Im(u_{\phi \circ \psi(n)})$ est une suite extraite d'une suite convergente et l'est donc elle-même.

La suite de terme général $u_{\phi \circ \psi(n)}$ est extraite de u et a ses parties réelle et imaginaire convergente. D'après la proposition 1.43, elle est convergente, ce qui prouve la proposition. Λ

DÉFINITION 1.21 *On dit qu'une suite complexe est une suite de Cauchy complexe si pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un entier naturel N tel que pour tout p et tout q supérieurs à N , on a $|u_p - u_q| \leq \epsilon$.*

D'après la définition, il est clair qu'une suite réelle est de Cauchy si et seulement si c'est une suite de Cauchy complexe. Nous avons aussi :

PROPOSITION 1.46 *Une suite complexe est de Cauchy si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.*

PREUVE Supposons u suite de Cauchy complexe. Soit $\epsilon > 0$ et N satisfaisant la définition de suite de Cauchy complexe pour le réel ϵ . On a alors, pour p et $q \geq N$, $|u_p - u_q| \leq \epsilon$. Cela entraîne $|\Re(u_p) - \Re(u_q)| \leq \epsilon$ et $|\Im(u_p) - \Im(u_q)| \leq \epsilon$. On en déduit que les deux suites $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont de Cauchy.

Réciproquement, supposons $\Re(u)$ et $\Im(u)$ de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ et prenons N_r tel que pour tout p et $q \geq N_r$, on ait $|\Re(u_p) - \Re(u_q)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. De même, soit N_i tel que pour tout p et $q \geq N_i$, on ait $|\Im(u_p) - \Im(u_q)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Posons alors $N = \max N_r, N_i$. Si p et q sont supérieurs à N , alors on a $|u_p - u_q| \leq |\Re(u_p) - \Re(u_q)| + |\Im(u_p) - \Im(u_q)| \leq \epsilon$. Ainsi, u est bien une suite de Cauchy complexe. Λ

COROLLAIRE 1.47 *Une suite complexe est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.*

En effet, les deux équivalent à ce que leurs parties réelle et imaginaire le soient. Et pour leurs parties réelle et imaginaire, qui sont des suites réelles, les deux notions coïncident.

Pour clore ce chapitre, résumons les critères de convergence des suites que nous y avons vus jusqu'alors :

- i) Critères "simples" : Comparaison avec des suites classiques et opérations élémentaires (suites réelles ou complexes) ;
- ii) suite monotone bornée, suites adjacentes (suites réelles) ;
- iii) suite extraite d'une suite convergente (suites réelles ou complexes) ;
- iv) théorème des gendarmes (suites réelles) ;
- v) critère de Cauchy (suites réelles ou complexes) ;
- vi) critères spécifiques aux suites récurrentes.

Exercices

Parties de \mathbb{N}

- 1) On considère $E = \{3; 11; 52; 6; 41; 198; 74\}$. Trouver un entier naturel n et une bijection croissante de E dans $[1..n]$.
- 2) a) On considère l'ensemble P des nombres impairs. Est-il fini ou infini ? Donner une bijection croissante de P dans \mathbb{N} ?
b) Même question avec l'ensemble des entiers naturels donc l'écriture décimale commence par le chiffre 1 (on pourra faire intervenir le nombre de chiffres d'un tel entier).
- 3) Soit f une application d'une partie finie E de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Montrer que l'image de f est une partie finie de \mathbb{N} .
(Indication : On pourra commencer par le cas où f est injective).
- 4) Montrer que si E est une partie infinie de \mathbb{N} et F une partie finie de E , alors $E \setminus F$ est une partie infinie de \mathbb{N} .

Topologie de \mathbb{R}

- 1) Trouver les bornes sup et inf des parties de \mathbb{R} suivantes :
 - i) $\mathbb{Q} \cap]0; 1[$.
 - ii) L'ensemble des réels de la forme $(-1)^{n+1} + \frac{1}{n+1}$ avec n entier naturel
- 2) a) Soient E_- et E_+ deux parties non vides de \mathbb{R} . Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
 - i) E_- possède une borne supérieure, E_+ une borne inférieure et $\sup E_- \leq \inf E_+$;
 - ii) Pour tout $x_- \in E_-$ et tout $x_+ \in E_+$, on a $x_- \leq x_+$.b) Montrer que, si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes alors seule une des deux implications reste vraie.
- 3) Soient E et F deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . Montrer que $\sup(E + F) = \sup E + \sup F$.
- 4) Soient E une partie non vide et bornée de \mathbb{R} et λ un nombre réel. On appelle λE l'ensemble $\{\lambda x, x \in E\}$. Montrer que λE est non vide et borné. Déterminer ses bornes inférieure et supérieure en fonction de λ et des bornes de E .
- 5) Soient A et B deux parties de \mathbb{R} . Montrer que $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Montrer que, en revanche, les inclusions $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{(A \cup B)}$ peuvent être strictes.
- 6) On dit qu'une partie E de \mathbb{R} est discrète si pour chaque élément x de E , on peut

trouver $\eta > 0$ tel que $]x - \eta; x + \eta[\cap E$ soit réduit à $\{x\}$.

- a) Montrer que toute partie d'une partie discrète de \mathbb{R} est aussi discrète.
- b) Montrer que \mathbb{Z} est une partie discrète de \mathbb{R} .
- c) Montrer que la réunion de deux parties discrètes de \mathbb{R} est une partie discrète.
- d) Soit E une partie de \mathbb{R} . Montrer que s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que tout intervalle de longueur η de \mathbb{R} contienne au plus un élément de E , alors E est une partie discrète et fermée de \mathbb{R} .
- e) Donner l'exemple d'une partie discrète de \mathbb{R} qui n'est pas fermée.

Suites

1) Montrer que toute suite est la différence de deux suites croissantes.

2) Déterminer la nature des suites ayant les terme généraux suivants :

- a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\frac{n+1}{n-1}$; c) $\frac{n^3+4n}{5n^3+2\cos(2n)-\frac{1}{n}}$;
- d) $\frac{n^2+3}{4n+1}$; e) $n \sin(\frac{1}{n})$; f) $\exp(\frac{1}{n})$;
- g) Pour a et b réels strictement positifs fixés, $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$;
- h) Pour a réel fixé, $u_n = \frac{E(na)}{n}$.

3) On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot (n!)}$. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

4) On se fixe deux réels strictement positifs $a < b$.

a) Montrer qu'il existe deux suites uniques u et v telles que $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}$ et $v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$.

b) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

N.B. : Leur limite commune s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a et de b .

5) Soit u une suite croissante et v une sous-suite de u . Montrer que $u \leq v$. Réciproquement, montrer que si une suite est inférieure à chacune de ses sous-suites, alors elle est croissante.

6) On se donne deux suites réelles u et v . On appelle w_+ la suite de terme général $\max(u_n, v_n)$ et w_- la suite de terme général $\min(u_n, v_n)$.

a) Montrer que si u et v sont bornées, alors w_+ et w_- le sont aussi.

b) Même question en remplaçant bornées par croissantes.

c) Même question en remplaçant croissantes par convergentes.

7) Soit u une suite réelle. Pour tout n , on pose $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n u_i$.

a) On suppose que u converge vers 0. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on a, pour tous $p < q$ assez grands, $\left| \frac{1}{q+1} \sum_{i=p}^q u_i \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Montrer alors que v converge vers 0.

- b) Montrer que si u converge vers un réel l , alors v converge aussi vers l .
- c) Montrer qu'il se peut que v converge alors que u diverge (on pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$).
- 8) Montrer que toute suite non majorée possède une sous-suite qui tend vers $+\infty$.
- 9) On considère la suite u de terme général $\cos n$. Montrer qu'on a, pour tout entier naturel n , $u_{2n} = 2(u_n)^2 - 1$ et $u_{n+2} + u_n = 2u_1 u_{n+1}$. En déduire qu'il est impossible que u soit convergente.
- 10) Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n , $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ est bien définie, est convergente et calculer sa limite.
- 11) Soit u une suite réelle.
- a) Montrer que si les sous-suites de termes généraux u_{2n} , u_{2n+1} convergent vers la même limite, alors u aussi est convergente.
- b) Montrer que si les sous-suites de termes généraux u_{2n} , u_{2n+1} et u_{3n} convergent, alors u converge aussi.
- 12) On dit qu'une partie E de \mathbb{R} est compacte si toute suite réelle à valeurs dans E possède une sous-suite qui converge et dont la limite est dans E . Montrer qu'une partie de \mathbb{R} est compacte si et seulement si c'est une partie fermée de \mathbb{R} et qu'elle est bornée.
- 13) Soit u une suite complexe, à valeurs dans le disque unité de \mathbb{C} et telle que $\Re(u)$ converge vers 1. Montrer qu'alors u converge vers 1.
- 14) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle vérifiant pour tous entiers naturels non nuls m et n , $u_{m+n} \leq u_m + u_n$. On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{n}$.
- a) Montrer que pour tout $m \geq 1$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $v_n \leq v_m + \epsilon$.
- b) Montrer que si v n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$ et que si v est minorée (en particulier si elle est positive), alors elle est convergente.
- 15) Soit u une suite de Cauchy et v une suite à termes strictement positifs. Montrer qu'il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})_n$ de u telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_{\phi(n+1)} - u_{\phi(n)}| < v_n$.
- 16) On considère la suite u de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.
- a) Trouver des réels a, b, c tels qu'on ait pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$

- b) En déduire que la suite de terme général $\sum_{i=0}^n u_i$ est convergente et calculer sa limite.

2 Limites de fonctions et continuité

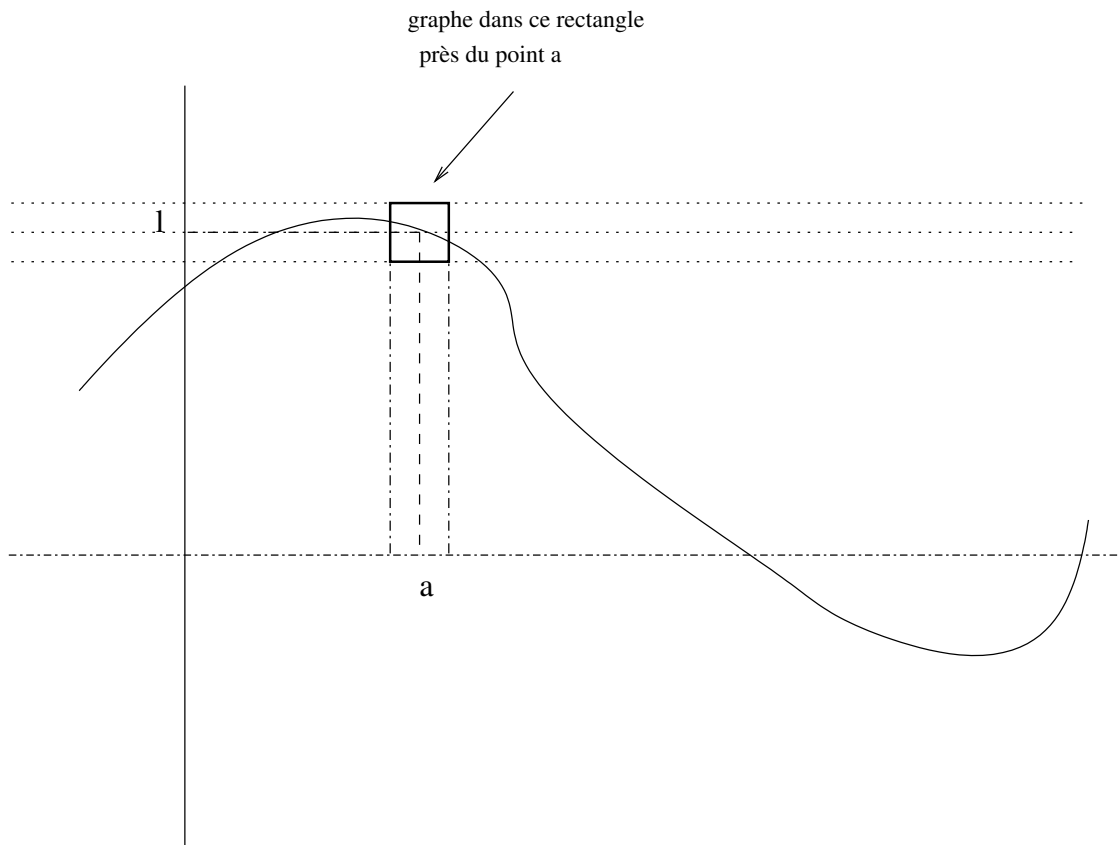
2.1 Limites de fonctions

DÉFINITION 2.1 Soit f une fonction réelle définie sur une partie E de \mathbb{R} . Prenons un point a dans l'adhérence de E et un réel l . On dit que f tend vers l en a , ou que f admet l comme limite au point a (suivant E), si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x de E vérifiant $|x - a| \leq \eta$, on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$.

Si f possède une limite l au point a suivant E , on écrira :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x) = l$$

Très souvent, l'ensemble E sera sous-entendu et la limite de f en a sera simplement notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.



REMARQUE 2.1 Si a est un point isolé de E , i.e. s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $E \cap]a - \eta; a + \eta[= \{a\}$, alors la limite en a suivant E d'une fonction f définie sur E existe et vaut $f(a)$ (puisque, en prenant la définition de limite au point a , le réel η convient quel que soit le réel strictement positif ϵ choisi). Cependant, ce cas n'a guère d'intérêt.

EXEMPLE 2.1.1 La fonction identité a pour limite a en tout réel a. En effet, si on se fixe un réel a et qu'on se donne $\epsilon > 0$, prenons $\eta = \epsilon$. On a bien $\eta > 0$ et, si $|x - a| \leq \eta$, on a $|Id(x) - Id(a)| = |x - a| \leq \eta = \epsilon$. Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.

La fonction carré $x \rightarrow x^2$ a pour limite a^2 en tout réel a. En effet, fixons un réel a et donnons-nous $\epsilon > 0$. Pour tout réel x, on a $|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot |x - a|$. Posons alors $\eta = \min(1, \frac{\epsilon}{2|a|+1})$, qui est strictement positif. Si un réel x vérifie $|x - a| \leq \eta$, on a d'une part $|x| \leq |a| + \eta$, et donc $|x + a| \leq |x| + |a| \leq 2|a| + \eta \leq 2|a| + 1$, et $|x - a| \leq \frac{\epsilon}{2|a|+1}$. Par produit, $|x + a| \cdot |x - a| \leq (2|a| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2|a|+1} = \epsilon$. Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$.

La fonction $f : x \rightarrow x \sin(\frac{1}{x})$, définie sur \mathbb{R}^* a pour limite 0 en 0. En effet, 0 est bien adhérent à \mathbb{R}^* et remarquons qu'on a pour tout réel non nul x, $|f(x)| = |x| \cdot |\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$. Si on se donne $\epsilon > 0$, posons $\eta = \epsilon$. Alors, si x non nul vérifie $|x - 0| = |x| \leq \eta$, on a alors $|f(x) - 0| = |f(x)| \leq |x| \leq \eta = \epsilon$. Ceci prouve que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^*}} f(x) = 0$.

On peut définir différentes variantes de cette notion primitive de limite. Essentiellement, on a deux types de généralisation, à savoir "faire varier" le lieu où on prend la limite ou "faire varier" la valeur de la limite. Ces deux types de généralisations pouvant aussi très bien être faites conjointement.

Variations sur le lieu

Limite à droite Soit f une fonction réelle définie sur une partie E de \mathbb{R} . On suppose que le réel a est adhérent à $E \cap]a; +\infty[$, que nous noterons E_a . On notera \tilde{f}_a la restriction de f à cet ensemble. Alors, la limite en a de \tilde{f}_a suivant E_a sera appelée la *limite à droite de f en a (suivant E)* et notée

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ x \in E}} f(x) \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a \\ x \in E}} f(x)$$

Cette dernière notation, assez lourde, sera rarement utilisée lorsque E n'est pas sous-entendu.

Limite à gauche C'est la même idée que la limite à droite mais en remplaçant $]a; +\infty[$ par $] - \infty; a[$. On la notera

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ x \in E}} f(x) \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a \\ x \in E}} f(x)$$

Limite par valeurs différentes Soit f une fonction réelle définie sur une partie E de \mathbb{R} . On suppose que le réel a est adhérent à $E_a = E \cap (\mathbb{R} \setminus \{a\})$ (en fait, cela revient à a adhérent à E et n'en est pas un point isolé). Nous noterons \tilde{f}_a la restriction de f à E_a . Alors, la limite en a de \tilde{f}_a suivant E_a sera appelée la *limite de f en a par valeurs différentes (suivant E)* et notée

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a \\ x \in E}} f(x)$$

Ici aussi, E sera presque toujours sous-entendu.

Remarquons que si f n'est pas définie en a , la limite par valeurs différentes n'est pas autre chose que la limite. Toutefois, il se peut que la limite par valeurs différentes existe et pas la limite, par exemple si la fonction f étudiée est nulle sur \mathbb{R}^* et vaut 1 en 0, elle n'a pas de limite en 0 mais

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$$

Remarquons aussi que si a est adhérent à la fois à $E \cap]a; +\infty[$ et à $E \cap]-\infty; a[$, ce qui est plus que fréquemment le cas, alors f a une limite en a par valeurs différentes si et seulement si elle a une limite à droite et une limite à gauche en a et que ces deux limites ont même valeur (qui est alors la limite en a par valeurs différentes).

Limite en $+\infty$ On suppose ici f définie sur un ensemble E non majoré. On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ suivant E si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel M tel que pour tout $x \geq M$ dans E , on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$. On écrira alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in E}} f(x) = l$$

Limite en $-\infty$ C'est comme la précédente sauf que E doit être non minorée et l'inégalité $x \geq M$ remplacée par $x \leq M$. On la note $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in E}} f(x)$.

Variations sur la valeur

Limites de valeurs infinies On prend une fonction définie sur une partie E de \mathbb{R} à laquelle un réel a est adhérent.

On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si, pour tout réel M (resp. m), il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de $E \cap]a - \eta; a + \eta[$, on a $f(x) \geq M$ (resp. $f(x) \leq m$).

Limites par valeurs supérieures ou inférieures Soit a un réel et f une fonction définie sur un ensemble E auquel a est adhérent et dans lequel a n'est pas isolé. On suppose aussi que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x) = l$. On suppose enfin qu'il existe $\eta > 0$ tel que sur $(]a - \eta; a[\cup]a; a + \eta[) \cap E$, on a $f(x) > l$ (resp $f(x) < l$). On dit alors que f tend vers l en a par valeurs supérieures (resp inférieures) et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x) = l^+$ (resp. $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x) = l^-$).

On a des notions analogues pour des limites en $\pm\infty$.

EXEMPLE 2.1.2 *La fonction identité tend vers $+\infty$ en $+\infty$.*

La fonction partie entière tend vers 0 à gauche en 1 et vers 1 à droite en 1.

La proposition suivante traduit le caractère local de la notion de limite :

PROPOSITION 2.2 *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur des parties F et G de \mathbb{R} . Soit a un réel adhérent à la fois à F et à G . On suppose qu'il existe un réel strictement positif η tel que $F \cap]a - \eta; a + \eta[= G \cap]a - \eta; a + \eta[$ et que les fonctions de f et de g y aient mêmes restrictions. Alors si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in F}} f(x) = l$, on a aussi $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in G}} g(x) = l$.*

PREUVE Plaçons nous sous les conditions de la proposition avec $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in F}} f(x) = l$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe η_1 tel que pour tout x de $F \cap]a - \eta_1; a + \eta_1[$, on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$. Posons alors $\eta_2 = \min(\eta, \eta_1)$. On a $G \cap]a - \eta_2; a + \eta_2[$ inclus dans $G \cap]a - \eta; a + \eta[$, donc dans F et aussi dans $]a - \eta_1; a + \eta_1[$, ce qui donne $G \cap]a - \eta_2; a + \eta_2[\subset F \cap]a - \eta_1; a + \eta_1[$. Ainsi, pour x dans $G \cap]a - \eta_2; a + \eta_2[$, on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$ et on a bien $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in G}} g(x) = l$. Λ

REMARQUE 2.3 *La proposition précédente est encore valable pour des limites de valeur $\pm\infty$. Pour les limites à droite (resp. à gauche), il suffit que les fonctions coïncident sur des ensembles de la forme $F \cap]a; a + \eta[$ (= $G \cap]a; a + \eta[$) (resp. $F \cap]a - \eta; a[$ (= $G \cap]a - \eta; a[$). Pour une limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$), il suffit que les fonctions coïncident sur des ensembles de la forme $F \cap]M; +\infty[$ (= $G \cap]M; +\infty[$) (resp. $F \cap]-\infty; M[$ (= $G \cap]-\infty; M[$).*

Opérations élémentaires sur les limites de fonctions

PROPOSITION 2.4 Somme *Soit f (resp. g) une fonction définie sur une partie D_f (resp D_g) de \mathbb{R} ayant une limite l_f (resp. l_g) en un point a . On suppose de plus que a est adhérent à $D_f \cap D_g$. Alors $f + g$ tend vers $l_f + l_g$ en a .*

Multiplication scalaire *Soit f une fonction définie sur une partie E de \mathbb{R} ayant une limite l en un point a et soit λ un nombre réel. Alors λf tend vers λl en a .*

Produit Soient f (resp. g) une fonction définies sur une partie D_f (resp D_g) de \mathbb{R} ayant une limite l_f (resp. l_g) en un point a . On suppose de plus que a est adhérent à $D_f \cap D_g$. Alors $f \cdot g$ tend vers $l_f l_g$ en a .

Inversion Soit f une fonction définie sur une partie E de \mathbb{R} ayant une limite l non nulle en un point a . Alors a est adhérent à l'ensemble de définition de $\frac{1}{f}$ et la fonction $\frac{1}{f}$ tend vers $\frac{1}{l}$ en a .

Théorème de composition des limites Soit f définie sur une partie D_f de \mathbb{R} possédant une limite l en un point a . Soit g définie sur une partie D_g de \mathbb{R} possédant une limite l' en l . On suppose de plus que a est adhérent à l'ensemble de définition D de $g \circ f$. Alors l'application $g \circ f$ tend vers l' en a suivant D .

Il est possible de prouver assez directement toutes ces propriétés, mais nous allons nous servir de la proposition suivante, qui caractérise les limites en termes de suites :

PROPOSITION 2.5 Soit f une fonction définie sur une partie E de \mathbb{R} et a un réel adhérent à E . Alors, f admet une limite l en a suivant E si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

PREUVE Supposons que f admette une limite l en a et soit u_n une suite d'éléments de E qui converge vers a . Soit alors $\epsilon > 0$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $|x - a| \leq \eta$, on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - a| \leq \eta$. Ainsi, si $n \geq N$, u_n est dans E et $|u_n - a| \leq \eta$, ce qui permet d'affirmer $|f(u_n) - l| \leq \epsilon$. On en déduit que la suite de terme général $f(u_n)$ converge bien vers l .

Supposons maintenant que f n'ait pas pour limite l en a . On peut alors trouver un réel strictement positif ϵ_0 tel que pour tout $\eta > 0$, on ait x_η dans $E \cap]a - \eta; a + \eta[$ tel que $|f(x_\eta) - l| > \epsilon_0$. Posons, pour tout n , $u_n = x_{\frac{1}{n}}$. On a $u_n \in E$ pour tout n , $|u_n - a| \leq \frac{1}{n}$ pour tout n , donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a , mais $|f(u_n) - l| > \epsilon_0$ pour tout n , donc la suite de terme général $f(u_n)$ ne converge pas vers l . Λ

Ceci nous permet de prouver facilement la proposition 2.4.

PREUVE Somme : On suppose ici que f tend vers l_f en a , que g tend vers l_g en a et que a est adhérent à $D_f \cap D_g$ (qui est aussi $D(f + g)$). Prenons alors une suite $(u_n)_n$ de points de $D_f \cap D_g$ qui converge vers a (ce qui est possible). D'après la proposition ci-dessus, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers l_f , la suite de terme général $g(u_n)$ converge vers l_g et donc la suite de terme général $(f + g)(u_n)$ converge vers $l_f + l_g$. La proposition précédente nous permet alors de conclure que $f + g$ converge bien vers $l_f + l_g$ en a .

Multiplication scalaire : Supposons que f tende vers l en a et soit λ un nombre réel. Prenons une suite u de Df qui tend vers a . La suite de terme général $f(u_n)$ converge vers l et donc la suite de terme général $\lambda f(u_n)$ converge vers λl . On en conclut alors que λf tend vers λl en a .

Produit : On suppose à nouveau que f tend vers l_f en a , que g tend vers l_g en a et que a est adhérent à $Df \cap Dg$. Prenons une suite u de $Df \cap Dg$ qui converge vers a . Alors $f(u)$ tend vers l_f , $g(u)$ vers l_g et donc $(fg)(u)$ vers $l_f \cdot l_g$. On en conclut alors que fg tend vers $l_f \cdot l_g$ en a .

Inversion : On suppose que la fonction f tend vers une limite non nulle l en a . Prenons une suite u de points de $D\frac{1}{f}$ qui converge vers a (c'est possible, par exemple en extrayant une sous-suite d'une suite quelconque de Df tendant vers a). Alors, cette suite converge vers l et la suite de terme général $\frac{1}{f(u_n)}$ converge vers $\frac{1}{l}$. On peut donc en conclure que $\frac{1}{f}$ tend vers $\frac{1}{l}$ en a .

Composition : On suppose que f tend vers l en a , que g tend vers l' en l et que a est adhérent à $D(g \circ f)$. Prenons alors une suite u de $D(g \circ f)$ qui converge vers a . La suite $f(u)$ converge vers l et a ses valeurs dans Dg . Alors, la suite $g(f(u))$ converge vers l' . On en conclut que $g \circ f$ tend bien vers l' en a . Λ

REMARQUE 2.6 Une application directe du théorème de composition des limites est la suivante : Si une fonction f (définie pour tout entier naturel assez grand) tend vers une limite l (finie ou infinie) en $+\infty$, alors la suite de terme général $f(n)$ tend aussi vers l .

Notons toutefois que la réciproque est fautive. Prenons par exemple la fonction $x \rightarrow \sin(2\pi x)$. Cette fonction n'a pas de limite en $+\infty$. Par contre, pour tout entier n , on a $f(n) = \sin(2n\pi) = 0$ et la suite de terme général $f(n)$ est la suite nulle, qui converge vers 0.

Critères d'existence de limites Nous donnons ici quelques critères d'existence de limites de fonctions en certains points, critères analogues à certains déjà donnés concernant les suites.

Fonctions monotones On considère une partie E de \mathbb{R} , non vide, majorée et qui ne contient pas sa borne supérieure, que nous noterons a . On suppose que f est croissante sur E , et que son image est majorée. Alors, $\lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x)$ existe.

Si E n'est pas majorée, alors le résultat est encore valide en remplaçant a par $+\infty$.

Si Imf n'est pas majorée, alors la limite considérée vaut $+\infty$.

On obtient bien entendu des résultats similaires avec des fonctions décroissantes, ou si on regarde le comportement de f en la borne inférieure de E .

Gendarmes On suppose que f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur le même ensemble ayant la même limite l en a , éventuellement en un sens généralisé. On suppose qu'on a une fonction f , définie sur le même ensemble que les autres, qui vérifie $f_1 \leq f \leq f_2$. Alors, on a aussi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Critère de Cauchy On suppose qu'on a une fonction f qui vérifie, près d'un point a , que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tel que pour tous x, y de $Df \cap]a - \eta; a + \eta[$, $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Alors $\lim_{x \rightarrow a, x \in Df} f(x)$ existe. Ceci se généralise aux autres notions de limites (de valeur finie).

Limites classiques Nous donnons ici quelques limites classiques :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty ; & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty ; & \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 ; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} ; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arg \tanh x = 1 \end{aligned}$$

Intéressons-nous à une limite du type $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^\alpha x^\beta e^{\gamma x}$. Le comportement d'une telle fonction est analogue à celui de la suite obtenue en remplaçant la variable réelle x par une variable entière n . Plus précisément :

Si $\gamma > 0$, alors cette limite vaut $+\infty$.

Si $\gamma < 0$, alors cette limite vaut 0.

Si $\gamma = 0$ et $\beta > 0$, alors cette limite vaut $+\infty$.

Si $\gamma = 0$ et $\beta < 0$, alors cette limite vaut 0.

Si β et γ sont nuls, il reste alors seulement $(\ln x)^\alpha$ qui tend en $+\infty$ vers $+\infty$ si $\alpha > 0$ et vers 0 si $\alpha < 0$.

PREUVE Nous allons procéder par étapes.

i) Montrons d'abord $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

On pose, pour $t > 0$, $g(t) = \frac{\ln t}{t}$. On remarque tout de suite que $g(t) > 0$ si $t > 1$. Prenons un réel $x \geq 4$. On a $\ln(4x) = \ln x + \ln 4 \leq 2 \ln x$. Ainsi, $g(4x) = \frac{\ln(4x)}{4x} \leq \frac{2 \ln x}{4x} = \frac{1}{2} \cdot g(x)$. Remarquons en outre que si $4 \leq x \leq 16$, alors $g(x) = \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln 16}{4} \leq \frac{\ln 16}{4} = \frac{4 \ln 2}{4} = \ln 2$. On en déduit, par une récurrence immédiate sur $k \geq 1$, que si x est dans l'intervalle $[4^k; 4^{k+1}]$, alors $0 < g(x) \leq \frac{\ln 2}{2^k}$. Comme de plus, si on se fixe $n \geq 1$, tout réel x supérieur à 4^n est dans un intervalle de la forme $[4^k; 4^{k+1}]$, où $k \geq 1$ (on prend pour k la partie entière de $\frac{\ln x}{\ln 4}$), on a $0 < g(x) \leq \frac{\ln 2}{2^n}$ pour tout $x \geq 4^n$.

Donnons-nous $\epsilon > 0$. Comme la suite de terme général $\frac{\ln 2}{2^n}$ tend vers 0, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $0 \leq \frac{\ln 2}{2^{n_0}} \leq \epsilon$. Alors, pour tout $x \geq 4^{n_0}$, on a $0 \leq g(x) \leq \epsilon$. Cela prouve bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

De cette limite, nous allons déduire toutes celles que nous cherchons.

ii) On montre ici que si on se donne $\beta > 0$ et α réel quelconque, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^\alpha x^\beta = +\infty$.

Prenons donc deux réels α et β , $\beta > 0$. On a pour tout $x > 1$, $\ln x^\alpha x^\beta = \exp(\beta \ln x + \alpha \ln(\ln x)) = \exp(\beta \ln x(1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}))$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et donc, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$. On en déduit donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta \ln x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta \ln x(1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}) = +\infty$. Enfin, l'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(\beta \ln x(1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x})) = +\infty$, soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^\alpha x^\beta = +\infty$.

iii) On montre ici que si on se donne $\beta < 0$ et α réel quelconque, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^\alpha x^\beta = 0$.

On prend donc deux réels α et β , $\beta < 0$. On a alors $\ln x^\alpha x^\beta = \frac{1}{\ln x^{-\alpha} x^{-\beta}}$. Ici, $-\beta$ est strictement positif et donc, d'après le ii), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^{-\alpha} x^{-\beta} = +\infty$. En prenant l'inverse, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^\alpha x^\beta = 0$.

iv) On montre ici que si on se donne $\gamma > 0$ et α, β réels quelconques, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^\alpha x^\beta e^{\gamma x} = +\infty$.

Prenons donc α, β quelconques, $\gamma > 0$. On a pour $x > 1$, $\ln x^\alpha x^\beta e^{\gamma x} = \exp(\alpha \ln(\ln x) + \beta \ln x + \gamma x)$. Or, $\alpha \ln(\ln x) + \beta \ln x + \gamma x = \gamma x(1 + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\ln x}{x} + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\ln(\ln x)}{x})$. Or, on sait que $\frac{\ln x}{x}$, et donc aussi $\frac{\beta}{\gamma} \frac{\ln x}{x}$ tendent vers 0 en $+\infty$. De plus, $\frac{\ln(\ln x)}{x} = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = g(\ln x) \cdot g(x)$. Or, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(\ln x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = 0 \cdot 0 = 0$. On peut donc conclure que $1 + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\ln x}{x} + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\ln(\ln x)}{x}$ tend vers 1 en $+\infty$ et comme γx y tend vers $+\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(\ln x) + \beta \ln x + \gamma x = +\infty$. En composant avec l'exponentielle, on trouve bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^\alpha x^\beta e^{\gamma x} = +\infty$.

v) Terminons par le cas α et β quelconques, $\gamma < 0$.

Dans ce cas, $\ln x^\alpha x^\beta e^{\gamma x}$ est l'inverse de $\ln x^{-\alpha} x^{-\beta} e^{-\gamma x}$. Comme $-\gamma$ est strictement positif, le iv) nous affirme que $\ln x^{-\alpha} x^{-\beta} e^{-\gamma x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. En passant à l'inverse, on obtient bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^\alpha x^\beta e^{\gamma x} = 0$.

Nous avons donc bien trouvé les limites annoncées. Λ

2.2 Continuité. Définition et premières propriétés

DÉFINITION 2.2 Soit f une application d'une partie E de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et a un point de E . On dit que f est continue en a si pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un réel strictement positif η tel que, pour tout x dans l'ensemble $]a - \eta; a + \eta[\cap E$, on a $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.

Une application qui est définie mais non continue en un réel a de E est dite discontinue en a .

On dit que f est continue (sur E) si elle est continue en tout point de E .

EXEMPLE 2.2.1 Une fonction constante est continue sur \mathbb{R} . La fonction identité est

continue sur \mathbb{R} . La fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mais elle est discontinue en tout point entier.

REMARQUE 2.7 Une fonction f est continue en un point a si et seulement si elle est définie en a et y tend vers $f(a)$ (suivant E).

Variantes de la notion :

DÉFINITION 2.3 Une fonction est dite continue à droite en a si pour tout réel strictement positif ϵ , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x dans $[a; a + \eta[\cap E$, on a $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$. Pour continue à gauche, on remplace $[a; a + \eta[$ par $]a - \eta; a]$.

Opérations élémentaires sur les fonctions continues

PROPOSITION 2.8 Somme Soient u et v deux fonctions réelles continues en un point a . Alors $u + v$ est continue en a . Ainsi, la somme de deux fonctions continues est continue.

Différence Soient u et v deux fonctions réelles continues en un point a . Alors $u - v$ est continue en a . Ainsi, la différence de deux fonctions continues est continue.

Produit Soient u et v deux fonctions réelles continues en un point a . Alors uv est continue en a . Ainsi, le produit de deux fonctions continues est continu.

Multiplication scalaire Soit u une fonction réelle continue en un point a et λ un réel. Alors λu est continue en a . Ainsi, le produit d'une fonction continue par un réel est continu.

Quotient Soient u et v deux fonctions réelles continues en un point a , avec $v(a) \neq 0$. Alors, la fonction $\frac{u}{v}$ est continue en a . Ainsi, le quotient d'une fonction continue par une fonction continue qui ne s'annule pas est continu.

Composition Soit u une fonction réelle continue en un point a et soit v une fonction réelle continue en $u(a)$. Alors la fonction $v \circ u$ est continue en a . Ainsi, la composée de deux fonctions continues est continue.

PREUVE

On peut bien entendu prouver tout ceci à l'aide de suites, comme dans le cas des limites de fonctions. Pour varier, nous le montrons cette fois-ci en revenant à la définition.

Soient u et v deux fonctions continues en a . Soit $\epsilon > 0$. Il existe un réel strictement positif η_u tel que pour tout x dans $]a - \eta_u; a + \eta_u[$, on ait $|u(x) - u(a)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. De même, il existe un réel strictement positif η_v tel que pour tout x dans $]a - \eta_v; a + \eta_v[$, on

ait $|v(x) - v(a)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Prenons alors η le minimum entre η_u et η_v . Alors η est encore strictement positif et pour tout x dans $]a - \eta; a + \eta[$, on a $|(u + v)(x) - (u + v)(a)| = |u(x) - u(a) + v(x) - v(a)| \leq |u(x) - u(a)| + |v(x) - v(a)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Cela montre que la fonction $u + v$ est continue en a .

On suppose encore u et v continues en a et donnons nous un réel strictement positif ϵ . Alors, on peut d'abord trouver un réel strictement positif α_u tel que pour tout x de $]a - \alpha_u; a + \alpha_u[$, on ait $|u(x) - u(a)| \leq 1$, ce qui entraîne immédiatement $|u(x)| \leq |u(a)| + 1$. De même, il existe un réel strictement positif α_v tel que pour tout x de $]a - \alpha_v; a + \alpha_v[$, on ait $|v(x)| \leq |v(a)| + 1$. On peut alors trouver un réel η_u tel que pour tout x de $]a - \eta_u; a + \eta_u[$, on ait $|u(x) - u(a)| \leq \frac{\epsilon}{2}(1 + |v(a)|)$. On peut de même trouver η_v strictement positif tel que pour tout x de $]a - \eta_v; a + \eta_v[$, on ait $|v(x) - v(a)| \leq \frac{\epsilon}{2}(1 + |u(a)|)$. Si on pose maintenant $\eta = \min(\eta_u, \eta_v)$, alors pour tout x de $]a - \eta; a + \eta[$, on a $|u(x)v(x) - u(a)v(a)| = |u(x)(v(x) - v(a)) + (u(x) - u(a))v(a)| \leq |u(x)(v(x) - v(a))| + |(u(x) - u(a))v(a)| \leq (|u(a)| + 1)(\frac{\epsilon}{2}(1 + |u(a)|)) + \frac{\epsilon}{2}(1 + |v(a)|)|v(a)| \leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ainsi, la fonction uv est bien continue en a .

Prenons maintenant u continue en a et λ un réel. Si $\lambda = 0$, la fonction λu est la fonction nulle et elle est clairement continue en a . On suppose donc $\lambda \neq 0$. Prenons un réel $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de $]a - \eta; a + \eta[$, on ait $|u(x) - u(a)| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|}$. Pour un tel x , on a $|\lambda u(x) - \lambda u(a)| = |\lambda| \cdot |u(x) - u(a)| \leq |\lambda| \frac{\epsilon}{|\lambda|} = \epsilon$. Cela prouve que la fonction λu est bien continue en a .

On suppose u et v continues en a avec $v(a) \neq 0$. Alors, la fonction $\frac{u}{v}$ est définie et de valeur $\frac{u(a)}{v(a)}$ en a . Comme la fonction v est continue en a , il existe $\eta > 0$ tel que pour x dans $]a - \eta; a + \eta[\cap D_{\frac{u}{v}}$, on a $|v(x) - v(a)| \leq \frac{|v(a)|}{2}$, en particulier $|v(x)| \geq \frac{|v(a)|}{2}$, et $|\frac{1}{v(x)}| \leq \frac{2}{|v(a)|}$. Prenons $\epsilon > 0$. On a alors, pour tout x où c'est défini, $\frac{u}{v}(x) - \frac{u}{v}(a) = \frac{u(x)v(a) - u(a)v(x)}{v(x)v(a)} = \frac{(u(x) - u(a))v(a) - (v(x) - v(a))u(a)}{v(x)v(a)}$. Or, on a $\eta_1 > 0$ pour lequel on a $|u(x) - u(a)| \leq \frac{\epsilon}{4|v(a)|}$ dès que x est dans $]a - \eta_1; a + \eta_1[\cap D_{\frac{u}{v}}$, $\eta_2 > 0$ pour lequel on a $|(v(x) - v(a))u(a)| \leq \frac{\epsilon v(a)^2}{4}$ dès que x est dans $]a - \eta_2; a + \eta_2[\cap D_{\frac{u}{v}}$ (en effet, si $u(a) \neq 0$, cela revient à $|v(x) - v(a)| \leq \frac{\epsilon v(a)^2}{4|u(a)|}$, et si $u(a) = 0$, alors tout $\eta_2 > 0$ convient, par exemple $\eta_2 = 1$).

Maintenant, si on pose $\eta' = \min(\eta, \eta_1, \eta_2)$, et si x est dans $]a - \eta'; a + \eta'[\cap D_{\frac{u}{v}}$, alors on a $|\frac{u}{v}(x) - \frac{u}{v}(a)| \leq \frac{2}{v(a)^2} \frac{\epsilon v(a)^2}{4} + \frac{2}{v(a)^2} \frac{\epsilon v(a)^2}{4} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ceci prouve bien la continuité de $\frac{u}{v}$ en a .

Supposons maintenant la fonction u continue en a et la fonction v continue en $u(a)$. Prenons $\epsilon > 0$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que pour tout y de $]u(a) - \alpha; u(a) + \alpha[$, on a $|v(y) - v(u(a))| \leq \epsilon$. Il existe aussi un réel $\eta > 0$ tel que pour tout x de $]a - \eta; a + \eta[$, on a $|u(x) - u(a)| \leq \alpha$. Ainsi, si x est dans $]a - \eta; a + \eta[$, on a $|u(x) - u(a)| \leq \alpha$ et alors $|v(u(x)) - v(u(a))| \leq \epsilon$. Cela prouve que la fonction $v \circ u$ est bien continue en a . **Λ**

La caractérisation de la continuité en un point par les suites, analogue à celle des

limites de fonctions, donne ceci :

PROPOSITION 2.9 *Une application f de E dans \mathbb{R} est continue en un point a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels à valeurs dans E qui converge vers a , la suite de terme général $f(x_n)$ est convergente, de limite $f(a)$.*

PREUVE Si f est continue en a et qu'une suite x_n de E converge vers a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$ d'après la remarque ci-dessus. Ainsi, $f(x_n)$ converge vers $f(a)$, d'après la proposition 2.5.

Réciproquement, s'il existe une suite d'éléments de E qui tend vers a et dont l'image par f ne tend pas vers $f(a)$, alors on n'a pas $\lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x) = f(a)$, donc f est discontinue en a . Λ

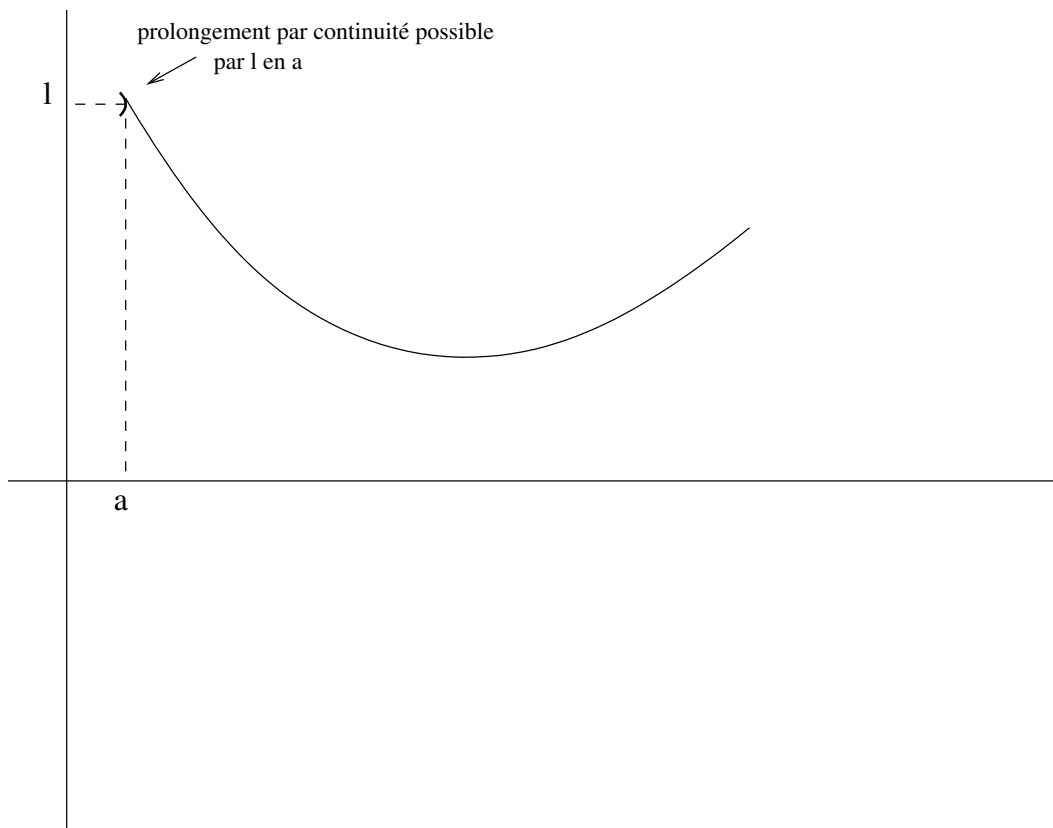
Prolongement par continuité :

DÉFINITION 2.4 *Soit f une fonction définie sur une partie E de \mathbb{R} ne contenant pas un réel a , mais à laquelle a est adhérent. On suppose que f a une limite l en a suivant E . Définissons alors \tilde{f} de $E \cup \{a\}$ dans \mathbb{R} par*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

On dit alors que \tilde{f} est obtenue à partir de f par prolongement par continuité en a .

On remarque alors aisément que \tilde{f} est continue en a .



2.3 Exemples de fonctions continues

La proposition suivante nous fournit déjà une large classe de fonctions continues :

PROPOSITION 2.10 *Soit f une fonction définie sur une partie E de \mathbb{R} . On suppose qu'il existe un réel positif k tel que pour tous x et y de E , on a $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$ (une telle fonction est dite k -lipschitzienne). Alors f est continue sur E .*

PREUVE On peut supposer k non nul (si k est nul, f est constante, donc continue). Soit a un point de E et $\epsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\epsilon}{k}$. Pour x dans $]a - \eta; a + \eta[\cap E$, on a $|f(x) - f(a)| \leq k \cdot |x - a| \leq k \cdot \eta = \epsilon$. Cela prouve bien que f est continue en a , et, par suite, sur E . Λ

Ceci montre, par exemple, que la fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} , car on sait qu'elle est 1-lipschitzienne.

Nous montrons ici la continuité de beaucoup de fonctions classiques.

- i) La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .
- ii) La fonction logarithme est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- iii) Pour tout α réel, la fonction $x \rightarrow x^\alpha$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

- iv) Les fonctions sinus est continue sur \mathbb{R} .
v) Les fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques habituelles (tangente, cotangente, arcsinus, arctangente, sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique etc...) sont continues sur leur ensemble de définition.

Et bien entendu toutes les fonctions obtenues à partir de celles-ci par les opérations de somme, multiplication scalaire, produit, quotient, composition, etc... sont aussi continues.

PREUVE Montrons que l'exponentielle est continue (en fait, elle est parfois définie comme étant dérivable et nous verrons que cela entraîne sa continuité). Montrons déjà sa continuité en 0. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Par produit, on a $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 = e^0$. Ceci montre la continuité de l'exponentielle en 0.

Soit alors a un réel quelconque, on a pour tout x , $e^x - e^a = e^a(e^{x-a} - 1)$. Or, $\lim_{x \rightarrow a} x - a = 0$ et donc, par composition et différence, $\lim_{x \rightarrow a} e^{x-a} - 1 = 0$. En multipliant par e^a , on a alors aussi $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$ et donc l'exponentielle est bien continue en tout réel.

Montrons la continuité du logarithme. Commençons par la montrer en 1. On sait que $\lim_{x \rightarrow 1, x \neq 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$. En multipliant par $(x-1)$, qui tend vers 0 en 1, on obtient que la limite en 1 du logarithme fait bien $0 = \ln 1$, donc que le logarithme est continu en 1. Maintenant, plaçons nous en un point $a > 0$ quelconque. Pour tout $x > 0$, on a $\ln x - \ln a = \ln \frac{x}{a}$. Or, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{a} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$. Par composition, on obtient $\lim_{x \rightarrow a} \ln \frac{x}{a} = 0$, ce qui prouve $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$, et donc la continuité du logarithme en a . Ainsi, la fonction logarithme est bien continue sur \mathbb{R}_+^* .

On a pour tout réel α , et tout $x > 0$, $x^\alpha = \exp \alpha \ln x$, et ainsi, la fonction $x \rightarrow x^\alpha$ est continue par produit par un scalaire et composée de fonctions continues.

Pour le sinus, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. En multipliant par x , qui tend vers 0 en 0, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Alors, pour x et a quelconques, on a $\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$, donc $|\sin x - \sin a| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right|$. Or, par composition des limites, on a $\lim_{x \rightarrow a} \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| = 0$, et donc $\lim_{x \rightarrow a} \sin x - \sin a = 0$.

Pour les autres fonctions classiques, leur étude particulière montre leur continuité sur leur ensemble de définition (nous verrons même qu'elles vérifient, sauf exception, une propriété encore plus forte, la dérivabilité). Λ

2.4 Fonctions continues sur des intervalles

Nous donnons ici deux théorèmes importants sur les fonctions continues définies sur des intervalles fermés et bornés, ainsi que quelques conséquences.

Le premier de ces théorèmes porte le nom de *Théorème des valeurs intermédiaires* :

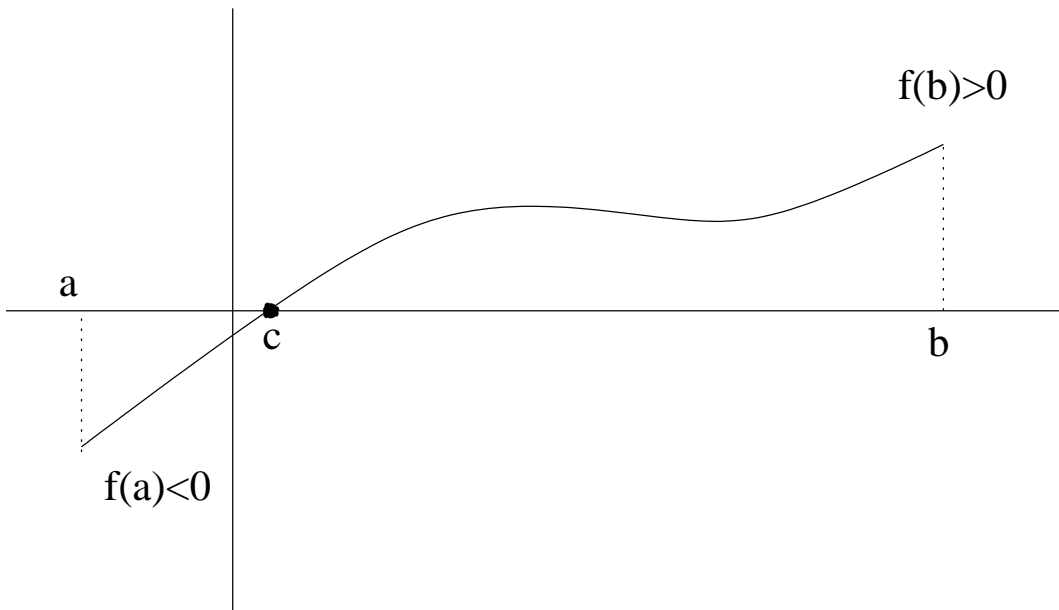
THÉORÈME 2.11 Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a; b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

PREUVE On peut supposer $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ quitte à raisonner sur $-f$. Soit E le sous-ensemble de $[a; b]$ formé des points qui ont une image positive par f , autrement dit $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. L'ensemble E est non vide, car il contient b , et minoré par a . Il possède donc une borne inférieure c . De plus, on a bien $c \in [a; b]$.

Si on avait $f(c) > 0$, c ne serait pas égal à a et il existerait $\alpha > 0$ tel que pour tout x dans $[c - \alpha; c]$, on ait $|f(x) - f(c)| \leq \frac{f(c)}{2}$, a fortiori $f(x) \geq \frac{f(c)}{2} > 0$. En particulier, on aurait $c - \alpha \in E$, ce qui contredirait le fait que c est un minorant de E . On a donc $f(c) \leq 0$.

Si on avait $f(c) < 0$, c ne serait pas égal à b et il existerait $\alpha > 0$ tel que pour tout x dans $[c; c + \alpha]$, on ait $|f(x) - f(c)| \leq \frac{-f(c)}{2}$, a fortiori $f(x) \leq \frac{f(c)}{2} < 0$. Il n'y aurait donc aucun élément de E dans l'intervalle $[c; c + \alpha]$. On sait que cela interdit que c soit la borne inférieure de E . On a donc $f(c) \geq 0$.

Finalement, comme $f(c)$ est à la fois positif et négatif, on a $f(c) = 0$. Λ



COROLLAIRE 2.12 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction réelle continue sur I . Alors l'image de f est un intervalle de \mathbb{R} .

PREUVE Plaçons nous sous les hypothèses de l'énoncé du corollaire et prenons trois réels $u < v < w$ avec u et w dans l'image de f (disons $u = f(x)$ et $v = f(y)$). Soit alors g la fonction $t \rightarrow f(t) - v$ définie sur l'intervalle $[x; y]$ si $x < y$ ou $[y; x]$ si $x > y$

(remarquons que l'intervalle de définition de g est bien inclus dans I). On a alors $g(x) < 0$ et $g(y) > 0$. De plus, g est continue comme somme d'une fonction continue et d'une fonction constante, donc continue. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g , ce qui nous procure un élément z de l'intervalle de définition de g (et on a a fortiori z dans I) tel que $g(z) = 0$, autrement dit $f(z) = v$. Ainsi, v appartient bien à l'image de f et donc l'image de f est bien un intervalle, d'après leur caractérisation. Λ

Dans le cas d'une application continue et strictement croissante sur un intervalle, on peut même affirmer des choses plus précises :

PROPOSITION 2.13 *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction continue et strictement croissante sur I . Alors f réalise une bijection de I sur son image qui est un intervalle J , et la réciproque f^{-1} de J dans I est une application continue et strictement croissante.*

PREUVE Plaçons-nous sous les conditions de la proposition. Alors, l'image J de I par f est un intervalle d'après ce qui précède. De plus, comme f est strictement croissante, elle est forcément injective. On peut alors considérer l'application f^{-1} de J dans I (en fait, si on veut être tout à fait rigoureux, il faut prolonger à \mathbb{R} l'espace d'arrivée). L'application f^{-1} est strictement croissante. En effet, si y_1 et y_2 sont dans J , avec $y_1 < y_2$, et si x_1 et x_2 sont les antécédants respectifs de y_1 et y_2 par f , alors on ne peut avoir $x_1 \geq x_2$ car f est croissante. On a donc $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$. Il reste donc juste à prouver la continuité de f^{-1} .

Soit alors y dans J , $x \in I$ son image par f^{-1} et prenons une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de J qui converge vers y , ainsi que x_n la suite de terme général $f^{-1}(y_n)$. Soit $\epsilon > 0$. Si $x - \epsilon \notin I$, alors ce réel minore I et on a $x_n > x - \epsilon$ pour tout n . Sinon, comme f est strictement croissante, on a $f(x + \epsilon) > y$ et comme de plus la suite de terme général y_n tend vers y , on a, pour n assez grand, $f(x - \epsilon) < y_n$, ce qui, en appliquant la fonction f^{-1} qui est strictement croissante, nous donne $x_n > x - \epsilon$. Cette dernière inégalité est donc toujours vérifiée pour n assez grand. Par une preuve analogue, on a, pour n assez grand, $x_n < x + \epsilon$. Ainsi, pour n assez grand, on a $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$. Cela prouve que la suite de terme général $x_n = f^{-1}(y_n)$ converge vers $x = f^{-1}(y)$. On en déduit la continuité de f^{-1} . Λ

REMARQUE 2.14 *Le résultat reste vrai, avec une preuve analogue si f est continue et strictement décroissante.*

Le second théorème est le suivant :

THÉORÈME 2.15 *Soit f une application continue d'un intervalle $[a; b]$ dans \mathbb{R} . Alors l'image de f est bornée et atteint ses bornes, autrement dit il existe deux réels c_m et c_M dans $[a; b]$ tels que, pour tout x dans $[a; b]$, on a $f(c_m) \leq f(x) \leq f(c_M)$.*

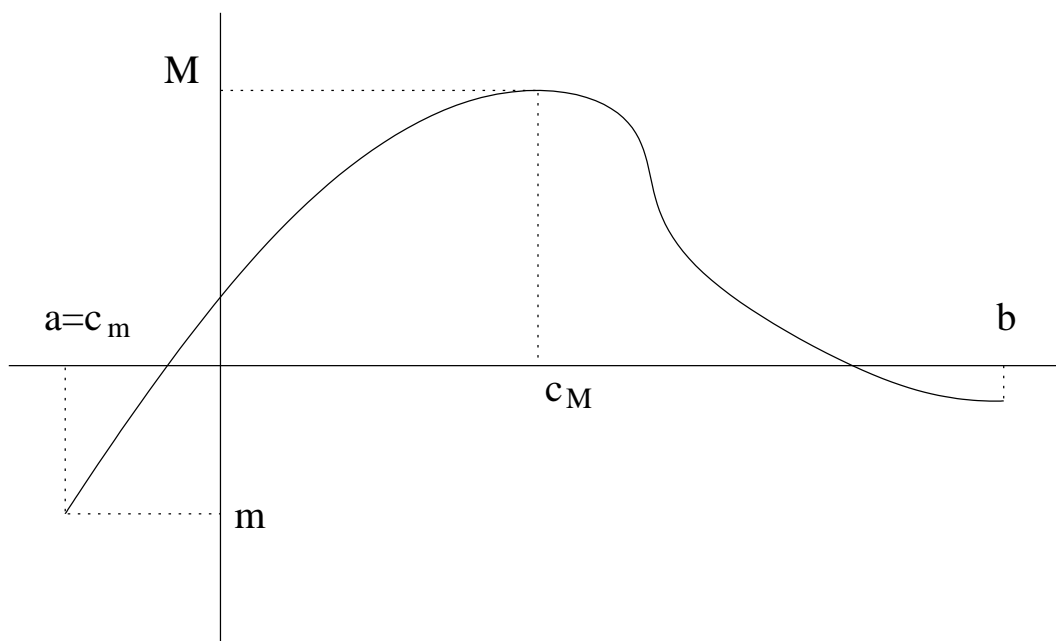
PREUVE Soit E l'image de l'intervalle $[a; b]$ par l'application f . Montrons d'abord que E est majorée. Supposons le contraire et prenons pour tout entier naturel n un élément x_n de $[a; b]$ tel que $f(x_n) \geq n$. La suite x_n ainsi définie prend ses valeurs dans $[a; b]$ et est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut en extraire une suite $x_{\phi(n)}$ qui est convergente, et dont nous noterons x la limite. Comme pour tout n on a $x_{\phi(n)} \geq a$, on a aussi $x \geq a$ et de même $x \leq b$, autrement dit $x \in [a; b]$. La fonction f est donc continue en x et la suite de terme général $f(x_{\phi(n)})$ doit converger vers $f(x)$. Or, pour tout n , on a $f(x_{\phi(n)}) \geq \phi(n) \geq n$. Cela prouve que la suite de terme général $f(x_{\phi(n)})$ diverge. On aboutit à une contradiction, qui montre que l'hypothèse faite que E n'est pas majorée est absurde.

L'ensemble E est donc une partie majorée de \mathbb{R} et elle n'est bien entendu pas vide. Elle possède donc une borne supérieure, que nous noterons M , et on a alors pour tout x dans $[a; b]$, $f(x) \leq M$. Il reste donc à voir qu'on a un réel c_M dans $[a; b]$ tel que $f(c_M) = M$. Le raisonnement sera très proche du précédent.

Prenons une suite y_n d'éléments de E qui converge vers M (comme M est la borne supérieure de E c'est faisable) et, pour tout n , prenons un élément x_n de $[a; b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme ci-dessus, la suite de terme général x_n est bornée et on peut en extraire une suite $x_{\phi(n)}$ qui est convergente et dont nous noterons c_M la limite. Comme ci-dessus, c_M est dans $[a; b]$ et donc f est continue en c_M . On peut donc affirmer que la suite de terme général $f(x_{\phi(n)})$, soit $y_{\phi(n)}$, converge vers $f(c_M)$. Or cette suite est une suite extraite de (y_n) qui convergeait vers M . Elle converge elle-même vers M et, par unicité de la limite, $M = f(c_M)$. Nous avons donc bien trouvé un élément c_m de $[a; b]$ vérifiant, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq f(c_M)$.

La preuve de l'existence de c_m est analogue.

Ainsi, l'ensemble E est bien borné et contient ses bornes supérieure et inférieure. Λ



REMARQUE 2.16 *D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'image d'un intervalle $[a; b]$ par une application continue est un intervalle. Le théorème précédent nous affirme que, si f n'est pas constante, cet intervalle est de la forme $[\alpha; \beta]$, i.e. fermé à gauche et à droite.*

On utilise parfois le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.17 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On suppose que pour tout x de $[a; b]$, on a $f(x) > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de $[a; b]$, on a $f(x) > \eta$.*

En effet, il existe $c_m \in [a; b]$ tel qu'on ait $f(x) \geq f(c_m)$ pour tout x de $[a; b]$. Comme $f(c_m) > 0$, il suffit de poser $\eta = \frac{f(c_m)}{2}$ pour obtenir le résultat désiré.

Exercices

1) Étudier les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + \sin x}{2x^3 + 4x \ln x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x^2 + e^{2x})}{3x^2 + 10 \cos(x+1)}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x \ln x)}{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\sin x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \tan(2x)}{(\sin^2 x) \cdot \cos(x \ln(x \sin x))}$;

g) Pour a réel non nul, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$;

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right)$. Si cette limite n'existe pas, trouver la limite à droite et la limite à gauche.

2) Soit f définie sur \mathbb{R} telle qu'on ait, pour tout réel x , $f(2x) = f(x)$. On suppose de plus que f possède une limite en 0. Montrer qu'alors f est constante sur \mathbb{R} .

3) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , continue en 0, telle que $f(0) = 0$ et qui vérifie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$. Montrer qu'alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(Indication : On pourra écrire, pour tout x et tout n ,

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n f\left(\frac{x}{2^{i-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^i}\right) \right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

4) Étudier l'ensemble des réels en lesquels les fonctions suivantes sont continues :

a) La fonction caractéristique de \mathbb{Q} , i.e. la fonction qui associe 1 à tout rationnel et 0 à tout irrationnel.

b) La fonction qui à un réel x associe 0 s'il est égal à 0 ou est l'inverse d'un entier et qui, sinon, associe $x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right)$.

c) La fonction qui à un nombre rationnel de la forme $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers, q positif et la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible, associe $\frac{1}{q}$ et qui associe 0 à tout irrationnel.

5) En quels réels la fonction $x \rightarrow \frac{1}{E(\ln|x|)}$ est-elle définie ? Continue ? Prolongeable par continuité ?

6) Soient f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $K > 0$ un réel. On dit que f est K -lipschitzienne si, pour tous réels x et y , on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|$$

Montrer que, pour n'importe quel K , une application K -lipschitzienne est continue sur \mathbb{R} .

7) On considère une fonction continue de l'intervalle $[0; 1]$ dans lui-même. Montrer qu'il existe x tel que $f(x) = x$.

8) Soient $a < b$ deux réels et f une application continue de $[a; b]$ dans \mathbb{R} telle que $f(a) = f(b) = 0$. Déterminer le nombre maximum possible de réels ayant un unique antécédant par f .

9) i) Vérifier que pour tout réel a , l'application $f_a : x \rightarrow a \cdot x$ est continue et, pour tous réels x et y , vérifie $f_a(x + y) = f_a(x) + f_a(y)$.

On se donne maintenant une fonction f qui est continue sur \mathbb{R} et qui vérifie, pour tous x et y réels, l'égalité $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On pose $a = f(1)$.

ii) Montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout entier naturel n , on a $f(n) = n \cdot a$. Montrer que cela est vrai aussi pour tout entier relatif n .

iii) Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel. Montrer que $f(p) = q \cdot f(r)$ et en déduire que $f(r) = a \cdot r$.

iv) Montrer que pour tout réel x , on a $f(x) = a \cdot x$.

10) Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue sur \mathbb{R} .

ii) Pour toute partie ouverte O de \mathbb{R} , $f^{-1}(O)$ est une partie ouverte de \mathbb{R} .

iii) Pour toute partie fermée F de \mathbb{R} , $f^{-1}(F)$ est une partie fermée de \mathbb{R} .

11) Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

a) Montrer que pour tout entier k assez grand, l'équation $x = f(x)^k$ admet au moins une solution. Pour un tel k , on pose $r_k = \inf\{x \mid x = f(x)^k\}$.

b) Montrer que pour tout k où r_k existe, on a $r_k = f(r_k)^k$.

c) Montrer que r_k est décroissante et que sa limite est $\inf\{x \text{ tq } f(x) > 1\}$.

3 Dérivation

3.1 Définition et premières propriétés

DÉFINITION 3.1 Soit f une application d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , a un point de I et l un réel. On dit que f est dérivable en a , si

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et sa valeur s'appelle alors le nombre dérivé de f au point a que l'on notera $f'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, la fonction $x \rightarrow f'(x)$ qui, à tout x de I , associe le nombre dérivé de la fonction f au point x s'appelle la fonction dérivée, ou simplement la dérivée, de la fonction f sur l'intervalle I .

Dans l'autre sens, si on a une fonction g définie sur un intervalle I , on appelle primitive de g sur I toute fonction dérivable sur I et dont g est la fonction dérivée.

EXEMPLE 3.1.1 Une fonction constante sur un intervalle ouvert y est dérivable, de dérivée nulle en tout point.

La fonction identité est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée la fonction constante de valeur 1.

La fonction valeur absolue est dérivable en tout réel non nul. Sa dérivée en x vaut -1 si x est strictement négatif et 1 si x est strictement positif. Elle n'est par contre pas dérivable en 0.

Variantes de la notion :

DÉFINITION 3.2 Si f n'est plus nécessairement définie sur un intervalle, mais sur une partie E de \mathbb{R} , on définit la notion de dérivée en un point intérieur à E , de dérivée à droite en a si E contient un intervalle de la forme $[a; b[$ et de dérivée à gauche en b si E contient un intervalle de la forme $]a; b]$, simplement par restriction de f à de telles parties (l'existence et la valeurs de telles dérivées ne dépendent pas de la partie choisie).

On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle (plus forcément ouvert) si elle est dérivable sur l'intérieur de l'intervalle et, éventuellement à droite en son minimum et à gauche en son maximum si l'intervalle contient une telle borne, la fonction dérivée sur l'intervalle étant la fonction prenant pour valeur la dérivée (éventuellement à droite ou à gauche) au point considéré.

EXEMPLE 3.1.2 La fonction valeur absolue est dérivable à droite en 0, et sa dérivée à droite y prend la valeur 1. Aussi, elle est dérivable à gauche en 0, et sa dérivée à gauche y prend la valeur -1 .

REMARQUE 3.1 Si f est dérivable en a , alors elle y est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$. Réciproquement, si une fonction est dérivable à droite et à gauche en un point et a les mêmes nombres dérivés des deux côtés, alors elle est dérivable en ce point.

REMARQUE 3.2 Si f est dérivable en a , alors elle y est continue. En effet, pour tout $x \neq a$ où f est définie, on a $f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$ et ainsi, si f est dérivable en a , $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = f(a) + \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} (x-a) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)$. Donc, f est bien continue en a .

De même, si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a , alors elle y est continue à droite (resp. à gauche), et si une fonction est dérivable sur un intervalle, elle y est continue.

Voyons quelques opérations élémentaires sur les nombres dérivés et les fonctions dérivées :

PROPOSITION 3.3 Somme Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a . Alors $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. Ainsi, si f et g sont dérivables sur I , alors $f + g$ aussi et $(f + g)' = f' + g'$.

Différence Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a . Alors $f - g$ est dérivable en a et $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$. Ainsi, si f et g sont dérivables sur I , alors $f - g$ aussi et $(f - g)' = f' - g'$.

Multiplication scalaire Soit f une fonction dérivable en a et λ un réel. Alors la fonction λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$. Ainsi, si f est dérivable sur I , alors λf aussi et $(\lambda f)' = \lambda(f')$.

Produit Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a . Alors la fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Ainsi, si f et g sont dérivables sur I , alors fg aussi et $(fg)' = f'g + fg'$.

Composition Soit f une fonction dérivable en un point a et g une fonction dérivable au point $g'(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$. Ainsi, si f est dérivable sur I , et g est dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Inversion Soit f une fonction dérivable en un point a telle que $f(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$. Ainsi, si f est dérivable et ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est aussi dérivable sur I et $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$.

Quotient Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a , avec $f(a) \neq 0$, alors $\frac{g}{f}$ est dérivable en a et $(\frac{g}{f})'(a) = \frac{g'(a)f(a) - g(a)f'(a)}{(f(a))^2}$. Ainsi, si f et g sont dérivables sur I et si f ne s'y annule pas, alors $\frac{g}{f}$ est aussi dérivable sur I et $(\frac{g}{f})' = -\frac{g'f - g(f')}{f^2}$.

Fonction réciproque Soit f continue et bijective d'un intervalle ouvert I dans un intervalle ouvert J . On suppose que f est dérivable en un point a de I pour lequel $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction f^{-1} réciproque de f , de J dans I , est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. Ainsi, si f est dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annule pas, on a $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

PREUVE Dans chaque cas, la dérivabilité sur un intervalle et la valeur résulte de la dérivabilité et de la valeur en chaque point. Nous nous contentons donc de prouver les résultats en un point.

Supposons f et g dérivables en a . Alors, pour tout $x \neq a$ où f et g sont définies, on a $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$. Ainsi, si les deux termes de cette somme ont une limite en a (par valeurs différentes), alors $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a}$ existe aussi et est la somme de ces deux limites. Ainsi, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Supposons maintenant f dérivable en a et λ réel. Alors, pour tout $x \neq a$ où f est définie, on a $\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$. Ainsi, si $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a}$ existe aussi et vaut $\lambda \cdot \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$. Soit $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

Supposons f et g dérivables en a . Remarquons que pour tout x en lequel f et g sont définies, on a $(fg)(x) - (fg)(a) = f(a)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))(g(x) - g(a))$. Or, $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(a)(g(x) - g(a))}{x-a}$ existe et vaut $f(a)g'(a)$. Aussi, $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{g(a)(f(x) - f(a))}{x-a}$ existe et vaut $f'(a)g(a)$. De plus, on sait que f , qui est dérivable en a , y est continue et donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$. On obtient alors $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{(f(x) - f(a))(g(x) - g(a))}{x-a} = 0 \cdot g'(a) = 0$. En sommant ces trois valeurs, on obtient $(fg)'(a) = \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Supposons f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$.

Commençons par traiter le cas spécial où $f'(a) = 0$, cas dans lequel nous nous plaçons. On peut alors trouver $\alpha > 0$ tel que pour tout y de $]f(a) - \alpha; f(a)[\cup]f(a); f(a) + \alpha[$, on a $|\frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} - g'(a)| \leq 1$, et a fortiori $|\frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}| \leq |g'(a)| + 1$. La fonction f étant continue en a , car dérivable en a , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de $]a - \eta; a + \eta[$, on a $f(x) \in]f(a) - \alpha; f(a) + \alpha[$. On a alors pour un tel x autre que a , $|\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a}| \leq (|g'(a)| + 1) \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$, y compris si $f(x) = f(a)$. Comme $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} (|g'(a)| + 1) \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = (|g'(a)| + 1)f'(a) = 0$, il est clair que $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = 0$. Donc $(g \circ f)'(a) = 0 = f'(a) \cdot g'(f(a))$, comme désiré.

Si maintenant on a $f'(a) \neq 0$, il y a $\eta > 0$ tel que pour tout x de $]a - \eta; a[\cup]a; a + \eta[$, $f(x) \neq f(a)$. On a alors pour x dans cet ensemble, $\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)}$.

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. la fonction f , dérivable en a , y est a fortiori continue et donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et donc, par composition des limites, on obtient :
 $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)} = \lim_{y \rightarrow f(a), y \neq f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a))$. Comme on a de plus $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, on obtient par produit $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Pour dériver l'inverse d'une fonction, nous passons par la fonction inverse, soit la fonction $inv : x \rightarrow \frac{1}{x}$ de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} . Soient a et x deux réels non nuls et distincts. On a alors $\frac{inv(x) - inv(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\frac{1}{ax}$. On a alors, pour $a \neq 0$, $(inv)'(a) = \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} -\frac{1}{ax} = -\frac{1}{a^2}$.

Si f est dérivable en un point a où elle ne s'annule pas, alors elle y est continue et il existe un réel $\eta > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $]a - \eta; a + \eta[$, et sur cet intervalle, on a $\frac{1}{f} = inv \circ f$. Par composition, $\frac{1}{f}$ est bien dérivable en a et $(\frac{1}{f})'(a) = f'(a) \cdot (inv)'(f(a)) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.

Si maintenant f et g sont dérivables en un point a , avec $f(a) \neq 0$, alors sur un intervalle autour de a on a $\frac{g}{f} = g \cdot \frac{1}{f}$ et la formule de dérivation d'un produit nous donne $(\frac{g}{f})'(a) = g'(a) \cdot \frac{1}{f(a)} + g(a) \cdot (\frac{1}{f})'(a) = \frac{g'(a)f(a) - g(a)f'(a)}{(f(a))^2}$.

Supposons maintenant f bijective de I dans J , intervalles ouverts. Soit $a \in I$ tel que $f'(a)$ existe et n'est pas nul. Posons $b = f(a)$ et soit $y \in J$. On a :

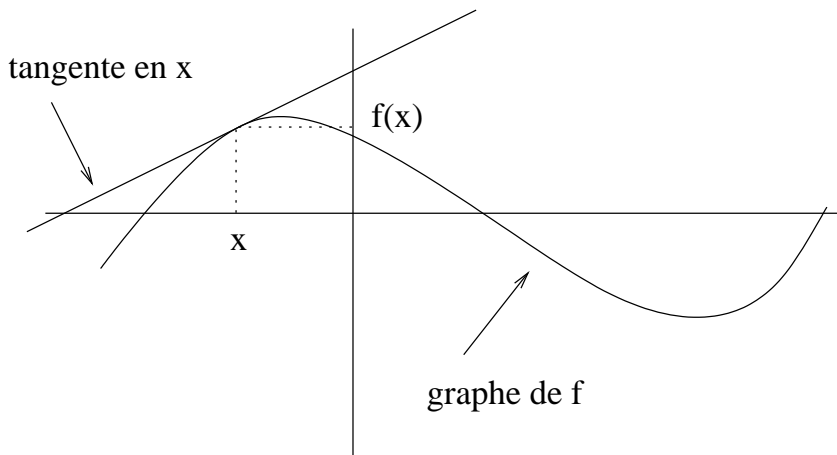
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b} = \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-a}} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}$$

Or, nous savons déjà que f^{-1} est continue en b . On a donc $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$ et donc, par composition des limites, $\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Comme ce nombre est non nul par hypothèse, on en déduit

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \frac{1}{\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

Ainsi, f^{-1} est bien dérivable en b et $f'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}$. Λ

Interprétation graphique de la dérivation La dérivée d'une fonction en un point se voit "sur le dessin" :



$f'(x)$ est la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$

3.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Nous calculons ici quelques fonctions dérivées.

- i) Une fonction constante est dérivable, et sa fonction dérivée est la fonction nulle.
- ii) La fonction identité est dérivable et sa fonction dérivée est la fonction constante, de valeur 1.
- iii) Soit $n \geq 1$, la fonction $x \rightarrow x^n$ est dérivable, et sa dérivée est la fonction $x \rightarrow nx^{n-1}$.
- iv) La formule précédente est aussi valable pour les entiers $n \leq -1$.
- v) La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est elle-même.
- vi) La fonction logarithme est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa fonction dérivée est $x \rightarrow \frac{1}{x}$.
- vii) La fonction sinus est dérivable, et sa dérivée est la fonction cosinus.
- viii) La fonction cosinus est dérivable et sa dérivée est l'opposé de la fonction sinus.
- ix) La fonction tangente est dérivable là où elle est définie et sa dérivée est la fonction $x \rightarrow 1 + \tan^2(x)$.
- x) La fonction Arcsinus est dérivable sur $] - 1; 1[$, et sa dérivée est la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- xi) La fonction Arctangente est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$.

Commençons par le point i). Soit f constante de valeur c sur un intervalle I , et $x \in I$. On a alors, pour tout $y \neq x$ dans I , $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{c-c}{y-x} = 0$. De plus, $\lim_{y \rightarrow x} 0 = 0$ et donc $f'(x)$ existe et vaut 0.

Prenons maintenant $f = Id$, soit $f(t) = t$ pour tout réel t . Soit x un réel. On a alors, pour tout $y \neq x$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{y-x}{y-x} = 1$. De plus, $\lim_{y \rightarrow x} 1 = 1$ et donc $f'(x)$ existe et vaut 1.

Considérons maintenant $f(t) = t^n$, $n \geq 1$. Soit x un réel. On a alors, pour tout $y \neq x$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{y^n-x^n}{y-x}$. Or, on connaît la formule $(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n$. Ainsi, $\frac{y^n-x^n}{y-x} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i$. Lorsque y tend vers

x , on a pour tout i , $\lim y \rightarrow xy^i = x^i$ et donc $\lim y \rightarrow \overline{xx^{n-1-i}y^i} = x^{n-1}$. Et donc $\lim_{y \rightarrow x} \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1} = nx^{n-1}$. On en déduit donc que $f'(x)$ existe et vaut nx^{n-1} .

Considérons maintenant, pour $n \geq 1$, la fonction $f(t) = t^{-n} = \frac{1}{t^n}$. Soit x un réel non nul, y un réel distinct de x et non nul. On a $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{\frac{1}{y^n}-\frac{1}{x^n}}{y-x} = \frac{x^n-y^n}{x^n y^n (y-x)} = -\frac{1}{x^n y^n} \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i$. Or, on sait que, quand y tend vers x , la somme ci-dessus tend vers nx^{n-1} et $x^n y^n$ tend vers $x^{2n} \neq 0$. Ainsi, $-\frac{1}{x^n y^n} \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i$ tend vers $-n \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{(-n)-1}$. Cela fournit bien la formule désirée.

La preuve des points v) et vi) dépend des définitions que l'on donne des fonctions exponentielle et logarithme. Elles sont même parfois incluses dans les définitions de ces fonctions. Nous pouvons ici les admettre.

Pour le cosinus, on voit que la fonction cosinus est la composée de la fonction sinus par la fonction $g : t \rightarrow t - \frac{\pi}{2}$. Or g est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction constante de valeur 1. On a alors cosinus dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \rightarrow 1 \cdot \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x - \pi) = -\sin x$.

Pour la fonction tangente, on a pour tout réel t ayant un cosinus non nul, $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$. Comme les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} , la fonction tangente est dérivable en tout point où le cosinus ne s'annule pas. Et en un tel point x , on a $\tan'(x) = \sin'(x) \cdot \frac{1}{\cos t} + \sin x \cdot (-\frac{\cos'(x)}{\cos^2 x}) = \frac{\cos x}{\cos x} + \sin x \cdot (-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

La fonction Arcsinus est, la réciproque de la fonction sinus de $[-1; 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Elle est alors dérivable en tout point de $[-1; 1]$ dont l'image a une image non nulle par la dérivée de sinus, qui est le cosinus. Elle est donc dérivable en tout point de $[-1; 1]$, excepté les images réciproques de $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, donc sur $] -1; 1[$. De plus, en un tel point x , on a $\text{Arcsinus}'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Or, pour $x \in] -1; 1[$, soit $y = \cos(\arcsin x)$. On a $x^2 + y^2 = \sin^2(\arcsin x) + \cos^2(\arcsin x) = 1$. On a donc $y^2 = 1 - x^2$ et de plus $y \geq 0$ car $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, $y = \sqrt{1 - x^2}$ et donc $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction Arctangente est, de \mathbb{R} dans $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, la réciproque de la fonction tangente. Ainsi, elle est dérivable en tout réel dont l'image a une image non nulle par la dérivée de tangente, et comme cette dernière ne s'annule pas sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, la fonction Arctangente est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, tout réel x , on a $\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$.

3.3 Dérivation et variations des fonctions

Nous établissons ici certains liens entre les variations d'une fonction dérivable et sa fonction dérivée. Remarquons qu'ils sont obtenus pour des fonctions dont l'ensemble de définition est un intervalle et cette hypothèse est importante. Lorsqu'elle n'est pas vérifiée, il faut faire très attention à ne pas les utiliser à tort.

LEMME 3.1 Soit I un intervalle ouvert contenant un point a et f une application dérivable de I dans \mathbb{R} présentant un extrémum local au point a . Alors $f'(a) = 0$.

PREUVE On va montrer la contraposée, soit que si $f'(a) \neq 0$, alors f ne peut pas avoir en a un extrémum local. On suppose donc $f'(a) \neq 0$ et, quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f'(a) > 0$.

Dans ce cas, on peut trouver $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \neq a$ dans $]a - \eta; a + \eta[$, on a $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)| \leq \frac{f'(a)}{2}$. On a alors, pour un tel x , $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$.

Ainsi, si $x \in]a; a + \eta[$, alors $f(x) - f(a) = (x - a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le produit de deux réels strictement positifs et l'est donc lui-même. Donc, pour tout x dans $]a; a + \eta[$, on a $f(x) > f(a)$, ce qui interdit à f d'avoir un maximum en a .

Si en revanche x est dans $]a - \eta; a[$, alors $x - a$ est strictement négatif et un raisonnement analogue au précédent montre que $f(x) < f(a)$. On ne peut donc pas avoir non plus de minimum en a .

Finalement, f ne peut avoir d'extrémum en a , ce qui prouve le lemme. Λ

Le théorème suivant est connu sous le nom de *Théorème de Rolle* :

THÉORÈME 3.4 Soit f une application d'un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. On suppose en outre que $f(a) = f(b)$ ($= 0$). Alors il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

PREUVE Quitte à ajouter une constante à f (ce qui ne change pas f'), on peut supposer que $f(a) = 0$. Si f est constante, sa dérivée existe et est nulle sur tout $]a; b[$ et la conclusion du théorème est juste dans ce cas.

Sinon, f prend des valeurs non nulles et, quitte à changer f en $-f$ (mais si la dérivée de $-f$ s'annule en un point c , celle de f s'y annule aussi), f prend des valeurs strictement positives. Alors il existe, d'après le théorème 2.15, un réel $c \in]a; b[$ tel que f admette un maximum au point c . On doit alors avoir $f'(c) = 0$, donc c ne peut être a ni b et on peut donc affirmer que $c \in]a; b[$. D'après le lemme précédent, on a $f'(c) = 0$, ce qui prouve le théorème. Λ

COROLLAIRE 3.5 Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a; b]$ dans \mathbb{R} , dérivable sur l'intervalle $]a; b[$. Alors, il existe c dans $]a; b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. (*Égalité des accroissements finis*).

En particulier, si on a un réel m (resp. un réel M) tel que pour tout x de $]a; b[$, $m \leq f'(x)$ (resp. $f'(x) \leq M$), alors on a $m(b - a) \leq f(b) - f(a)$ (resp. $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$). (*Inégalité des accroissements finis*).

PREUVE Il est clair que l'inégalité des accroissements finis résulte directement de l'égalité en multipliant les deux membres par $b - a$. Montrons juste l'égalité des accroissements finis.

Soit f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. On appelle g la fonction, définie aussi sur $[a; b]$ donnée, pour tout x de cet intervalle, par $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. C'est la somme de f et d'une fonction affine, et elle est donc aussi continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ où pour tout x , $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. De plus, on a $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ et $g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = (f(b) - f(a)) - (f(b) - f(a)) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g , ce qui nous fournit un élément c de $]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$ et cela donne alors $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, montrant l'égalité désirée. Λ

Cette inégalité entraîne le théorème suivant :

THÉORÈME 3.6 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} . Alors f est croissante (resp. décroissante, constante) si et seulement si sa fonction dérivée est positive (resp. négative, nulle).*

DÉMONSTRATION Commençons par l'équivalence entre dérivée positive et fonction croissante.

Supposons f dérivable et croissante sur un intervalle I et soit a dans I . On a, pour tout $b \neq a$ de I , par croissance, $f(b) - f(a)$ du même signe que $b - a$, donc $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$. Par passage à la limite, on a alors $f'(a) \geq 0$, et donc la fonction f' est positive sur I .

Réciproquement, si f' est positive sur I et $a < b$ deux éléments de I , on a $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $]a; b[$ et l'inégalité des accroissements finis donne $0 \leq f(b) - f(a)$. Donc f est bien croissante sur I .

Pour montrer l'équivalence entre fonction décroissante et dérivée négative, il suffit d'appliquer ce qui précède en raisonnant sur l'opposé de la fonction considérée.

Pour l'équivalence entre fonction constante et dérivée nulle, il suffit de voir que fonction constante équivaut à fonction à la fois croissante et décroissante et que dérivée nulle équivaut à dérivée à la fois positive et négative. Ce qui précède nous affirme alors que ces deux choses sont bien équivalentes pour une fonction dérivable sur un intervalle. Λ

COROLLAIRE 3.7 *Prenons deux fonctions f et g dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} et telles que $f' = g'$. Alors il existe un réel K tel que pour tout x de I , on a $g(x) = f(x) + K$*

En effet, si f et g sont deux fonctions ayant la même dérivée sur I , alors la fonction $g - f$ a une dérivée nulle sur I , donc $g - f$ est constante. Si K est la valeur de cette constante, on a pour tout x de I , $g(x) = f(x) + K$.

En ce qui concerne les fonctions de dérivée strictement positive sur un intervalle, nous avons :

PROPOSITION 3.8 *Soit f une application dérivable et de dérivée strictement positive sur un intervalle I de \mathbb{R} . Alors f est strictement croissante. Appelons J son image et f^{-1} la bijection réciproque de f . Alors f^{-1} est aussi dérivable, de dérivée strictement positive sur J et, pour tout y de J , on a $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.*

En particulier, si une fonction f est dérivable sur un intervalle I_0 contenant un réel a , que $f'(a) > 0$ et que f' est continue en a , alors il existe un intervalle I inclus dans I_0 et contenant a sur lequel on peut appliquer la proposition.

PREUVE D'abord, f est strictement croissante. En effet, comme sa dérivée est positive sur I , elle est croissante. De plus, si on avait deux points distincts $x < x'$ de I ayant la même image par f , la fonction f serait constante sur $[x, x']$ et sa dérivée y serait nulle, ce qui est exclus.

D'après la proposition 2.13, f induit une bijection de I sur son image J qui est un intervalle, dont la réciproque f^{-1} est continue. Montrons que f^{-1} est dérivable et calculons sa dérivée.

Soit y dans J et $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $J \setminus \{y\}$ qui converge vers y . Posons pour tout n , $x_n = f^{-1}(y_n)$ et $x = f^{-1}(y)$. On a alors, pour tout n , $\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}}$. Or, par continuité de f^{-1} , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x)$. On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. On obtient donc bien $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Λ

Si on a une fonction f dont la dérivée est strictement négative sur un intervalle I , la proposition est encore valable sauf que f^{-1} est strictement décroissante. La formule donnant $(f^{-1})'$ est la même.

Règles de L'Hopital : Nous donnons ici d'autres application de l'inégalité des accroissements finis.

PROPOSITION 3.9 *Soit I un intervalle non réduit à un point et ouvert en une extrémité a . On suppose qu'on a une fonction f dérivable sur I et telle que la fonction f' possède une limite l en a . Alors f est prolongeable par continuité en a et sa prolongée \tilde{f} est dérivable en a , où sa dérivée vaut l .*

Si maintenant a est un point intérieur à un intervalle I , et que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec $\lim_a f' = l$, alors la conclusion ci-dessus demeure valide sous l'hypothèse que les limites à gauche et à droite de f' en a coïncident.

PREUVE Plaçons nous sous les conditions de la première partie de la proposition. Pour prouver que f possède une limite en a , nous allons utiliser le critères de Cauchy. On suppose $a = \sup(I)$, la preuve étant analogue si $a = \inf(I)$. Il s'agit dans ce cas d'une limite à gauche en a .

On sait qu'il existe un réel η tel que, en tout point x de $]a - \eta; a[$, on a $|f'(x) - l| \leq 1$, qui entraîne $|f'(x)| \leq |l| + 1$. Pour deux réels x et y dans $]a - \eta; a[$, on a alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(y)| \leq (|l| + 1)|x - y|$. Si on se fixe maintenant $\epsilon > 0$, on a, en posant $\mu = \min(\eta, \frac{\epsilon}{1+|l|})$, pour tous x et y dans $]a - \mu; a[$, $|f(x) - f(y)| \leq (|l| + 1)\mu \leq \epsilon$. Ainsi, la fonction f vérifie bien le critère de Cauchy près de a , et a donc bien une limite en a^- .

Appelons donc \tilde{f} la prolongée par continuité de f en a . Prenons $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe un réel η tel que, en tout point x de $]a - \eta; a[$, on a $|f'(x) - l| < \epsilon$. Prenons un point x_0 dans $]a - \eta; a[$. Si on prend y quelconque dans $]x_0; a[$, on a $[x_0; y] \subset]a - \eta; a[$, et l'inégalité des accroissements finis nous fournit $(l - \epsilon)(y - x_0) \leq f(y) - f(x_0) \leq (l + \epsilon)(y - x_0)$. Alors, en passant à la limite en a , $(l - \epsilon)(a - x_0) \leq f(a) - f(x_0) \leq (l + \epsilon)(a - x_0)$, ou encore $l - \epsilon \leq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq l + \epsilon$.

Par passage à la limite en a , on obtient bien $f'(a) = l$.

Si on suppose cette fois que a est intérieur à I , on peut couper l'intervalle $I \setminus \{a\}$ en deux intervalles ayant a pour extrémité. On a donc un prolongement par continuité à gauche et un à droite vérifiant la propriété voulue. On a un prolongement global si ces deux prolongements coïncident en a , i.e. si les limites à gauche et à droite de f en a sont les mêmes.

Dans ce cas, le prolongement est bien dérivable en a et sa dérivée y vaut l . Λ

PROPOSITION 3.10 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle de la forme $]M; +\infty[$ (resp $] - \infty; m[$). On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$), l pouvant être un réel ou $\pm\infty$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = l$).*

PREUVE Plaçons nous sous les conditions de la proposition. On suppose ϵ réel, cette preuve s'adaptant facilement au cas $l = \pm\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe N , qu'on peut prendre strictement positif, tel que pour tout $x \geq N$, on a $l - \frac{\epsilon}{2} \leq f'(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$. On a alors pour tout $y \geq N$, $f(N) + (l - \frac{\epsilon}{2})(y - N) \leq f(y) \leq f(N) + (l + \frac{\epsilon}{2})(y - N)$, et donc $\frac{f(N)}{y} + (l - \frac{\epsilon}{2})\frac{y - N}{y} \leq \frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(N)}{y} + (l + \frac{\epsilon}{2})\frac{y - N}{y}$. Or, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(N)}{y} + (l - \frac{\epsilon}{2})\frac{y - N}{y} = l - \frac{\epsilon}{2}$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(N)}{y} + (l + \frac{\epsilon}{2})\frac{y - N}{y} = l + \frac{\epsilon}{2}$. On peut donc trouver N' tel que pour tout $x \geq N'$, on a $\frac{f(N)}{y} + (l - \frac{\epsilon}{2})\frac{y - N}{y} \geq l - \epsilon$ et $\frac{f(N)}{y} + (l + \frac{\epsilon}{2})\frac{y - N}{y} \leq l + \epsilon$.

Ceci nous prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Le cas d'une limite en $-\infty$ est analogue. Λ

Dérivation et parité

PROPOSITION 3.11 *Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , ou sur un intervalle ouvert centré en 0. Alors :*

Si f est dérivable et paire, alors sa dérivée est impaire. Si f est dérivable et impaire, alors sa dérivée est paire.

Si f est impaire et admet une primitive F , alors F est paire. Si f est paire et admet une primitive F , alors F est impaire si et seulement si $F(0) = 0$.

PREUVE Soit f définie sur un intervalle I qui est soit \mathbb{R} , soit ouvert centré en 0. On considère la fonction g définie sur I telle que $g(x) = f(-x)$. Alors $g = f \circ -Id_I$ et donc, par composition, on a pour tout $x \in I$: $g'(x) = -f'(-x)$.

Ainsi, si f est paire, on a $g = f$ et donc $g' = f'$, soit pour tout x de I , $f'(x) = -f'(-x)$. Ainsi, f' est impaire.

Tandis que si f est impaire, on a $g = -f$ et donc $g' = -f'$, soit pour tout x de I , $f'(x) = f'(-x)$. Ainsi, f' est paire.

Supposons maintenant qu'une fonction f soit définie sur I et possède F comme primitive. On suppose d'abord f impaire et on pose, pour x dans I , $G(x) = F(x) - F(-x)$. La fonction G est dérivable sur I et sa dérivée est $x \rightarrow f(x) - (-f(-x)) = f(x) + f(-x) = 0$ par imparité de f . La fonction G est constante et comme $G(0) = F(0) - F(0) = 0$, G est nulle sur I , autrement dit F est paire.

On suppose maintenant f paire et on pose alors pour tout x dans I , $G(x) = F(x) + F(-x)$. La fonction G est dérivable sur I et sa dérivée est $x \rightarrow f(x) + (-f(-x)) = f(x) - f(-x) = 0$ par parité de f . La fonction G est constante et sa valeur est $G(0) = 2F(0)$. Ainsi G est nulle, autrement dit F est impaire, si et seulement si $F(0) = 0$. Λ

3.4 Dérivées d'ordre supérieur

DÉFINITION 3.3 *Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , f une application de I dans \mathbb{R} . On dit que f est deux fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I et si sa fonction dérivée est elle-même dérivable sur I . La fonction dérivée de sa fonction dérivée s'appelle alors la fonction dérivée seconde de f et est notée f'' .*

On définit par récurrence une fonction k fois dérivable sur un intervalle. Pour $k \geq 2$, on dit que f est k fois dérivable sur I si elle est $k - 1$ fois dérivable sur I et si sa fonction dérivée $(k - 1)$ -ième est elle-même dérivable sur I . La fonction dérivée de sa fonction dérivée $(k - 1)$ -ième s'appelle alors la fonction dérivée k -ième de f et est notée $f^{(k)}$.

On dit qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert I est de classe \mathcal{C}^k si elle est k fois dérivable sur I et si, de plus, sa dérivée k -ième est continue sur I . On dit qu'elle est infiniment dérivable ou de classe \mathcal{C}^∞ sur I si elle est k fois dérivable pour tout entier naturel k (ou de classe \mathcal{C}^k pour tout k , ce qui revient au même).

REMARQUE 3.12 Si une fonction est k fois dérivable sur un intervalle I , alors elle est de classe $\mathcal{C}^{k'}$, et a fortiori k' fois dérivable sur I pour tout entier naturel $k' < k$.

REMARQUE 3.13 Il est clair que, pour $k \geq 2$, une fonction est k fois dérivable (resp. de classe \mathcal{C}^k) sur un intervalle si et seulement si sa dérivée existe et est $(k-1)$ fois dérivable (resp. de classe \mathcal{C}^{k-1}) sur ce même intervalle.

Beaucoup de fonctions usuelles sont de classe \mathcal{C}^∞ là où elles sont définies. Notons les fonctions polynomiales, l'exponentielle, le logarithme, les fonctions puissance (sur \mathbb{R}_+^*), les fonctions trigonométriques sinus, cosinus, tangente et trigonométriques inverse Arcsinus (sur $] -1; 1[$), Arctangente, les fonctions trigonométriques hyperboliques et leur réciproque, ainsi que, comme nous allons le voir, toutes les fonctions obtenues à partir de celles-ci par somme, produit, quotient ou composition.

PROPOSITION 3.14 Soit f une fonction k fois dérivable en un point a d'un intervalle ouvert I et λ un réel. Alors, λf est k fois dérivable en a et $(\lambda f)^{(k)}(a) = \lambda f^{(k)}(a)$. Ainsi, si f est k fois dérivable sur I (resp. de classe \mathcal{C}^k sur I), alors λf l'est aussi.

Soient f et g deux fonctions k fois dérivables en un point a d'un intervalle ouvert I (resp. k fois dérivable sur un intervalle ouvert I , de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle ouvert I). Alors $f + g$ est k fois dérivable en a et $(f + g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a)$. Ainsi, si f et g sont k fois dérivable sur I (resp. de classe \mathcal{C}^k sur I), alors $f + g$ l'est aussi.

Soient f et g deux fonctions k fois dérivables en un point a d'un intervalle ouvert I (resp. k fois dérivable sur un intervalle ouvert I , de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle ouvert I). Alors fg est k fois dérivable en a et on a la formule de Leibnitz :

$$(f \cdot g)^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(k-i)}(a)g^{(i)}(a)$$

Ainsi, si f et g sont k fois dérivable sur I (resp. de classe \mathcal{C}^k sur I), alors fg l'est aussi.

Soit f une fonction k fois dérivable (resp. de classe \mathcal{C}^k) sur un intervalle I , et g une fonction k fois dérivable (resp. de classe \mathcal{C}^k) sur $f(I)$. Alors $g \circ f$ est k fois dérivable (resp. de classe \mathcal{C}^k) sur I .

PREUVE Il suffit de faire une récurrence sur k .

C'est immédiat pour le produit par une constante et pour la somme.

Pour le produit des deux fonctions, la formule pour $k = 1$ décrit $(f \cdot g)'(a) = 1.f'(a).g(a) + 1.f(a).g'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$, ce que nous avons déjà prouvé.

Rappelons ici la très classique formule suivante sur les coefficients binomiaux : Pour tous entiers naturels $i < k$, on a $\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1}$

Supposons alors la formule de Leibnitz vraie pour un certain k_0 et supposons f et g $(k_0 + 1)$ fois dérivables en a . Alors f' et g' le sont k_0 fois. Et ainsi

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(k_0+1)}(a) &= (f'g + fg')(k_0)(a) = (f'g)(k_0)(a) + (fg')(k_0)(a) = \\
&= \sum_{i=0}^{k_0} \binom{k_0}{i} f^{(k_0-i)}(a)g^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{k_0} \binom{k_0}{i} f^{(k_0-i)}(a)g^{(i)}(a) = \\
&= \sum_{i=0}^{k_0} \binom{k_0}{i} f^{(k_0+1-i)}(a)g^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{k_0} \binom{k_0}{i} f^{(k_0-i)}(a)g^{(i+1)}(a) = \\
&= f^{(k_0+1)}(a)g(a) + \sum_{i=1}^{k_0} \binom{k_0}{i} f^{(k_0+1-i)}(a)g^{(i)}(a) + \\
&= \sum_{i=0}^{k_0-1} \binom{k_0}{i} f^{(k_0-i)}(a)g^{(i+1)}(a) + f(a)g^{(k_0+1)}(a) = \\
&= f^{(k_0+1)}(a)g(a) + \sum_{i=1}^{k_0} f^{(k_0+1-i)}(a)g^{(i)}(a) \left(\binom{k_0}{i} + \binom{k_0}{i+1} \right) + f(a)g^{(k_0+1)}(a) = \\
&= \sum_{i=1}^{k_0+1} \binom{k_0+1}{i} f^{(k_0+1-i)}(a)g^{(i)}(a)
\end{aligned}$$

Cela montre la formule pour $k_0 + 1$, ce qui termine la récurrence.

Pour la composée, on sait que c'est vrai pour $k = 1$. Supposons que ce soit vrai pour k_0 , et prenons f une fonction $(k_0 + 1)$ fois dérivable sur I , g une fonction $(k_0 + 1)$ fois dérivable sur $f(I)$. Alors la dérivée de $g \circ f$ est $f' \cdot g' \circ f$. Or, f' est k_0 fois dérivable sur I , ainsi que f , et g' est k_0 fois dérivable sur $f(I)$. Par hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est k_0 fois dérivable sur I , et donc, par produit, $(g \circ f)'$ est k_0 fois dérivable sur I , c'est-à-dire que $g \circ f$ est $(k_0 + 1)$ fois dérivable sur I . Ceci termine la récurrence.

La preuve est analogue dans le cas de fonctions de classe \mathcal{C}^k . Λ

Nous avons la formule de Taylor-Lagrange :

PROPOSITION 3.15 *Soit $k \geq 1$ un entier et f une fonction k fois dérivable sur un intervalle $[a; b]$. Alors il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b-a)^k$$

REMARQUE 3.16 *Si $k = 1$, cette formule n'est autre que l'égalité des accroissements finis. Ainsi, Taylor-Lagrange peut être considérée comme en étant une généralisation.*

PREUVE Plaçons nous sous les hypothèses de la proposition. Alors, il existe une fonction polynomiale $P(x)$ de degré au plus n telle que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et pour tout $1 \leq i < k$, $P^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$. Cette fonction polynomiale est $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x - a)^{k-1} + \frac{\lambda}{k!}(x - a)^k$, où $\lambda = \frac{(b-a)^k}{k!} \left(f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \dots - \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1} \right)$. Remarquons que si c est dans $]a; b[$, la formule de Taylor-Lagrange est vérifiée en c si et seulement si $f^{(k)}(c) = \lambda$.

Posons alors, pour x dans $[a; b]$, $g(x) = f(x) - P(x)$. Alors, on a $g(a) = g(b) = 0$ et pour $1 \leq i < k$, $g^{(i)}(a) = 0$. De plus, on a pour tout x de $]a; b[$, $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \lambda$, et donc la formule de Taylor-Lagrange est vérifiée en x si et seulement si $g^{(k)}(x) = 0$.

Nous allons montrer la chose suivante : Pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq k$, il existe $c_i \in]a; b[$ tel que $g^{(i)}(c_i) = 0$. Il en résultera que $g^{(k)}(c_k) = 0$, ou encore $f^{(k)}(c_k) = \lambda$, ce qu'il nous fallait.

Les réels c_i se construisent par récurrence. Comme $g(a) = g(b) = 0$ et que g est dérivable sur $[a; b]$, le théorème de Rolle nous garantit l'existence de c_1 dans $]a; b[$ tel que $g'(c_1) = 0$. Si on a $1 \leq i < k$ et un réel c_i de $]a; b[$ tel que $g^{(i)}(c_i) = 0$, alors on applique le théorème de Rolle à la fonction $g^{(i)}$ sur l'intervalle $[a; c_i]$ (car $g^{(i)}(a)$ est nul aussi). Cela nous donne c_{i+1} dans $]a; c_i[$, et a fortiori dans $]a; b[$ tel que $g^{(i+1)}(c_{i+1}) = 0$. On peut donc bien construire les réels c_i voulus jusqu'à $i = k$, ce qui nous fournit le réel c_k désiré et nous prouve donc la formule de Taylor-Lagrange. Λ

3.5 Fonctions convexes

DÉFINITION 3.4 Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I (ayant au moins deux éléments). On dit que f est une fonction convexe si l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y > f(x)\}$ (parfois appelé épigraphe de f) est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Une fonction sera dite concave si son opposé est une fonction convexe.

Cette définition, qui explique la terminologie, n'est en pratique guère utilisée. Nous en donnerons rapidement une autre, plus maniable. Toutefois, elle permet de montrer très simplement la proposition suivante :

PROPOSITION 3.17 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et I' un intervalle inclus dans I (et non réduit à un point). Alors la restriction de f à I' est convexe.

PREUVE Soit f convexe sur I et I' inclus dans I . Alors, l'épigraphe de $f|_{I'}$ est l'intersection de l'épigraphe de f avec la bande $I' \times \mathbb{R}$ qui est convexe. L'épigraphe de $f|_{I'}$ est donc convexe comme intersection de deux convexes et $f|_{I'}$ est donc bien convexe. Λ

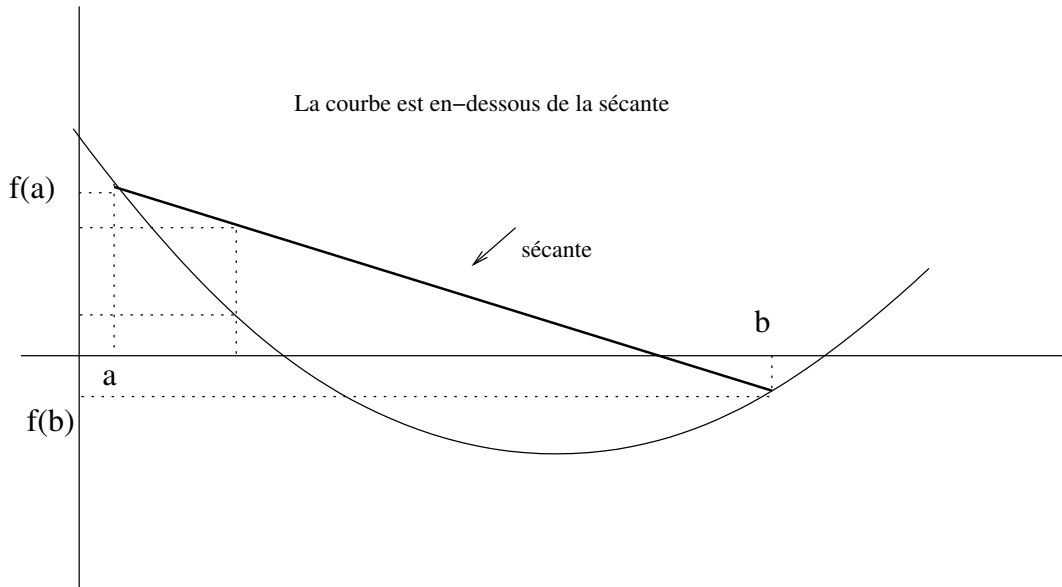
Voici donc une définition équivalente, plus facile à manipuler en pratique, de fonction convexe :

PROPOSITION 3.18 Une fonction de I dans \mathbb{R} est convexe si et seulement si pour tous x, x' de I et tout λ de $[0; 1]$, on a l'inégalité $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x')$.

PREUVE Supposons qu'on ait un triplet (x, x', λ) qui réfute l'inégalité précédente (i.e. pour lequel $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x')$), alors, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, les points $A = (x, f(x) + \epsilon)$ et $B = (x', f(x') + \epsilon)$ sont dans l'épigraphe de f , tandis que le point $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') + \epsilon)$ est situé sur le segment $[AB]$ mais n'est pas dans l'épigraphe de f , contredisant la convexité de ce dernier.

Réciproquement, si f n'est pas convexe, alors il existe deux couples $A = (x, y)$ et $B = (x', y')$ de $I \times \mathbb{R}$ tels que $y > f(x)$, $y' > f(x')$, ainsi qu'un point du segment $[AB]$, donc de la forme $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y')$, avec λ dans $[0; 1]$, qui n'est pas dans l'épigraphe de f , ce qui se traduit par $\lambda y + (1 - \lambda)y' \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)x')$. Or, comme λ et $1 - \lambda$ sont positifs et non tous deux nuls, on a $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') < \lambda y + (1 - \lambda)y'$. Ces deux inégalités nous fournissent donc $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') < f(\lambda x + (1 - \lambda)x')$. Λ

Interprétation graphique :



EXEMPLE 3.5.1 Toute fonction affine est convexe, et les fonctions affines sont les seules fonctions à la fois convexes et concaves.

La fonction $x \rightarrow x^2$ est convexe. En effet, soient x et y deux réels et λ dans $[0; 1]$. On a $\lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 = \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - 2\lambda(1 - \lambda)xy - (1 - \lambda)^2 y^2 = (\lambda - \lambda^2)x^2 - 2\lambda(1 - \lambda)xy + ((1 - \lambda) - (1 - \lambda)^2)y^2 = \lambda(1 - \lambda)(x^2 - 2xy + y^2) = \lambda(1 - \lambda)(x - y)^2 \geq 0$. On a donc bien $\lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \leq (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2$, ce qui donne la convexité de la fonction $x \rightarrow x^2$.

PROPOSITION 3.19 *Si f et g sont deux fonctions convexes sur un intervalle I , alors $f + g$ et $\sup(f, g)$ le sont aussi.*

PREUVE Supposons f et g convexes sur I . Soient x, x' dans I , λ dans $[0; 1]$. Alors on a $(f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)x') = f(\lambda x + (1 - \lambda)x') + g(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') + \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(x') = \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(x')$. La fonction $f + g$ est donc bien convexe.

Appelons maintenant h la fonction $\sup(f, g)$ sur I . On a $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(x')$. De même, on a $g(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(x')$, et donc, en combinant les deux, $h(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(x')$. Ceci prouve la convexité de $h = \sup(f, g)$. Λ

En particulier, la fonction valeur absolue, qui est le sup des fonctions affines, donc convexes, $Id_{\mathbb{R}}$ et $-Id_{\mathbb{R}}$, est convexe sur \mathbb{R} .

En fait, nous allons voir que les fonctions convexes jouissent de propriétés de régularité plus fortes que leur définition ne le laisse prévoir.

LEMME 3.2 *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction convexe sur I , et a un point de I . On considère la fonction $g : x \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ sur $I \setminus \{a\}$. Alors g est une fonction croissante.*

Réciproquement, si on a une fonction f sur un intervalle I telle que pour tout point a de I , la fonction $g_a : x \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ sur $I \setminus \{a\}$ est croissante, alors la fonction f est convexe.

PREUVE Soit f une fonction convexe sur un intervalle I , a un point de I et g la fonction définie comme ci-dessus. Soient $x \leq y$ deux points de $I \setminus \{a\}$. On distingue alors trois cas suivant leur position par rapport à a .

Premier cas : $y < a$.

Dans ce cas, on peut trouver λ dans $[0; 1]$ tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda)a$ car $x \leq y \leq a$, ce qui donne $y - a = \lambda(x - a)$. On obtient, par convexité de f , $f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(a)$, et donc $f(y) - f(a) \leq \lambda(f(x) - f(a))$. Comme $y - a < 0$, cela donne en divisant $\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \lambda \frac{f(x) - f(a)}{y - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, soit $g(y) \geq g(x)$.

Deuxième cas : $a < x$ Dans ce cas, on peut trouver λ dans $[0; 1]$ tel que $x = \lambda a + (1 - \lambda)y$ car $a \leq x \leq y$, ce qui donne $x - a = (1 - \lambda)(y - a)$. On obtient, par convexité de f , $f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(y)$, et donc $f(x) - f(a) \leq (1 - \lambda)(f(y) - f(a))$. Comme $x - a > 0$, cela donne en divisant $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq (1 - \lambda) \frac{f(y) - f(a)}{x - a} = \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$, soit $g(x) \leq g(y)$.

Troisième cas : $x < a < y$.

Dans ce cas, on peut appliquer les deux cas précédents, en renommant les points. Le

premier cas nous fournit $\frac{f(a)-f(y)}{a-y} \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, et le deuxième nous donne $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Par transitivité, on a $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(a)-f(y)}{a-y}$, soit $g(x) \leq g(y)$.

On a donc bien dans chaque cas $g(x) \leq g(y)$ et la fonction g est bien croissante.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose que pour tout a de I , la fonction $g_a : x \rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante. Prenons $x < y$ dans I et λ dans $]0; 1[$ (les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ sont triviaux). Appelons a le réel $\lambda x + (1 - \lambda)y$. On a alors $\lambda = \frac{y-a}{y-x}$ et $(1 - \lambda) = \frac{a-x}{y-x}$. Alors, de l'inégalité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ on tire, en multipliant par $(x - a)(y - a)$ qui est négatif, $(f(y) - f(a))(x - a) \leq (f(x) - f(a))(y - a)$ puis, en divisant par $(y - x)$, $(\lambda - 1)(f(y) - f(a)) \leq \lambda(f(x) - f(a))$, ou encore $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f(a) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Ceci prouve bien la convexité de f . Λ

Pour montrer la proposition suivante, nous allons utiliser le lemme suivant :

LEMME 3.3 *Soit f une fonction continue et dérivable à droite en tout point d'un intervalle ouvert I . On suppose que $f'_d(x) \geq 0$ pour tout x de I . Alors f est croissante.*

PREUVE Soit f vérifiant les propriétés de l'énoncé. Supposons qu'on ait deux points a et b de I tels que $a < b$ et $f(b) < f(a)$. Appelons $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a $p < 0$ et soit alors $E = \{x \in]a; b]\}$ tels que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < p$. Comme $b \in E$, E est non vide. De plus, E est borné. Donc E possède une borne inférieure c .

Comme $f'_d(a) \geq 0 > p$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de $]a; a + \eta[$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > p$, ce qui prouve $c \neq a$.

Comme on a, pour tout x de $]a; c[$, $f(x) - f(a) \geq p(x - a)$, on a, par continuité de f en c , $f(c) - f(a) \geq p(c - a)$, donc $c \notin E$ (en particulier, $c \neq b$).

Enfin, comme $f'_d(c) \geq 0 > p$, il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout x de $]c; c + \eta'[$, on a $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > p$, et alors pour un tel x , on a $f(x) - f(a) = (f(c) - f(a)) + (f(x) - f(c)) \geq p(c - a) + p(x - c) = p(x - a)$, ce qui prouve que $x \notin E$.

Tout ceci contredit le fait que $c = \inf(E)$, et on aboutit à une contradiction. Ainsi, l'hypothèse $a < b$ et $f(b) < f(a)$ est irréalisable. la fonction f est donc bien croissante. Λ

PROPOSITION 3.20 *Une fonction convexe sur un intervalle I est dérivable à droite et à gauche (et a fortiori continue) en tout point intérieur à I . De plus, si on prend deux points $x < y$ dans l'intérieur de I , on a $f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$.*

Réciproquement, si I est un intervalle ouvert, alors une fonction f est convexe sur I si et seulement si elle est continue, dérivable à droite en tout point de I , et que sa dérivée à droite est croissante. (Le résultat reste valide en remplaçant "à droite" par "à gauche").

PREUVE Soit a un point intérieur à un intervalle I et f convexe sur I . Donnons nous $\eta > 0$ tel que $[a - \eta; a + \eta]$ soit inclus dans I . La fonction $g_a : x \rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $]a - \eta; a[$ et y est majorée par $g_a(a + \eta)$. Elle possède donc une limite à droite en a ce qui fournit l'existence de $f'_g(a)$. On obtient de même celle de $f'_d(a)$. De plus, comme pour tout couple (x, y) de I^2 tel que $x < a < y$, on a $g_a(x) \leq g_a(y)$, on a $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.

Prenons maintenant deux réels $x < y$ intérieurs à I . On a $f'_d(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $f'_g(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Ceci donne bien $f'_d(x) \leq f'_g(y)$.

Supposons maintenant qu'on ait une fonction f continue, dérivable à droite et de dérivée à droite croissante sur un intervalle ouvert I . Prenons trois points $x < a < y$ de I . Appelons h_d la fonction définie sur $[a; y]$ par $h_d(t) = (f(t) - f(a)) - f'_d(a)(t - a)$. Pour tout t de $[a; y[$, on a $(h_d)'_d(t) = f'_d(t) - f'_d(a) \geq 0$. D'après le lemme ci-dessus, h_d est croissante sur $]a; y[$, et donc sur $[a; y]$ par continuité. Ainsi, $h_d(y) \geq h_d(a) = 0$, soit $f(y) - f(a) \geq f'_d(a)(y - a)$.

Appelons également h_g la fonction définie sur $[x; a]$ par $-h_g(t) = (f(t) - f(a)) - f'_d(a)(t - a)$. Pour tout t de $[x; a[$, on a $(h_g)'_d(t) = -(f'_d(t) - f'_d(a)) \geq 0$. D'après le lemme ci-dessus, h_g est croissante sur $]x; a[$, et donc sur $[x; a]$ par continuité. Ainsi, $h_g(x) \leq h_g(a) = 0$, soit $-h_g(x) \geq 0$ ou encore $f(x) - f(a) \geq f'_d(a)(x - a)$.

Déduisons-en la convexité de f . Prenons $x < y$ dans I , λ dans $[0; 1]$ et soit $a = \lambda x + (1 - \lambda)y \in]x; y[$. On a alors $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq \lambda(f(a) + f'_d(a)(x - a)) + (1 - \lambda)(f(a) + f'_d(a)(y - a)) = f(a) + f'_d(a)(\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)) = f(a) + f'_d(a)(\lambda x + (1 - \lambda)y - a) = f(a) + 0 = f(a) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$. Ceci montre bien la convexité de f . Λ

Notons que l'hypothèse de continuité de f est nécessaire. En effet, la fonction partie entière est dérivable à droite et de dérivée à droite nulle en tout réel. Sa fonction dérivée à droite est donc croissante mais elle n'est pas convexe car elle n'est pas continue.

COROLLAIRE 3.21 *Une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée est croissante. En particulier, une fonction deux fois dérivable sur I est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive.*

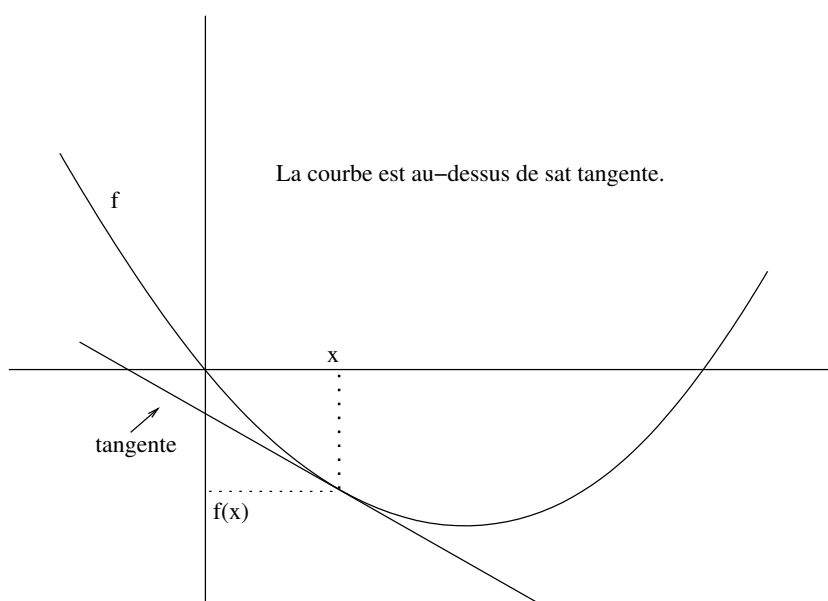
Cela nous donne alors de nouveaux exemples importants de fonctions convexes :

COROLLAIRE 3.22 *La fonction exponentielle est convexe sur \mathbb{R} . La fonction logarithme est concave sur \mathbb{R}_+^* . La fonction $x \rightarrow x^\alpha$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* si $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$. Elle y est concave si $\alpha \in]0; 1[$. Pour $n \geq 2$ entier naturel pair, la fonction $x \rightarrow x^n$ est même convexe sur tout \mathbb{R} .*

Remarquons aussi que lors de la preuve précédente, on a démontré que pour f convexe sur un intervalle ouvert I et a et b quelconques dans I , on a $f(b) - f(a) \geq f'_d(a)(b - a)$ (on pourrait d'ailleurs remplacer $f'_d(a)$ par $f'_g(a)$ ou tout nombre compris entre ces deux réels). En particulier, si f est dérivable en a , cela donne la formule suivante :

PROPOSITION 3.23 *Soit f convexe sur un intervalle ouvert I contenant un point a en lequel f est dérivable. Alors pour tout t de I , on a $f(t) \geq f(a) + f'(a)(t - a)$.*

On dit en ce sens que "la fonction f est au-dessus de sa tangente" car graphiquement cela se traduit ainsi :



Exercices

1) Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer l'ensemble des points où elles sont définies, continues, dérivables puis donner la valeur de leur dérivée là où elle existe :

- a) $f(x) = \sqrt{1 - 2 \sin x}$; b) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$; c) $f(x) = (\cos x)^x$
d) $f(x) = \ln(\tan \frac{x}{2})$; e) $f(x) = \ln(\ln(\frac{1}{x}))$; f) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$
g) $f(x) = \tan \frac{1-e^x}{1+e^x}$; h) $f(x) = \sqrt{\frac{1+\ln x}{1-\ln x}}$

2) Calculer la dérivée à tout ordre des fonctions sinus, $x \rightarrow e^x \sin x$, $x \rightarrow \frac{1}{x}$.

3) a) Montrer que pour tout réel strictement positif x , on a :

$$\exp\left(\frac{x}{x+1}\right) < x+1 < e^x$$

b) Montrer que pour tout réel $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

4) Soit f une fonction dérivable en un réel a . Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

5) Étudier les variations des fonctions suivantes :

a) $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$.

b) $x \rightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

5) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout réel non nul mais est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

6) a) Soient a, b, c, d quatre réels, avec c et d strictement positifs. Montrer que $\frac{a+b}{c+d}$ est compris entre $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ dérivable en un réel x . Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes de limite x , non stationnaires. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = f'(x)$$

c) Ce résultat est-il encore vrai si on suppose juste $\lim u = \lim v = x$ et $\forall n, u_n \neq v_n$?

7) Soient $a < b$ deux réels, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^∞ , deux fois dérivables sur $]a; b[$, u un élément de $]a; b[$ et on prend M pour que la fonction φ_u définie par :

$$\varphi_u(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + M(x - a)(x - b)$$

s'annule en u .

a) Montrer que φ' s'annule en au moins deux réels de $]a; b[$.

b) Montrer qu'il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que :

$$f(u) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(u - a) - \frac{1}{2}(u - a)(u - b)f''(c) = 0$$

8) Montrer que si f est convexe sur un intervalle ouvert I , et g convexe et croissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est convexe sur I .

9) Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si x n'est pas nul et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et y calculer sa fonction dérivée.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

c) Montrer que la fonction f' n'a pas de limite en 0 et en déduire que f n'est pas une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

10) Soit f une application dérivable sur un intervalle $[a; b]$. On suppose que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer qu'alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f'(c) = 0$.

4 Développements limités

4.1 Comparaison

DÉFINITION 4.1 Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , a un point de I et f, g deux applications de I dans \mathbb{R} . On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a , et on note $f =_a o(g)$, s'il existe une fonction \hat{f} définie sur un intervalle ouvert I' inclus dans I et contenant a tel que :

- i) $\lim_a \hat{f} = 0$;
- ii) $f(x) = g(x)\hat{f}(x)$ pour tout x de I' .

N.B. : S'il n'y a pas d'ambiguïté concernant le point a , on s'autorise à écrire $f = o(g)$, mais il faut bien prendre garde qu'il ne s'agit que d'une **notation** et surtout pas d'une égalité au sens habituel. Par exemple écrire $o(g) = f$ n'aurait pas de sens. De plus, le fait que $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ n'entraîne pas que $f_1 = f_2$.

Voici une autre façon de définir cette notion :

PROPOSITION 4.1 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et a un point de I . Alors $f =_a o(g)$ si et seulement si on a :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \eta; a + \eta[$, on a $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$.

PREUVE Si $f =_a o(g)$, alors il y a une fonction \hat{f} qui tend vers 0 en a et telle qu'on a $f(x) = g(x)\hat{f}(x)$ pour tout x d'un intervalle I' contenant $]a - \eta_0; a + \eta_0[$ pour $\eta_0 > 0$ assez petit. Si on se donne $\epsilon > 0$, il existe η_1 tel que $|\hat{f}(x)| \leq \epsilon$ pour tout x de $]a - \eta_1; a + \eta_1[$. En posant $\eta = \min(\eta_0, \eta_1)$, on a alors, pour tout x de $]a - \eta; a + \eta[$, $|f(x)| = |\hat{f}(x)| \cdot |g(x)| \leq \epsilon|g(x)|$.

Réciproquement, supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il y ait $\eta > 0$ tel que $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ sur $]a - \eta; a + \eta[$. En particulier pour $\epsilon_0 = 1$, on trouve un tel η_0 et on pose $I' =]a - \eta_0; a + \eta_0[$. Pour x dans I' , posons $\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x) \neq 0$ et $\hat{f}(x) = 0$ si $g(x) = 0$. Remarquons que, pour x dans I' , puisque $|f(x)| \leq |g(x)|$, on a $f(x) = 0$ si $g(x) = 0$. On a donc $f(x) = g(x)\hat{f}(x)$ pour tout x de I' .

Donnons nous $\epsilon > 0$, on a $\eta_1 > 0$ tel que $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ sur $]a - \eta_1; a + \eta_1[$ et posons $\eta = \min(\eta_0, \eta_1)$. Alors, si x est dans $]a - \eta; a + \eta[$, on a $|\hat{f}(x)| \leq \epsilon$, que $g(x)$ soit nul ou non. Ceci montre que \hat{f} tend vers 0 en a et cette fonction convient donc pour montrer que $f =_a o(g)$. Λ

En fait, si g ne s'annule pas près de a , on a $f = o(g)$ si et seulement si $\lim_a \frac{f}{g} = 0$. Si g s'annule en a et en aucun autre point voisin, on a $f =_a o(g)$ si et seulement si

$$f(a) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f}{g} = 0.$$

EXEMPLE 4.1.1 La fonction nulle est négligeable en tout point devant n'importe quelle fonction définie au voisinage du point (en effet, si f est définie au voisinage de a , on a $0 = 0 \cdot f$ et la fonction nulle vérifie les conditions de la définition ci-dessus).

L'exemple suivant est fondamental : Soient $1 \leq m < n$ deux entiers naturels. Alors $x^n =_0 o(x^m)$. En effet, on a $x^n = x^m \cdot x^{n-m}$ et, comme $n - m > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-m} = 0$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. Alors $f =_0 o(1)$ si et seulement si f est continue en 0 et $f(0) = 0$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. Alors $f =_0 o(x)$ si et seulement si $f(0) = 0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

PROPOSITION 4.2 Somme Soient f_1 et f_2 deux fonctions négligeables devant une même fonction g au voisinage d'un même point a . Alors $f_1 + f_2$ est aussi négligeable devant g en a .

Produit Soient f une fonction négligeable devant g en un point a et soit h une fonction définie au voisinage de a . Alors, $h \cdot f$ est négligeable devant $h \cdot g$ en a .

Soient f une fonction négligeable devant g en un point a et soit h une fonction définie au voisinage de a et bornée. Alors $h \cdot f$ est aussi négligeable devant g en a . C'est en particulier le cas pour λf si λ est un réel.

Encadrement Soient f_1 et f_3 deux fonctions négligeables devant une même fonction g au voisinage d'un même point a , et soit f_2 une fonction vérifiant pour tout x de I , $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x)$. Alors f_2 est aussi négligeable devant g au voisinage de a .

PREUVE Si f_1 et f_2 sont négligeables devant g en a , alors au voisinage de a on peut écrire $f_1 = \hat{f}_1 g$ et $f_2 = \hat{f}_2 g$ avec pour $i = 1, 2$, $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f}_i(x) = 0$. On a alors $f_1 + f_2 = (\hat{f}_1 + \hat{f}_2)g$ et $\lim_{x \rightarrow a} (\hat{f}_1 + \hat{f}_2)(x) = 0$. Cela montre que $f_1 + f_2$ est négligeable devant g en a .

Si f est négligeable devant g en a , alors on peut écrire $f = \hat{f}g$, la fonction \hat{f} ayant pour limite 0 en a . On a alors aussi $h \cdot f = \hat{f}(h \cdot g)$ et comme la limite en a de \hat{f} n'a pas changé, $h \cdot f$ est bien négligeable devant $h \cdot g$ en a .

Si maintenant f est négligeable devant g en a et h bornée, alors on écrit $f = \hat{f}g$, avec \hat{f} tendant vers 0 en a . On a alors $h \cdot f = (h \cdot \hat{f})g$. Or, $h \cdot \hat{f}$ est le produit d'une fonction qui tend vers 0 en a et d'une fonction bornée au voisinage de a . Une telle fonction tendant vers 0 en a , on en déduit que $h \cdot f$ est bien négligeable devant g en a .

Supposons maintenant que $f_1 \leq f_2 \leq f_3$ et que $f_1 =_a o(g)$, $f_3 =_a o(g)$. On peut alors trouver deux fonctions \hat{f}_1 et \hat{f}_3 tendant vers 0 en a et telles que $f_1 = \hat{f}_1 \cdot g$, $f_3 = \hat{f}_3 \cdot g$ sur un sous-intervalle I' de I . Posons alors, pour x dans I' , $\hat{f}_2(x) = \frac{f_2(x)}{g(x)}$

si $g(x)$ n'est pas nul et $\hat{f}_2(x) = 0$ si $g(x) = 0$. On a bien $f_2 = \hat{f}_2 \cdot g$ sur I' car si $g(x) = 0$, alors $f_1(x) = f_3(x) = 0$, et donc aussi $f_2(x)$. Posons aussi, pour tout x dans I , $h(x) = \max|\hat{f}_1(x), \hat{f}_3(x)|$. On a alors $0 \leq |\hat{f}_2(x)| \leq h(x)$ pour tout x de I et, comme h tend vers 0 en 0, $\hat{f}_2(x)$ aussi. Tout ceci prouve bien que $f_2 =_a o(g)$. Λ

DÉFINITION 4.2 Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , a un point de I et f, g deux applications de I dans \mathbb{R} . On dit que f est équivalente à g au voisinage de a , et on note $f \sim_a g$, s'il existe une fonction \hat{f} définie sur un intervalle ouvert I' inclus dans I et contenant a tel que :

- i) $\lim_a \hat{f} = 1$;
- ii) $f(x) = g(x)\hat{f}(x)$ pour tout x de I' .

En fait, si f et g ne s'annulent pas près de a , on a $f \sim_a g$ si et seulement si $\lim_a \frac{f}{g} = 1$. Si g s'annule en a et en aucun autre point voisin, on a $f \sim_a g$ si et seulement si $f(a) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f}{g} = 1$.

REMARQUE 4.3 Soient f et g définies sur un intervalle ouvert contenant un point a . Alors $f \sim_a g$ si et seulement si $f - g = o(g)$.

En effet, si $\hat{f}_1 g = f$ et $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f}_1(x) = 1$, alors posons $\hat{f}_0 = \hat{f}_1 - 1$. On a $\hat{f}_0 g = (\hat{f}_1 - 1)g = f - g$ et $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f}_0(x) = 0$.

Réciproquement, si $\hat{f}_0 g = f - g$ et $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f}_0(x) = 0$, alors en posant $\hat{f}_1 = \hat{f}_0 + 1$, on a $\hat{f}_1 g = f$ et $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f}_1(x) = 1$.

Comme corollaire de cette remarque, on a que si $f =_a o(g)$, alors $g + f \sim_a g$.

PROPOSITION 4.4 Soient f et g définies sur un intervalle ouvert contenant un point a .

- On a toujours $f \sim_a f$.
- Si $f \sim_a g$ alors $g \sim_a f$.
- Si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$, alors $f \sim_a h$.
- Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$, alors $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$.

N.B. : Attention, il est par contre faux de penser qu'on peut remplacer le produit par la somme dans la dernière propriété. Par exemple, la fonction $1 + x$ est équivalente à $1 + x^2$ en 0, la fonction constante valant -1 est (évidemment) équivalente à elle-même en 0, mais la somme $1 + x - 1 = x$ n'est pas équivalente à $1 + x^2 - 1 = x^2$ en 0.

PREUVE Comme on a toujours $f = 1.f$ et que $\lim_{x \rightarrow a} 1 = 1$, f est bien équivalente à elle-même.

On sait que si une fonction tend vers 1 en un point a , alors elle ne s'annule pas au voisinage de ce point et son inverse tend aussi vers 1 en a . Donc, si $f \sim_a g$, on a

$f = \hat{f}g$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f} = 1$ et alors $g = \frac{1}{\hat{f}}f$ au voisinage de a , avec $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\hat{f}} = 1$. Donc $g \sim_a f$.

Supposons $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$. Alors on a une fonction \hat{f} qui tend vers 1 en a et telle que $f = \hat{f}g$. De même, on a une fonction \hat{g} qui tend vers 1 en a et telle que $g = \hat{g}h$. On a alors $f = \hat{f}\hat{g}h$ et $\hat{f}\hat{g}$ tend aussi vers 1 en a . Donc on a bien $f \sim_a h$.

Supposons $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$. On a alors deux fonctions \hat{f}_1 et \hat{f}_2 telles que $f_i = \hat{f}_i g_i$ et \hat{f}_i tend vers 1 en a pour $i = 1, 2$. On a alors $f_1 f_2 = \hat{f}_1 \hat{f}_2 g_1 g_2$ et $\hat{f}_1 \hat{f}_2$ tend aussi vers 1 en a . Donc $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$. Λ

DÉFINITION 4.3 Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , a un point de I et f, g deux applications de I dans \mathbb{R} . On dit que f est contrôlée par g au voisinage de a , et on note $f =_a O(g)$, s'il existe une fonction \hat{f} définie sur un intervalle ouvert I' inclus dans I et contenant a telle que :

- i) \hat{f} est bornée ;
- ii) $f(x) = g(x)\hat{f}(x)$ pour tout x de I' .

PROPOSITION 4.5 Si $f =_a o(g)$ ou $f \sim_a g$, alors $f =_a O(g)$.

Si $f_1 =_a O(g)$ et $f_2 =_a O(g)$, alors $f_1 + f_2 =_a O(g)$.

Si $f_1 =_a O(g_1)$ et $f_2 =_a O(g_2)$, alors $f_1 f_2 =_a O(g_1 g_2)$.

Si $f_1 =_a O(g_1)$ et $f_2 =_a o(g_2)$, alors $f_1 f_2 =_a o(g_1 g_2)$.

Si $f =_a O(g)$ et $g =_a O(h)$, alors $f =_a O(h)$.

Si $f =_a o(g)$ et $g =_a O(h)$, alors $f =_a o(h)$

Si $f =_a O(g)$ et $g =_a o(h)$, alors $f =_a o(h)$

PREUVE Dans les deux cas $f =_a o(g)$ et $f \sim_a g$, la fonction f est le produit de g par une fonction ayant une limite finie en a . Une telle fonction est en particulier bornée au voisinage de a et cela montre $f =_a O(g)$.

Si f_1 et f_2 sont contrôlées par g en a , alors au voisinage de a on peut écrire $f_1 = \hat{f}_1 g$ et $f_2 = \hat{f}_2 g$ avec pour \hat{f}_1 et \hat{f}_2 bornée au voisinage de a . On a alors $f_1 + f_2 = (\hat{f}_1 + \hat{f}_2)g$ et $\hat{f}_1 + \hat{f}_2$ est elle-même bornée au voisinage de a . Cela montre que $f_1 + f_2$ est contrôlée par g en a .

Si f_1 est contrôlée par g_1 en a et f_2 par g_2 , alors au voisinage de a on peut écrire $f_1 = \hat{f}_1 g_1$ et $f_2 = \hat{f}_2 g_2$ où \hat{f}_1 et \hat{f}_2 sont bornées. On a alors $f_1 f_2 = (\hat{f}_1 \hat{f}_2) g_1 g_2$ et $\hat{f}_1 \hat{f}_2$ est bornée au voisinage de a . Ainsi $f_1 f_2 =_a O(g_1 g_2)$.

Si f_1 est contrôlée par g_1 en a et que f_2 est négligeable devant g_2 en a , alors au voisinage de a on peut écrire $f_1 = \hat{f}_1 g_1$ et $f_2 = \hat{f}_2 g_2$ où \hat{f}_1 est bornée et \hat{f}_2 tend vers 0. On a alors $f_1 f_2 = (\hat{f}_1 \hat{f}_2) g_1 g_2$ et $\hat{f}_1 \hat{f}_2$ tend vers 0 en a . Ainsi $f_1 f_2 =_a O(g_1 g_2)$.

Si f est contrôlée par g et g est contrôlée par h au voisinage d'un même point a , alors on a deux fonctions \hat{f} et \hat{g} bornées au voisinage de a telles que $f = \hat{f}g$ et $g = \hat{g}h$. Alors $f = (\hat{f}\hat{g})h$ et $\hat{f}\hat{g}$ est bornée au voisinage de a . Ainsi $f =_a O(h)$.

Si f est négligeable devant g et g est contrôlée par h au voisinage d'un même point a , ou bien si f est contrôlée par g et g est négligeable devant h , alors on a deux fonctions \hat{f} et \hat{g} , l'une bornée au voisinage de a et l'autre y tendant vers 0 telles que $f = \hat{f}g$ et $g = \hat{g}h$. Alors $f = (\hat{f}\hat{g})h$ et $\hat{f}\hat{g}$ tend vers 0 en a . Ainsi $f =_a o(h)$. Λ

4.2 Développements limités

DÉFINITION 4.4 Soit f une fonction d'un intervalle ouvert I contenant un point a dans \mathbb{R} et k un entier naturel. On dit que f possède un développement limité (ou DL en abrégé) à l'ordre k au voisinage de a s'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ tels que, en posant sur I la fonction polynomiale

$$P_\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \alpha_2(x - a)^2 + \dots + \alpha_k(x - a)^k$$

on ait $f - P_\alpha$ négligeable devant $(x - a)^k$ au voisinage de a . On dit alors que P_α est le développement limité de f à l'ordre k au voisinage de a et on note

$$f(x) =_a \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \alpha_2(x - a)^2 + \dots + \alpha_k(x - a)^k + o(x - a)^k$$

Ici encore, cette notation faisant intervenir le symbole o n'est pas une égalité au sens habituel.

En fait, il est bon de se représenter la fonction P_α comme un polynôme en $(x - a)$ plutôt qu'en x (si $a = 0$ c'est la même chose), aussi écrivons nous, lorsque f possède un développement limité à l'ordre k au voisinage de a :

$$f(x) =_a Q(f)_k(x - a) + o(x - a)^k$$

où $Q(f)_k$ est un polynôme de degré au plus k .

EXEMPLE 4.2.1 On sait que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. On peut donc écrire $e^x =_0 1 + x + o(x)$ (puisque, de plus $e^0 = 1$).

La fonction $x \rightarrow |x^3| (= x^2|x|)$ est négligeable devant x^2 au voisinage de 0, donc possède un développement limité nul à l'ordre 2 en 0. Par contre, elle n'a pas de développement limité à l'ordre 3 en 0 car la fonction signe n'y a pas de limite.

Une fonction possède un développement limité à l'ordre 0 en un point a si et seulement si elle est continue en a . On a alors $f(x) = f(a) + o(1)$, qui est le DL de f à l'ordre 0 en a .

PROPOSITION 4.6 Soit f une fonction possédant un développement limité à l'ordre k en un point a . Alors ce développement limité est unique.

PREUVE Soit f une fonction ayant deux développements limités à l'ordre k en un point a , disons $f(x) =_a Q_1(f)_k(x-a) + o(x-a)^k$ et $f(x) =_a Q_2(f)_k(x-a) + o(x-a)^k$. On a alors $Q_1(f)_k(x-a) - f(x) =_a o(x-a)^k$ et $f(x) - Q_2(f)_k(x-a) =_a o(x-a)^k$. Ainsi, par somme, $Q_1(f)_k(x-a) - Q_2(f)_k(x-a) =_a o(x-a)^k$. Or, $Q_1(f)_k(x-a) - Q_2(f)_k(x-a)$ est un polynôme de degré au plus k en $(x-a)$. S'il n'était pas nul, on pourrait l'écrire sous la forme $\lambda(x-a)^{k_0} + \sum_{k_0 < i \leq k} p_i(x-a)^i$ où $\lambda \neq 0$ et $k_0 \leq k$. Ce polynôme est équivalent à $\lambda(x-a)^{k_0}$ au voisinage de a et son quotient par $(x-a)^k$ est équivalent à $\frac{\lambda}{(x-a)^{k-k_0}}$, qui tend vers λ si $k_0 = k$ ou vers l'infini si $k_0 < k$, ce qui contredit le fait qu'il est négligeable devant $(x-a)^k$ au voisinage de a . Le polynôme $Q_1(f)_k(x-a) - Q_2(f)_k(x-a)$ est donc nul et on a donc $Q_1 = Q_2$, ce qui prouve l'unicité du développement limité de f à l'ordre k au point a . Λ

Nous allons voir que la notion de développement limité est fortement liée aux dérivées successives d'une fonction en un point. Pour un DL à l'ordre 1, on a même coïncidence des deux notions, à savoir :

PROPOSITION 4.7 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un point a . Alors f possède un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si elle est dérivable en a . Dans ce cas, ce DL est donné par*

$$f(x) =_a f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

PREUVE Supposons que f possède un développement limité à l'ordre 1 en un point a , qu'on note $f(x) =_a \alpha + \beta(x-a) + o(x-a)$. Il existe alors une fonction \hat{f} , définie sur un intervalle ouvert I' contenant a et ayant pour limite 0 en a telle que pour tout x de I' , on a $f(x) = \alpha + \beta(x-a) + \hat{f}(x) \cdot (x-a)$. On a alors $f(a) = \alpha + 0 + 0 = \alpha$. De plus, pour $x \neq a$ dans I' , on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta + \hat{f}(x)$. Comme $\hat{f}(x)$ tend vers 0 en a , on a bien $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta$. Ainsi, $f'(a)$ existe et c'est β . Le DL de f à l'ordre 1 en a est donc bien $f(x) =_a f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Supposons réciproquement que f soit une fonction dérivable en un point a . Alors, sur un intervalle ouvert I contenant a , posons $\hat{f}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ si $x \neq a$ et $\hat{f}(a) = 0$. On a alors $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f}(x) = 0$ et par conséquent $\hat{f}(x) \cdot (x-a) =_a o(x-a)$. De plus, pour tout x de I , $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \hat{f}(x)(x-a)$. Ainsi, $f(x) =_a f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, et f possède bien le développement limité en a que nous désirions. Λ

Pour un ordre supérieur, on n'a plus forcément équivalence entre les notions de DL et de dérivation à l'ordre k en un point. Il reste tout de même une implication. Le théorème suivant porte le nom de formule de Taylor-Young :

THÉORÈME 4.8 *Soit f une fonction d'un intervalle ouvert I contenant un point a dans \mathbb{R} et $k \geq 1$ un entier naturel. On suppose que f est k fois dérivable en a . Alors*

f possède un développement limité à l'ordre k au voisinage de a qui est

$$f(x) =_a f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^k$$

Pour l'établir, nous nous servons du lemme suivant et de son corollaire :

LEMME 4.1 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant un point a et possédant des primitives F et G qui sont nulles en a . On suppose que la fonction g est positive, et que $f =_a o(g)$. Alors $F =_a o(G)$.

PREUVE Plaçons nous sous les hypothèses de l'énoncé. Appelons \hat{F} la fonction définie sur I par $\hat{F}(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ si $G(x) \neq 0$ et $\hat{F}(x) = 0$ si $G(x) = 0$.

Soit \hat{f} une fonction telle que $\hat{f}g = f$ sur I' intervalle ouvert contenant a et $\lim_{x \rightarrow a} \hat{f}(x) = 0$.

Soit $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que $|\hat{f}(x)| \leq \epsilon$ sur $I'' =]a - \eta; a + \eta[$. Considérons les fonctions $h_- : x \rightarrow F(x) - \epsilon G(x)$ et $h_+ : x \rightarrow F(x) + \epsilon G(x)$ sur $]a - \eta; a + \eta[$. Ces deux fonctions sont nulles en a car F et G le sont et elles sont dérivables sur I'' où on a $h'_-(x) = f(x) - \epsilon g(x) \leq 0$ et $h'_+(x) = f(x) + \epsilon g(x) \geq 0$. La fonction h_- est décroissante sur I'' et la fonction h_+ y est croissante. Ainsi, pour tout $x \geq a$ dans I'' , on a $h_-(x) \leq h_-(a) = 0$ et $h_+(x) \geq h_+(a) = 0$, donc $-\epsilon G(x) \leq F(x) \leq \epsilon G(x)$, soit $|F(x)| \leq \epsilon |G(x)|$. On trouve de même, pour $x \leq a$ dans I'' , $|F(x)| \leq (-\epsilon G(x)) = \epsilon |G(x)|$.

Ainsi, on a pour tout x de I'' , $|\hat{F}(x)| \leq \epsilon$, ce qui prouve que \hat{F} tend vers 0 en a . De plus, si $G(x) = 0$ pour x dans I'' , alors on a aussi $F(x) = 0$ et donc on a bien pour tout x de I'' , $F(x) = \hat{F}(x)G(x)$. Ainsi, on a bien $F =_a o(G)$. Λ

COROLLAIRE 4.9 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I ayant un DL à un ordre k en un point a , de la forme $f(x) =_a Q_k(f)(x-a) + o(x-a)^k$, et F une primitive de f sur I . Alors F possède un DL à l'ordre $k+1$ en a , donné par $F(x) =_a R_{k+1}(x-a) + o(x-a)^{k+1}$ où R_{k+1} est l'unique polynôme dont le polynôme dérivé est $Q_k(f)$ et tel que $R_{k+1}(a) = F(a)$. Autrement dit, si $f(x) =_a c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_k(x-a)^k + o(x-a)^k$, alors $F(x) =_a F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o(x-a)^{k+1}$.

Dans l'autre sens, soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I ayant un développement limité à l'ordre k en un point a . On suppose de plus que la fonction f' possède un développement limité à l'ordre $k-1$ en a . Alors si le DL de f à l'ordre k en a est $f(x) =_a Q_k(f)(x) + o(x-a)^k$, celui à l'ordre $k-1$ de f' est obtenu en le dérivant, soit $f'(x) =_a (Q_k(f))'(x) + o(x-a)^{k-1}$. Ceci résulte immédiatement de ce qui précède et de l'unicité du DL.

Montrons maintenant la formule de Taylor-Young :

DÉMONSTRATION Nous allons procéder par récurrence sur k .

Si $k = 1$, on sait, d'après la proposition 4.7, que si une fonction f est dérivable en un point a , alors elle y admet un DL à l'ordre 1 donné par $f(x) =_a f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$, ce qui est le développement demandé par le théorème.

Supposons maintenant la formule de Taylor-Young vraie pour un certain entier $k \geq 1$. Soit f une fonction $k + 1$ fois dérivable en un point a . Alors la fonction f' est k fois dérivable en a et possède donc un DL en a donné par $f'(x) =_a f'(a) + f''(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(1+k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o(x - a)^k$. D'après le corollaire du lemme précédent, f possède un DL à l'ordre $k + 1$ en a donné par $f(x) =_a f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x - a)^k + o(x - a)^k$, ce qui est bien la formule voulue.

La formule de Taylor-Young est donc vraie à l'ordre $k + 1$ et, d'après le principe de récurrence, est vraie à tout ordre $k \geq 1$. Λ

Développements limités classiques Donnons ici quelques développements limités usuels :

i) La fonction exponentielle en 0 :

Pour tout entier k , on a

$$\exp(x) =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k)$$

Pour le voir, on remarque que pour tout n , on a $\exp^{(n)} = \exp$, donc $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$. D'où la valeur de son développement limité en 0 par le théorème 4.8.

ii) Pour tout entier k , on a

$$\sin x =_0 x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

et

$$\cos x =_0 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2k})$$

Pour le sinus, on sait que $\sin^{(n)}$ vaut \sin , \cos , $-\sin$ ou $-\cos$ selon que n est de la forme $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ ou $4k + 3$. On a donc $\sin^{(n)}(0) = 0$ si n est pair et $(-1)^i$ si n est de la forme $2i + 1$. D'où la valeur du développement limité considéré par le théorème 4.8.

Pour le cosinus, on peut faire une preuve analogue ou dériver le développement de sinus.

iii) Pour tout entier k , on a

$$\frac{1}{1-x} =_0 1 + x + x^2 + \dots + x^k + o(x^k)$$

On sait que pour tout $x \neq 1$, et tout $k \geq 1$, on a $1 - x^{k+1} = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^k)$, d'où $\frac{1-x^{k+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^k$. On a donc $\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2+\dots+x^k) = \frac{x^{k+1}}{1-x}$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{x^{k+1}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{x}{1-x} = 0$. On a donc $\frac{x^{k+1}}{1-x} =_0 o(x^k)$, ce qui donne bien la formule souhaitée.

iv) Soit λ un réel. On a pour tout entier k

$$(1+x)^\lambda =_0 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)}{k!}x^k + o(x^k)$$

Par récurrence, la dérivée k -ième de la fonction $x \rightarrow (1+x)^\lambda$ est $x \rightarrow \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}$. D'où le développement par le théorème 4.8.

v) On a pour tout entier k

$$\ln(1+x) =_0 x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^k)$$

La dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln(1+x)$ est $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$. Ainsi, pour $k \geq 1$, sa dérivée k -ième de la fonction $x \rightarrow (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (1+x)^{-k}$. D'où le développement par le théorème 4.8.

vi) On a pour tout entier k

$$\arctan x =_0 x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^k x^{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

On sait que la fonction Arctangente est la primitive nulle en 0 de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$. En reprenant la preuve du iii) avec $-x^2$ à la place de x (mais nous verrons bientôt qu'on l'obtient aussi immédiatement par composition), on trouve comme DL à l'ordre $2k$, $\frac{1}{1+x^2} =_0 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^k x^{2k} + o(x^{2k})$. D'où le DL d'Arctangente à l'ordre $2k+1$ par le corollaire 4.9.

4.3 Opérations élémentaires sur les développements limités

Nous allons utiliser la notation suivante :

NOTATION 1 Soit P un polynôme et k un entier naturel. Nous noterons $Tr_k(P)$ le polynôme ayant ses coefficients de degré $\leq k$ égaux à ceux de P et les autres coefficients nuls.

Autrement dit, si $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, avec $d \geq k$, alors $Tr_k(P) = \sum_{i=0}^k a_i X^i$.

Remarquons qu'on a, pour tout entier naturel k et tout réel a , $(P - Tr_k(P))(x-a) =_a o(x-a)^k$. Ainsi, le développement limité de $P(x-a)$ à l'ordre k au point a est $Tr_k(P)(x-a) + o(x-a)^k$.

PROPOSITION 4.10 Troncature Soit f ayant un développement limité à l'ordre k en un point a et k' un entier inférieur à k . Alors f possède un développement limité à l'ordre k' en a et $Q(f)_{k'} = Tr_{k'}(Q(f)_k)$.

Somme Soient f et g ayant un développement limité à l'ordre k en un point a . Alors $f + g$ aussi et $Q(f + g)_k = Q(f)_k + Q(g)_k$.

Multiplication scalaire Soit f ayant un développement limité à l'ordre k en un point a et λ une constante. Alors la fonction λf a aussi un développement limité à l'ordre k en a et $Q(\lambda f)_k = \lambda Q(f)_k$.

Produit Soient f et g ayant un développement limité à l'ordre k en un point a . Alors fg aussi et

$$Q(fg)_k = Tr_k(Q(f)_k \cdot Q(g)_k)$$

Composition Soit f une fonction ayant un développement limité à l'ordre k en un point a , g une fonction définie au voisinage de $f(a)$, ayant un développement limité à l'ordre k en $f(a)$. Alors, $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre k en a et

$$Q(g \circ f)_k = Tr_k(Q(g)_k \circ (Q(f)_k - f(a)))$$

Quotient Soient f et g deux fonctions ayant un développement limité à l'ordre k en un point a , telle que $f(a) \neq 0$. Alors, $\frac{g}{f}$ possède un développement limité à l'ordre k' en a , et ce développement limité est donné par le quotient de $Q(g)_k$ par $Q(f)_k$ suivant les puissances croissantes, arrêté à l'ordre k .

Encadrement Soient f et g deux fonctions ayant le même développement limité à l'ordre k au même point a et soit h une fonction qui vérifie $f \leq g \leq h$ au voisinage de a . Alors h admet un développement limité à l'ordre k et ce développement est le même que celui de f et de g .

PREUVE Soit f ayant un développement limité à l'ordre k en a et $k' \leq k$. On a alors $f =_a \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i (x-a)^i \right) + o(x-a)^k = \left(\sum_{i=0}^{k'} \alpha_i (x-a)^i \right) + \left(\sum_{k' < i \leq k} \alpha_i (x-a)^i \right) + o(x-a)^k$.

En fait, tous les termes de la seconde somme sont les produits d'une constante et d'une puissance d'ordre $> k'$ de $x-a$, donc sont négligeables devant $(x-a)^{k'}$ au voisinage de a . Le terme $o(x-a)^k$ est a fortiori un $o(x-a)^{k'}$. Cela donne donc $f =_a \left(\sum_{i=0}^{k'} \alpha_i (x-a)^i \right) + o(x-a)^{k'}$. Ainsi, f admet bien un développement limité à l'ordre k' au voisinage de a et $Q(f)_{k'} = Tr_{k'}(Q(f)_k)$.

Supposons que f et g ont des développements limités à l'ordre k en un point a . On a alors $f =_a Q(f)_k + o(x-a)^k$ et $g =_a Q(g)_k + o(x-a)^k$. Cela donne $f + g = Q(f)_k + Q(g)_k + o(x-a)^k$. Et $Q(f)_k + Q(g)_k$ est bien un polynôme de degré $\leq k$. Ainsi, $f + g$ possède bien un développement limité à l'ordre k en a donné par $Q(f + g)_k = Q(f)_k + Q(g)_k$.

Supposons que f possède un développement limité à l'ordre k en un point a et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $f =_a Q(f)_k + o(x-a)^k$ et donc $\lambda f =_a \lambda Q(f)_k + o(x-a)^k$. Et $\lambda Q(f)_k$ est bien un polynôme de degré $\leq k$. Donc λf possède bien un développement limité à l'ordre k en a donné par $Q(\lambda f)_k = \lambda Q(f)_k$.

Supposons que f et g possèdent des développements limités à l'ordre k en un point a . On a alors $f =_a Q(f)_k + o(x-a)^k$ et $g =_a Q(g)_k + o(x-a)^k$. Cela donne alors $fg =_a (Q(f)_k + o(x-a)^k)(Q(g)_k + o(x-a)^k)$. Or, $Q(f)_k o(x-a)^k =_a o(x-a)^k$ (car $Q(f)_k$ est borné au voisinage de a). De même, $Q(g)_k o(x-a)^k =_a o(x-a)^k$ et $o(x-a)^k o(x-a)^k =_a o(x-a)^k$. On a donc $fg =_a Q(f)_k \cdot Q(g)_k + o(x-a)^k =_a Tr_k(Q(f)_k \cdot Q(g)_k) + o(x-a)^k$. Comme de plus $Tr_k(Q(f)_k \cdot Q(g)_k)$ est un polynôme de degré $\leq k$, fg possède bien un développement limité à l'ordre k en a , donné par $Tr_k(Q(f)_k \cdot Q(g)_k) + o(x-a)^k$.

Regardons maintenant le développement limité de la composée de deux fonctions. Soit f une fonction ayant un développement limité à l'ordre k en un point a , g une fonction définie au voisinage de $f(a)$, ayant un développement limité à l'ordre k en $f(a)$. On a donc $f(x) =_a Q_k(f)(x) + o(x-a)^k$ et $g(t) =_{f(a)} Q_k(g)(t) + o(t-f(a))^k$. On veut alors montrer $g \circ f(x) =_a Q_k(g)(Q_k(f)(x)) + o(x-a)^k$, puisqu'il suffit ensuite de tronquer $Q_k(g) \circ Q_k(f)$ au degré k pour avoir le développement souhaité.

Or, on a $g(f(x)) - Q_k(g)(Q_k(f)(x) - f(a)) = (g(f(x)) - Q_k(g)(f(x) - f(a))) + (Q_k(g)(f(x) - f(a)) - Q_k(g)(Q_k(f)(x) - f(a)))$. Il suffit donc de montrer que $(g(f(x)) - Q_k(g)(f(x) - f(a)))$ et $(Q_k(g)(f(x) - f(a)) - Q_k(g)(Q_k(f)(x) - f(a)))$ sont tous deux négligeables devant $(x-a)^k$ au voisinage de a .

D'après le développement limité de g , et du fait que $f(x)$ tend vers $f(a)$ au point a , $(g(f(x)) - Q_k(g)(f(x) - f(a))) =_a o(f(x) - f(a))^k$. Or, on a $(f(x) - f(a))^k =_a O(x-a)^k$. En effet, si $k = 0$, alors on a 1 de chaque côté, et si $k \geq 1$, alors f est dérivable en a et on a donc $(f(x) - f(a)) =_a O(x-a)$, ce qui, par produit, entraîne bien ce qu'on désire. Par comparaison, on a donc bien $(g(f(x)) - Q_k(g)(f(x))) =_a o(x-a)^k$.

D'autre part, pour prouver que $(Q_k(g)(f(x) - f(a)) - Q_k(g)(Q_k(f)(x) - f(a)))$ est négligeable devant $(x-a)^k$ au voisinage de a , on peut se contenter prouver dans le cas où $Q_k(g)$ est de la forme X^i . Par somme et produit pas des constantes, on l'obtient alors dans tous les cas. Prenons un entier naturel i . On a alors $(f(x) - f(a))^i - (Q_k(f)(x) - f(a))^i = [(f(x) - f(a)) - (Q_k(f)(x) - f(a))] \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (f(x) - f(a))^j (Q_k(f)(x) - f(a))^{i-j-1}$. Or, $[(f(x) - f(a)) - (Q_k(f)(x) - f(a))] = f(x) - Q_k(f)(x) =_a o(x-a)^k$ et la somme est bornée au voisinage de a (elle y tend même vers 0 si $i \neq 1$). En tout cas, on a bien $(f(x) - f(a))^i - (Q_k(f)(x) - f(a))^i = o(x-a)^k$, ce qui achève bien la preuve de la formule du développement limité d'une composée.

Pour le développement limité d'un quotient de deux fonctions, on remarque qu'un quotient $\frac{g}{f}$ est le produit de g par la composée $inv \circ f$ où inv est la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* . Ainsi, si f possède un DL à l'ordre k en a et $f(a) \neq 0$, alors, par continuité de f en a , $\frac{1}{f}$ est définie sur tout un voisinage de a et,

par composition, possède un DL à l'ordre k en a . Si, de plus g possède aussi un DL à l'ordre k en a , alors, par produit, $\frac{g}{f}$ possède bien un DL à l'ordre k en a .

De plus, on doit avoir, par produit, $Q_k(g) = Tr_k(Q_k(f) \cdot Q_k(\frac{g}{f}))$. Or, il existe un unique polynôme P de degré au plus k qui satisfait $Q_k(g) = Tr_k(Q_k(f) \cdot P)$, polynôme obtenu en effectuant la division de $Q_k(g)$ par $Q_k(f)$ suivant les puissances croissantes. C'est donc ce polynôme qu'est $Q_k(\frac{g}{f})$.

On suppose que $f(x) =_a Q_k(x - a) + o(x - a)^k$, $h(x) =_a Q_k(x - a) + o(x - a)^k$ et $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x de $]a - \eta; a + \eta[$. La fonction $x \rightarrow g(x) - Q_k(x)$ est alors comprise entre deux fonctions qui sont toutes deux de la forme $o(x - a)^k$. Elle l'est donc elle-même. On a donc bien $g(x) =_a Q_k(x - a) + o(x - a)^k$, comme souhaité. Λ

EXEMPLE 4.3.1 Cherchons le développement limité en 0 de la fonction tangente à l'ordre 5. Il y a deux méthodes naturelles pour faire ceci. Soit considérer la fonction tangente comme le quotient du sinus par le cosinus, soit la considérer comme la réciproque de la fonction Arctangente. Nous allons faire les deux méthodes.

On a d'abord $\sin x =_0 x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\cos x =_0 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. La division du premier polynôme par le second suivant les puissances croissantes donne :

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \frac{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}}{\phantom{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}} \\ \frac{2x^5}{15} & \phantom{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} \end{array}$$

Ceci donne $\tan x =_0 x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ comme DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction tangente.

Considérons maintenant la fonction tangente comme la réciproque de la fonction Arctangente. Comme elle est de classe C^∞ au voisinage de 0, elle y possède un DL à n'importe quel ordre. Comme elle est, de plus, impaire, son DL à l'ordre 5 est de la forme $ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$. Celui de la fonction Arctangente est $\arctan x =_0 x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$. Ainsi, le DL à l'ordre 5 en 0 de $\tan \circ \arctan = Id$ est :

$$\begin{aligned} a(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}) + b(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5})^3 + c(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5})^5 + o(x^5) = \\ ax - \frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{5}x^5 + bx^3 - \frac{3}{3}bx^5 + cx^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Ceci devant être égal à x , on obtient $a = 1$, $b - \frac{a}{3} = 0$ et $\frac{a}{5} - b + c = 0$, soit $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = \frac{2}{15}$. le DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction tangente est donc $\tan x =_0 x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

On retrouve bien le même développement par les deux méthodes.

Calculons maintenant le développement limité de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 5 en 0. Le développement limité à l'ordre 5 en 0 du cosinus est toujours $\cos x =_0 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. Comme $\cos 0 = 1$, on effectue un DL en 1 du logarithme. De plus, comme le DL de $\cos x - 1$ commence par du x^2 , on peut se contenter d'effectuer un DL à l'ordre 2 du logarithme. En effet, une modification du coefficient en x^3 dans le DL du logarithme n'entraîne une modification dans le DL de $\ln \circ \cos$ qu'à partir de $x^{2 \times 3}$, soit x^6 , et ne modifie donc pas son DL à l'ordre 5. On a $\ln x =_1 (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2$. Ainsi, on a au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &= \ln(1 + (\cos x - 1)) = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o(x^5) = \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) = -\frac{x^2}{2} + x^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5) \end{aligned}$$

4.4 Applications des développements limités à l'étude des fonctions

Recherche d'extrema

PROPOSITION 4.11 Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a un point intérieur à I . On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ et un réel non nul λ tels que f possède au voisinage de a un développement limité à l'ordre p de la forme :

$$f(x) = f(a) + \lambda(x - a)^p + o(x - a)^p$$

Alors, si p est impair, f n'a pas d'extremum local en a , tandis que si p est pair elle en admet un strict, qui est un minimum si $\lambda > 0$ et un maximum si $\lambda < 0$.

PREUVE On suppose que f , a , p et λ vérifient les conditions de la proposition. On a alors, au voisinage de a , $f(x) - f(a) = \lambda(x - a)^p + o(x - a)^p = (x - a)^p(\lambda + h(x))$ où $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} h(x) = 0$. Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que sur $]a - \eta; a + \eta[$, on a $|h(x)| \leq \frac{\lambda}{2}$ et donc $\lambda + h(x)$ a même signe de λ .

Supposons p impair. Alors, $(x - a)^p$ est strictement positif sur $]a; a + \eta[$ et strictement négatif sur $]a - \eta; a[$. Alors, $f(x) - f(a)$ est non nul et du signe de λ sur $]a; a + \eta[$ et est non nul et du signe de $-\lambda$ sur $]a - \eta; a[$. Ainsi, f ne possède pas d'extremum local en a .

Si maintenant p est pair, $(x - a)^p$ est strictement positif sur $]a - \eta; a[\cup]a; a + \eta[$ et $f(x) - f(a)$ y est non nul et du signe de λ . Si $\lambda < 0$, on a donc $f(x) < f(a)$ sur $]a - \eta; a + \eta[\setminus \{a\}$ et f admet donc en a un maximum local strict. De même, si $\lambda > 0$, f admet en a un minimum local strict. \blacktriangle

REMARQUE 4.12 On retrouve le fait qu'une fonction dérivable en un extremum y a une dérivée nulle (si le point est intérieur à l'intervalle de définition de la fonction).

EXEMPLE 4.4.1 Considérons, pour λ réel, la fonction $f_\lambda : x \rightarrow \cos x + \lambda e^x \sin^2 x$ et étudions son comportement près de 0. Effectuons un développement limité à l'ordre 3. On a $\cos x =_0 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. D'autre part, $\sin x =_0 x + o(x^2)$, d'où $\sin^2 x =_0 x^2 + o(x^3)$ et $e^x =_0 1 + x + o(x)$. Par produit, on obtient $e^x \sin^2 x =_0 x^2 + x^3 + o(x^3)$, et donc :

$$f_\lambda =_0 1 + (\lambda - \frac{1}{2})x^2 + \lambda x^3 + o(x^3)$$

Ainsi, si $\lambda \neq \frac{1}{2}$, alors $\lambda - \frac{1}{2}$ n'est pas nul et on peut affirmer que f_λ possède un extrémum en 0. Cet extrémum est un minimum si $\lambda - \frac{1}{2}$ est strictement positif, soit si $\lambda > \frac{1}{2}$ et un maximum si $\lambda - \frac{1}{2}$ est strictement négatif, soit si $\lambda < \frac{1}{2}$.

Si $\lambda = \frac{1}{2}$, alors le développement limité précédent vaut $f_{\frac{1}{2}} =_0 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. On peut ainsi affirmer que $f_{\frac{1}{2}}$ n'a pas d'extrémum en 0.

Recherche de limites Supposons par exemple qu'on ait à calculer :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{\tan t - \sinh t}{t^3}$$

Pour cela, on effectue un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions tangente et sinus hyperbolique, ce qui donne $\tan t =_0 t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ et $\sinh t =_0 t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$. On a alors $\tan t - \sinh t = 0(t + \frac{t^3}{3}) - (t + \frac{t^3}{6}) + o(t^3) = \frac{t^3}{6} + o(t^3)$, et alors $\frac{\tan t - \sinh t}{t^3} =_0 \frac{1}{6} + o(1)$. On en conclut donc $\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{\tan t - \sinh t}{t^3} = \frac{1}{6}$.

Recherche d'équivalents

PROPOSITION 4.13 Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a un point de I . On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ et un réel non nul λ tels que f possède au voisinage de a un développement limité à l'ordre p de la forme :

$$f(x) = \lambda(x - a)^p + o(x - a)^p$$

Alors, au voisinage de a , la fonction f est équivalente à la fonction $\lambda(x - a)^p$

PREUVE Il suffit d'écrire f sous la forme $\lambda(x - a)^p(1 + \frac{h(x)}{\lambda})$ où h tend vers 0 en a , ce qui prouve que $1 + \frac{h(x)}{\lambda}$ tend vers 1 en a , d'où l'équivalence. Λ

EXEMPLE 4.4.2 Cherchons un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $x \rightarrow \sin \circ \sinh - \sinh \circ \sin$. Cette fonction est impaire donc son développement limité ne comportera que des puissances impaires. On peut faire un développement limité à chaque ordre impair jusqu'à en trouver un qui soit non nul.

On peut tester les ordres 1, 3, 5, on trouvera des développements limités nuls. Il faut en fait effectuer un DL à l'ordre 7 pour trouver un équivalent de cette fonction.

On a en effet $\sin =_0 x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$ et $\sinh =_0 x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$, ce qui, par composition, donne :

$$\begin{aligned} \sin \circ \sinh =_0 \sinh x - \frac{(\sinh x)^3}{6} + \frac{(\sinh x)^5}{120} - \frac{(\sinh x)^7}{7!} + o(x^7) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} - \\ \frac{(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!})^3}{6} + \frac{(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!})^5}{120} - \frac{(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!})^7}{7!} + o(x^5) &= (x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!}) - \\ \frac{1}{6}(x^3 + \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{40} + \frac{x^7}{12}) + \frac{1}{120}(x^5 + \frac{5}{6}x^7) - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) &= x + x^3(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}) + x^5(\frac{1}{120} - \frac{1}{3} + \frac{1}{120}) + \\ x^7(\frac{1}{7!} - \frac{1}{240} - \frac{1}{72} + \frac{1}{144} - \frac{1}{7!}) + o(x^7) &= x - \frac{19}{60}x^5 - \frac{1}{90}x^7 + o(x^7). \end{aligned}$$

Tandis que :

$$\begin{aligned} \sinh \circ \sin =_0 \sin x + \frac{(\sin x)^3}{6} + \frac{(\sin x)^5}{120} + \frac{(\sin x)^7}{7!} + o(x^7) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!})^3}{6} + \\ \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!})^5}{120} + \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!})^7}{7!} + o(x^5) &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}) + \frac{1}{6}(x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{40} + \frac{x^7}{12}) + \\ \frac{1}{120}(x^5 - \frac{5}{6}x^7) + \frac{x^7}{7!} + o(x^7) &= x + x^3(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) + x^5(\frac{1}{120} - \frac{1}{3} + \frac{1}{120}) + x^7(-\frac{1}{7!} + \frac{1}{240} + \frac{1}{72} - \\ \frac{1}{144} + \frac{1}{7!}) + o(x^7) &= x - \frac{19}{60}x^5 + \frac{1}{90}x^7 + o(x^7). \end{aligned}$$

On trouve finalement par différence, $\sin \circ \sinh - \sinh \circ \sin =_0 -\frac{x^7}{45} + o(x^7)$. Cette fonction est donc équivalente en 0 à $-\frac{x^7}{45}$.

4.5 Variantes des notions de comparaison

Les comparaisons entre fonctions (négligeable, équivalente, contrôlée) ne se limitent pas aux fonctions définies au voisinage du point où on les compare.

On peut comparer deux fonctions à droite où à gauche, ainsi qu'en $\pm\infty$. plus généralement, on peut comparer des fonctions f et g en un point a adhérent à leur ensemble commun de définition E , la limite de la fonction \hat{f} en a devant alors être prise suivant E , ce qui permet aussi alors de comparer des fonctions qui tendent vers l'infini. Par exemple, on peut voir que la fonction logarithme tend vers $-\infty$ en 0^+ , mais y tend "plus lentement" que n'importe quelle fonction puissance négative, ce qu'on peut écrire de la façon suivante : Pour tout $\alpha > 0$, on a $\ln x =_{0^+} o(x^{-\alpha})$.

Une autre variante de la notion de comparaison est celle de comparaison entre suites (qu'on peut aussi voir comme comparaison en $+\infty$ des fonction définies sur \mathbb{N}). Ainsi, pour deux suites u et v , on écrit $u = o(v)$ (resp. $u \sim v$, $u = O(v)$) s'il existe un entier N et une suite \hat{u} , définie pour tout $n \geq N$, telle que pour tout $n \geq N$, on a $u_n = \hat{u}_n \cdot v_n$ et $\lim \hat{u} = 0$ (resp. $\lim \hat{u} = 1$, \hat{u} bornée).

Les principales propriétés de la notion initiale de comparaison sont préservées pour ces autres notions, soit notamment les propositions 4.2, 4.4, 4.5 ainsi que la remarque 4.3

et son corollaire.

Les règles de comparaison entre le logarithme, les fonctions puissance et l'exponentiel-
le peuvent alors s'énoncer ainsi : Pour tous α réel et $\beta > 0$, on a $(\ln x)^\alpha =_{+\infty} o(x^\beta)$.
Et $x^\alpha =_{+\infty} o(e^{\beta x})$.

EXEMPLE 4.5.1 *Soit à calculer*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x(\ln x)^3 + x^3 e^{-x} + 6}{x^2 - x \ln x}$$

On peut s'en tirer en utilisant des factorisations et les limites classiques faisant intervenir exponentielle, puissances et logarithme. Toutefois, l'utilisation des règles ci-dessus permet de simplifier la rédaction. Cela peut donner par exemple :

On a $x(\ln x)^3 =_{+\infty} o(x^2)$, $x^3 e^{-x} =_{+\infty} o(x^2)$ et $6 =_{+\infty} o(x^2)$. Ainsi, par somme, le numérateur de la fraction étudiée est équivalent à $2x^2$ en $+\infty$. De même, puisque $x \ln x =_{+\infty} o(x^2)$, le dénominateur de la fraction étudiée est équivalent à x^2 en $+\infty$. La fraction elle-même est équivalente en $+\infty$ à $\frac{2x^2}{x^2} = 2$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x(\ln x)^3 + x^3 e^{-x} + 6}{x^2 - x \ln x} = 2$$

Exercices

1) Donner un équivalent simple, au voisinage de 0, des fonctions suivantes :

- a) $x \rightarrow \cos x$; b) $x \rightarrow \arcsin x$; c) $x \rightarrow 1 - \cos x$
 d) $x \rightarrow x^2 - \sin(x^2)$; e) $x \rightarrow \frac{e^x - \ln(e+x)}{\tan x - x}$; f) $x \rightarrow \tan(\sin x) - \sin(\tan x)$.

2) Trouver, si elles existent, les limites en 0 des fonctions suivantes :

- a) $\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x}$; b) $\frac{\ln(\frac{\sin x}{x^2})}{x^2}$
 c) $\frac{x + \sin x}{1 - \cos x}$; d) $\frac{x - \sin(x+x^3)}{\sin^3 x}$
 e) $\frac{\cos(x^3) - \cos(\sin^3 x)}{x^5}$; f) $\frac{x \ln(1-x^2)}{x - \sin x}$
 g) x^x ; h) $\frac{x^x - 1}{\sqrt{x}}$.

3) Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage épointé de 0. On suppose que $f \sim_0 g$.

- a) A-t-on nécessairement $e^f \sim e^g$ en 0?
 b) On suppose de plus que f et g ont leurs images incluses dans \mathbb{R}_+^* . A-t-on nécessairement $\ln f \sim \ln g$ en 0?
 c) Mêmes questions en ajoutant la condition supplémentaire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

4) Donner les développements limités suivants :

- a) $\arcsin(\sin x)$ en 0, à l'ordre 5.
 b) $e^{\sin x}$ en 0, à l'ordre 7.
 c) $e^{\cos x}$ en 0, à l'ordre 3.
 d) $\ln(\cos x)$ en 0, à l'ordre 7.
 e) $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ en 2, à l'ordre 2.
 f) $\sin x \cdot e^x$ en 0, à tout ordre.

5) Quel est le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction $x \rightarrow \ln(1+x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!})$

6) a) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \text{ n'est pas nul} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Donner le développement limité de f à tout ordre en 0. Qu'en déduit-on?

b) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \end{cases}$$

En quels réels la fonction g est-elle dérivable?

A quel ordre g admet-elle un développement limité en 0?

7) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} qui vérifie pour tout réel x l'équation suivante :

$$x^7 \cdot f(x)^3 - x^8 + f(x) = 0$$

Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 54.

5 Intégration

Nous introduisons ici l'intégrale de Riemann d'une fonction sur un intervalle fermé et borné.

5.1 Intégration des fonctions en escalier sur un intervalle

Subdivisions

DÉFINITION 5.1 Soient $a < b$ deux réels. On appelle subdivision de l'intervalle $[a; b]$ la donnée d'un entier naturel $k \geq 1$ et de réels x_0, \dots, x_k tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$.

Une telle subdivision se notera $(a, x_1, \dots, x_{k-1}, b)$.

On remarque que se donner une subdivision de l'intervalle $[a; b]$ revient à le "découper en k sous-intervalles" $[x_0; x_1], \dots, [x_{k-1}; x_k]$. On s'intéressera généralement aux restrictions à ces sous-intervalles (ou à leur intérieur) des fonctions définies sur $[a; b]$.

On remarque également qu'une subdivision d'un intervalle $[a; b]$ s'identifie naturellement à une partie finie de $]a; b[$, la subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ correspondant à la partie $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$.

DÉFINITION 5.2 Soient $s = (a, x_1, \dots, x_{k-1}, b)$ et $s' = (a, y_1, \dots, y_{l-1}, b)$ deux subdivisions de l'intervalle $[a; b]$. Alors s est dite plus fine que s' si pour tout entier i tel que $1 \leq i < l$, il existe j tel que $y_i = x_j$ (autrement dit si s contient au minimum tous les points de s').

EXEMPLE 5.1.1 La subdivision $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ de l'intervalle $[0; 1]$ est plus fine que $(0, \frac{1}{2}, 1)$.

En revanche, des subdivisions $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ et $(0, \frac{1}{2}, 1)$, aucune n'est plus fine que l'autre.

On remarque que la relation de finesse au niveau des subdivisions correspond à la relation opposée à l'inclusion au niveau des parties finies de $]a; b[$.

PROPOSITION 5.1 Soient s_1 et s_2 deux subdivisions de $[a; b]$. Alors il existe une subdivision s de $[a; b]$ qui est plus fine à la fois que s_1 et s_2 .

PREUVE Il suffit de prendre une subdivision contenant la réunion des points de s et des points de s' . Λ

DÉFINITION 5.3 Soit $s = (a = x_0, x_1, \dots, x_k = b)$ une subdivision d'un intervalle $[a; b]$. Le réel $\max_{1 \leq i \leq k} (x_i - x_{i-1})$ s'appelle alors le pas de la subdivision s . Nous le noterons $\delta(s)$.

REMARQUE 5.2 Si une subdivision s est plus fine qu'une subdivision s' , alors $\delta(s) \leq \delta(s')$. De plus, pour tout $\epsilon > 0$ et tout intervalle $[a; b]$, il existe une subdivision s de $[a; b]$ telle que $\delta(s) \leq \epsilon$.

REMARQUE 5.3 Soit $s = (a = x_0, x_1, \dots, x_k = b)$ une subdivision d'un intervalle $[a; b]$. Alors, tout intervalle I inclus dans $[a; b]$ de longueur $> \delta(s)$ contient un point de s . Et tout intervalle I' inclus dans $[a; b]$ de longueur $> 2\delta(s)$ contient un sous-intervalle de la forme $[x_{i-1}; x_i]$ pour $1 \leq i \leq k$.

On a bien sûr de plus $(b - a) \geq k\delta(s)$.

Fonctions en escalier

DÉFINITION 5.4 Soient $a < b$ deux réels. Soit f une application de $[a; b]$ dans \mathbb{R} . On dit que f est une fonction en escalier sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision $(a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = b)$ telle que f soit constante sur chaque intervalle de la forme $[x_{i-1}; x_i]$, $1 \leq i \leq k$.

Une telle subdivision sera dite subordonnée à la fonction f (sur $[a; b]$).

Une fonction en escalier est donc une fonction qui est constante "par morceaux" sur $[a; b]$.

REMARQUE 5.4 On s'aperçoit que dans la définition ci-dessus, la valeur de f en les x_i n'intervient pas. On en déduit que si deux fonctions f et g coïncident en dehors d'un nombre fini de points sur un intervalle $[a; b]$ et que f est en escalier sur $[a; b]$, alors g est aussi en escalier sur $[a; b]$ (pour avoir une subdivision subordonnée à g , il suffit de prendre une subdivision subordonnée à f et de lui rajouter les points en lesquels f et g diffèrent, s'ils n'y sont déjà).

Il est clair que si une subdivision s est subordonnée à une fonction f sur un intervalle $[a; b]$, alors toute subdivision plus fine que s l'est aussi.

Le petit résultat suivant peut être très utile :

PROPOSITION 5.5 Soient f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a; b]$. Alors il existe une subdivision subordonnée à la fois à f et à g .

PREUVE Il suffit de considérer une subdivision subordonnée à f , une subdivision subordonnée à g et de prendre une subdivision plus fine que ces deux là, ce qu'on sait possible. Λ

COROLLAIRE 5.6 *La somme de deux fonctions en escalier sur un intervalle est elle-même en escalier sur cet intervalle.*

Le produit de deux fonctions en escalier sur un intervalle est lui-même en escalier sur cet intervalle.

Le produit d'une fonction en escalier sur un intervalle par un réel est aussi en escalier sur cet intervalle.

La composée d'une fonction quelconque par une fonction en escalier sur un intervalle est encore en escalier sur l'intervalle.

PREUVE Pour la somme et le produit de deux fonctions, il suffit de constater que si une subdivision est subordonnée à la fois à f et à g , alors elle est subordonnée à $f + g$ ainsi qu'à fg .

Pour le produit d'une fonction par un réel et la composée d'une fonction par une fonction en escalier, il suffit de constater que si une subdivision est subordonnée à f , alors elle l'est à λf pour tout λ ainsi qu'à $g \circ f$ pour toute fonction g définie sur $Im f$. Λ

On a aussi :

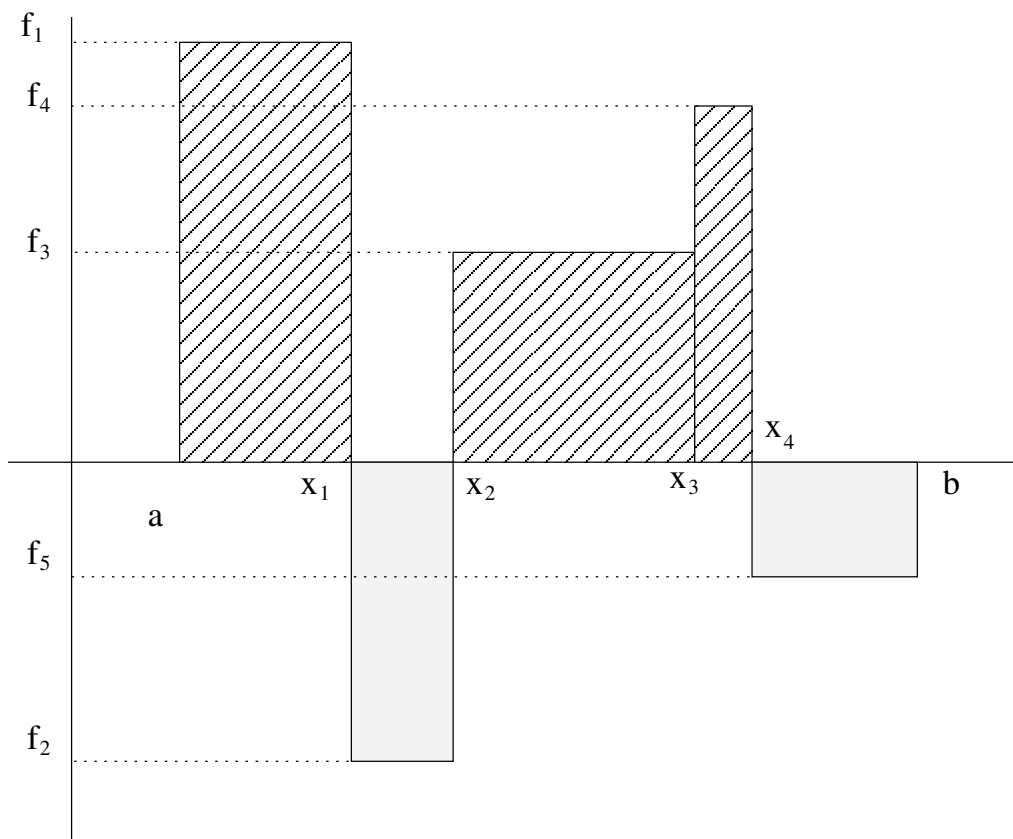
PROPOSITION 5.7 *Soient f une fonction en escalier sur un intervalle $[a; b]$ et a', b' deux réels tels que $a \leq a' < b' \leq b$. Alors la restriction de f à l'intervalle $[a'; b']$ est une fonction en escalier.*

PREUVE On considère une subdivision (x_0, \dots, x_{k+1}) de $[a; b]$ subordonnée à f . S'il n'y a aucun x_i dans $]a'; b'[$, alors la subdivision (a', b') est subordonnée à la restriction de f sur $[a'; b']$. Sinon, soient i le plus petit entier tel que $x_i > a'$, j le plus grand entier tel que $x_j < b'$. Alors la subdivision $(a', x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, b')$ est clairement subordonnée à $f|_{[a'; b']}$. Λ

Intégrale d'une fonction en escalier

DÉFINITION 5.5 *Soit f une fonction en escalier sur $[a; b]$, $(a, x_1, x_2, \dots, x_k, b)$ une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à f , f_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_i; x_{i+1}[$. On appelle alors intégrale de a à b de f le réel :*

$$I_{[a; b]}(f) = \sum_{i=0}^k f_i(x_{i+1} - x_i)$$



L'intégrale de la fonction est la différence entre l'aire de la partie hachurée et celle de la partie pointillée

Voici les principales propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier, qui, nous le verrons, se généralisent à des intégrales d'autres fonctions :

PROPOSITION 5.8 • Soit f une fonction en escalier sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} . Alors $I_{[a; b]}(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision de $[a; b]$ choisie pour la calculer.

- Si on ne change qu'un nombre fini de valeurs à une fonction en escalier, on ne change pas son intégrale.
- Soient f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} . Alors $I_{[a; b]}(f + g) = I_{[a; b]}(f) + I_{[a; b]}(g)$.
- Soient f une fonction en escalier sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} et λ un réel. Alors $I_{[a; b]}(\lambda f) = \lambda I_{[a; b]}(f)$.
- Soient $a < b < c$ trois réels, f une fonction en escalier sur $[a; c]$. Alors $I_{[a; c]}(f) = I_{[a; b]}(f) + I_{[b; c]}(f)$.
- Soit f une fonction en escalier positive sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} . Alors $I_{[a; b]}(f)$ est un réel positif. Si on a deux fonctions en escalier f et g sur un intervalle $[a; b]$ avec $f \leq g$, alors $I_{[a; b]}(f) \leq I_{[a; b]}(g)$.

PREUVE Pour prouver que la valeur d'une intégrale ne dépend pas du choix de la subdivision, il suffit de montrer qu'en raffinant une subdivision, on ne change pas la valeur de l'intégrale, et, par récurrence sur le nombre de points rajoutés, de montrer qu'en ajoutant juste un point à une subdivision, on conserve l'intégrale. Prenons donc une fonction en escalier f sur $[a; b]$, une subdivision $(a = x_0, x_1, \dots, x_k = b)$ de $[a; b]$ subordonnée à f et y un point de $[a; b]$ qui n'est pas un des x_i , disons $x_{i_0-1} < y < x_{i_0}$. Alors, en utilisant la première subdivision, on trouve $I_{[a;b]}(f) = \sum_{i=1}^k f_i(x_i - x_{i-1})$ et en utilisant la seconde on trouve

$$I'_{[a;b]}(f) = \sum_{1 \leq i \leq k, i \neq i_0} f_i(x_i - x_{i-1}) + f_{i_0}(y - x_{i_0-1}) + f_{i_0}(x_{i_0} - y)$$

On retrouve donc bien la même chose.

Prenons une fonction f en escalier sur $[a; b]$ et soit g une fonction qui possède la même valeur que f , excepté éventuellement en un nombre fini de points x_1, \dots, x_n . Prenons alors une subdivision s subordonnée à f et soit s' une subdivision plus fine que s qui contient tous les x_i . Alors cette subdivision est aussi subordonnée à g et les valeurs de f et de g sur les intervalles ouverts définis par s' sont identiques. Les intégrales de f et de g sur $[a; b]$ sont donc les mêmes.

Prenons deux fonctions f et g en escalier sur un intervalle $[a; b]$, et une subdivision $(a = x_0, \dots, x_{k+1} = b)$ subordonnée à la fois à f et à g . Alors c'est aussi une subdivision subordonnée à $f+g$ et sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, on a $(f+g)_i = f_i + g_i$. On obtient alors $I_{[a;b]}(f+g) = \sum_{i=0}^k (f_i + g_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^k f_i(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^k g_i(x_{i+1} - x_i) = I_{[a;b]}(f) + I_{[a;b]}(g)$.

Soient f une fonction en escalier sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} , λ un réel et $(a = x_0, \dots, x_{k+1} = b)$ une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à f . Alors c'est aussi une subdivision subordonnée à λf et sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, on a $(\lambda f)_i = \lambda f_i$. On obtient alors $I_{[a;b]}(\lambda f) = \sum_{i=0}^k \lambda f_i(x_{i+1} - x_i) = \lambda \sum_{i=0}^k f_i(x_{i+1} - x_i) = \lambda I_{[a;b]}(f)$.

Si f est une fonction en escalier positive sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} , alors la somme donnant $I_{[a;b]}(f)$ est une somme de termes qui sont tous clairement positifs, donc est positive. Si maintenant on a deux fonctions en escalier $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $g - f$ est en escalier et positive sur $[a; b]$, donc $I_{[a;b]}(g) - I_{[a;b]}(f) = I_{[a;b]}(g - f) \geq 0$. $\mathbf{\Lambda}$

5.2 Intégrale de Riemann

DÉFINITION 5.6 Soit f une fonction d'un intervalle $[a; b]$ dans \mathbb{R} . On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier f_- et f_+ sur $[a; b]$ telles que $f_- \leq f \leq f_+$ et $I_{[a;b]}(f_+) - I_{[a;b]}(f_-) \leq \epsilon$.

Dans ce cas, l'ensemble E_- (resp. E_+) des valeurs des intégrales des fonctions en escalier majorées (resp. minorées) par f sur $[a; b]$ est non vide et majoré (resp. non vide et minoré). De plus, on a $\sup(E_-) = \inf(E_+)$ et cette borne commune s'appelle

l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ (au sens de Riemann), notée

$$\int_a^b f(t)dt$$

Commençons par prouver les affirmations contenues dans cette définition. Si la condition de la définition est remplie, alors E_- et E_+ sont non vides. De plus si $x_- \in E_-$ et $x_+ \in E_+$, on a une fonction en escalier g_- et une fonction en escalier g_+ telles que $g_- \leq f \leq g_+$ et $I[a; b](g_-) = x_-$, $I[a; b](g_+) = x_+$. Alors, $x_- \leq x_+$ et comme ceci est vrai pour tous éléments de E_- et de E_+ , on voit que tout élément de E_+ majore E_- et tout élément de E_- minore E_+ . Donc E_- possède une borne supérieure m_- et E_+ une borne inférieure m_+ . Comme de plus tout élément de E_+ est un majorant de E_- , tout élément de E_+ est supérieur à m_- , qui est donc un minorant de E_+ et à ce titre $m_- \leq m_+$. Or, si on prend $\epsilon > 0$, on a deux fonction en escalier f_- et f_+ sur $[a; b]$ telles que $f_- \leq f \leq f_+$ et $m_+ - m_- \leq I[a; b](f_+) - I[a; b](f_-) \leq \epsilon$. On a donc forcément $m_+ - m_- = 0$, soit $\sup(E_-) = \inf(E_+)$ comme affirmé.

Dans la définition ci-dessus, on impose $a < b$. On définit aussi des intégrales où ce n'est plus le cas.

DÉFINITION 5.7 Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a; b]$, alors on définit $\int_b^a f(t)dt$ comme l'opposé de $\int_a^b f(t)dt$.

De plus, pour une fonction f définie en un réel a , on pose $\int_a^a f(t)dt = 0$.

PROPOSITION 5.9 • Si f est en escalier sur un intervalle $[a; b]$, alors elle est intégrable sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(t)dt = I_{[a; b]}(f)$.

- Toute fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est bornée.
- Si une fonction f est intégrable sur un intervalle $[a; b]$ et si on prend deux réels a' et b' tels que $a \leq a' \leq b' \leq b$, alors f est aussi intégrable sur l'intervalle $[a'; b']$.
- La somme de deux fonctions intégrables sur $[a; b]$ l'est aussi et son intégrale est la somme des intégrales des deux termes de la somme.
- Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel. Alors λf est intégrable sur $[a; b]$ et $\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
- Si f est intégrable sur un intervalle $[a; b]$ et qu'on prend trois points x , y et z dedans, alors $\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f$ (Relation de Chasles).
- Soit f une fonction intégrable et positive sur un intervalle $[a; b]$. Alors $\int_a^b f(t)dt$ est positive. Si f et g sont intégrables sur $[a; b]$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

PREUVE Si f est en escalier sur $[a; b]$, alors en posant $f_- = f_+ = f$, les conditions de la définition de fonction intégrable sont clairement vérifiées et ce quelle que soit la valeur strictement positive de ϵ . De plus, on a alors $I_{[a; b]}(f) \in E_-$, donc $I_{[a; b]}(f) \leq \sup E_- = \int_a^b f(t)dt$ et $I_{[a; b]}(f) \in E_+$, donc $I_{[a; b]}(f) \geq \inf E_+ = \int_a^b f(t)dt$.

Ainsi, on a bien $I_{[a; b]}(f) = \int_a^b f(t)dt$.

Si une fonction est majorée (resp. minorée) sur un intervalle par une fonction en escalier, qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est majorée (resp. minorée) par la plus grande (resp. petite) de ces valeurs. Ainsi, une fonction intégrable, qui est par définition majorée par une fonction en escalier et minorée par une autre, est bornée.

Si une fonction f est intégrable sur un intervalle $[a; b]$, alors elle y est encadrée par deux fonctions en escalier f_- et f_+ . Les restrictions à $[a'; b']$ de ces deux fonctions encadrent la restriction de f à ce même intervalle, sont en escalier et l'intégrale sur $[a'; b']$ de leur différence est inférieure à son intégrale sur $[a; b]$. La restriction de f à $[a'; b']$ est donc aussi intégrable.

Si f et g sont intégrables sur $[a; b]$, alors, pour $\epsilon > 0$ donné, on peut trouver f_+ , f_- , g_+ , g_- sur $[a; b]$ telles que $f_- \leq f \leq f_+$, $g_- \leq g \leq g_+$ et $I_{[a; b]}(f_+ - f_-) \leq \frac{\epsilon}{2}$, $I_{[a; b]}(g_+ - g_-) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Alors, $f_- + g_-$ et $f_+ + g_+$ sont en escalier sur $[a; b]$, encadrent $f + g$ et la différence de leurs intégrales sur $[a; b]$ est inférieure à ϵ . Cela prouve que $f + g$ est intégrable sur $[a; b]$.

De plus, prenons f_- et g_- telles que $\int_a^b f(t)dt - I_{[a; b]}(f_-) \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $\int_a^b g(t)dt - I_{[a; b]}(g_-) \leq \frac{\epsilon}{2}$. On a alors $\int_a^b (f + g)(t)dt \geq I_{[a; b]}(f_- + g_-) = I_{[a; b]}(f_-) + I_{[a; b]}(g_-) \geq \int_a^b f(t)dt - \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b g(t)dt - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt - \epsilon$. On obtient donc l'inégalité $\int_a^b (f + g)(t)dt \geq \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

Si maintenant on prend f_+ et g_+ telles que $I_{[a; b]}(f_+) - \int_a^b f(t)dt \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $I_{[a; b]}(g_+) - \int_a^b g(t)dt \leq \frac{\epsilon}{2}$, on obtient par un raisonnement analogue $\int_a^b (f + g)(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$. On a donc bien l'égalité.

Soit f intégrable sur $[a; b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \geq 0$ et qu'on a deux fonctions en escalier f_- et f_+ sur $[a; b]$ telles que $f_- \leq f \leq f_+$, alors on a aussi λf_- et λf_+ en escalier sur $[a; b]$ et $\lambda f_- \leq \lambda f \leq \lambda f_+$. De plus, $I_{[a; b]}(\lambda f_+) - I_{[a; b]}(\lambda f_-) = \lambda I_{[a; b]}(f_+ - f_-)$. Ainsi, si on se donne $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $\lambda \eta \leq \epsilon$ et si on a choisi f_+ et f_- telles que $I_{[a; b]}(f_+ - f_-) \leq \eta$, ce qui est toujours possible, on a $I_{[a; b]}(\lambda f_+ - \lambda f_-) \leq \epsilon$, ce qui prouve que λf est bien intégrable sur $[a; b]$. De plus, sous ces hypothèses, $\int_a^b (\lambda f)(t)dt \leq I_{[a; b]}(\lambda f_+) \leq \lambda I_{[a; b]}(f_-) + \epsilon \leq \lambda \int_a^b f(t)dt + \epsilon$, d'où $\int_a^b (\lambda f)(t)dt \leq \lambda \int_a^b f(t)dt$, et avec un raisonnement analogue en changeant les $-$ en $+$, $\int_a^b (\lambda f)(t)dt \geq \lambda \int_a^b f(t)dt$. On a donc bien l'égalité.

Supposons maintenant $\lambda = -1$. Pour $\epsilon > 0$, on a des fonctions en escalier f_- et f_+ sur $[a; b]$ telles que $f_- \leq f \leq f_+$ et $I_{[a; b]}(f_+ - f_-) \leq \epsilon$. Alors, $-f_+$ et $-f_-$ sont en

escalier sur $[a; b]$, $-f_+ \leq -f \leq -f_-$ et $I_{[a;b]}(-f_- - (-f_+)) = I_{[a;b]}(f_+ - f_-) \leq \epsilon$. La fonction $-f$ est donc intégrable sur $[a; b]$. On a de plus $\int_a^b (-f)(t)dt \leq I_{[a;b]}(-f_-) \leq I_{[a;b]}(-f_+) + \epsilon = -I_{[a;b]}(f_+) + \epsilon \leq -\int_a^b f(t)dt + \epsilon$, d'où on tire $\int_a^b (-f)(t)dt \leq -\int_a^b f(t)dt$. Et par un raisonnement analogue, on tire $\int_a^b (-f)(t)dt \geq -\int_a^b f(t)dt$, d'où l'égalité.

Si enfin λ est négatif quelconque, on l'écrit $-\mu$ et on a alors μf et aussi λf intégrables, et de plus $\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \int_a^b (-\mu f)(t)dt = -\int_a^b (\mu f)(t)dt = -\mu \int_a^b f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.

On a donc bien dans tous les cas $\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.

Pour la relation de Chasles, supposons f intégrable sur $[a; b]$ et trois points x, y et z de $[a; b]$. Commençons par le cas $x \leq y \leq z$. Si $x = y$, $y = z$, ou $x = z$, la relation demandée est évidente. Supposons les donc deux à deux différents. Soit dans ce cas $\epsilon > 0$. On sait que les restrictions de f aux intervalles $[x; y]$ et $[y; z]$ sont intégrables. On peut donc prendre deux fonctions en escalier $f_{x,-} \leq f \leq f_{x,+}$ sur $[x; y]$ telles que $I_{[x;y]}(f_{x,+}) - I_{[x;y]}(f_{x,-}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ ainsi que deux fonctions en escalier $f_{z,-} \leq f \leq f_{z,+}$ sur $[y; z]$ telles que $I_{[y;z]}(f_{z,+}) - I_{[y;z]}(f_{z,-}) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

On considère alors la fonction f_- (resp. f_+) qui coïncide avec $f_{x,-}$ (resp $f_{x,+}$) sur $[x; y]$ et avec $f_{z,-}$ (resp $f_{z,+}$) sur $[y; z]$. Les fonctions f_- et f_+ sont en escalier sur $[x; z]$, $f_- \leq f \leq f_+$ et on a $I_{[x;z]}(f_{\pm}) = I_{[x;y]}(f_{\pm}) + I_{[y;z]}(f_{\pm}) = I_{[x;y]}(f_{x,\pm}) + I_{[y;z]}(f_{z,\pm})$.

On a alors $\int_x^z f(t)dt \geq I_{[x;z]}(f_-) \geq I_{[x;z]}(f_+) - \epsilon = I_{[x;y]}(f_+) + I_{[y;z]}(f_+) - \epsilon \geq \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt - \epsilon$. On a ainsi l'inégalité $\int_x^z f(t)dt \geq \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt$. Dans l'autre sens, on a $\int_x^z f(t)dt \leq I_{[x;z]}(f_+) \leq I_{[x;z]}(f_-) + \epsilon = I_{[x;y]}(f_-) + I_{[y;z]}(f_-) + \epsilon \leq \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt + \epsilon$. On a ainsi l'inégalité $\int_x^z f(t)dt \leq \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt$.

Comme on a les deux inégalités, on a bien $\int_x^z f(t)dt = \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt$.

Si maintenant x, y et z ne sont plus dans l'ordre, on en a une permutation x', y', z' telle que $x' \leq y' \leq z'$. On est alors sûr que $\int_{x'}^{y'} f(t)dt + \int_{y'}^{z'} f(t)dt + \int_{z'}^{x'} f(t)dt = 0$. Or, on remarque que les triplets (x', y') , (y', z') et (z', x') sont, en les remettant dans l'ordre, soit les triplets (x, y) , (y, z) , (z, x) , soit les triplets (y, x) , (z, y) , (x, z) (obtenus à partir des précédents en inversant les coordonnées). On en conclut que $\int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt + \int_z^x f(t)dt$ est, au signe près, égale à $\int_{x'}^{y'} f(t)dt + \int_{y'}^{z'} f(t)dt + \int_{z'}^{x'} f(t)dt$ (on a les mêmes termes si ce sont les mêmes triplets et leurs opposés si ce sont les autres). En tout cas, $\int_{[x;y]} f + \int_{[y;z]} f + \int_{[x;z]} f$ vaut également 0. On obtient donc bien la relation de Chasles.

Supposons maintenant que f soit intégrable et positive sur $[a; b]$. Alors la fonction nulle minore f et comme elle est en escalier sur $[a; b]$, son intégrale minore celle de f . Soit $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. Si maintenant f et g sont intégrables sur $[a; b]$ et $f \leq g$, alors $g - f$ est positive et intégrable et donc $\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt = \int_a^b (g - f)(t)dt \geq 0$. D'où $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$. Λ

Sommes de Riemann et de Darboux

DÉFINITION 5.8 Soit f une application (bornée) d'un intervalle $[a; b]$ dans \mathbb{R} . On se donne une subdivision $s = (a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = b)$ de $[a; b]$ et, pour $1 \leq i \leq k$, un réel y_i dans l'intervalle $]x_{i-1}; x_i[$. On appelle alors somme de Riemann associée à ces données le réel

$$S(f, s, y_1, \dots, y_k) = \sum_{i=1}^k f(y_i)(x_i - x_{i-1})$$

Prenons une fonction f bornée sur $[a; b]$ et, pour $1 \leq i \leq k$, appelons $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$. Alors, les réels

$$\sigma(f, s) = \sum_{i=1}^k m_i(x_i - x_{i-1})$$

et

$$\Sigma(f, s) = \sum_{i=1}^k M_i(x_i - x_{i-1})$$

s'appellent respectivement somme de Darboux inférieure et somme de Darboux supérieure de f sur $[a; b]$ associées à la subdivision s .

REMARQUE 5.10 On voit immédiatement que quel que soit le choix de réels y_i dans chaque intervalle $[x_{i-1}; x_i]$, on a $\sigma(f, s) \leq S(f, s, y_1, \dots, y_k) \leq \Sigma(f, s)$.

On remarque aussi que $\sigma(f, s)$ est l'intégrale sur $[a; b]$ de la plus grande fonction en escalier à laquelle s est subordonnée et qui est majorée par f . De même, $\Sigma(f, s)$ est l'intégrale sur $[a; b]$ de la plus petite fonction en escalier à laquelle s est subordonnée et qui est minorée par f . En particulier, $\sigma(f, s) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \Sigma(f, s)$.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 5.11 Soit f une fonction intégrable sur $[a; b]$ et $\epsilon > 0$ un réel. Alors il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour toute subdivision $s = (a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = b)$ de $[a; b]$ dont le pas est strictement inférieur à η_0 , on a

$$\int_a^b f(t)dt - \epsilon \leq \sigma(f, s) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \Sigma(f, s) \leq \int_a^b f(t)dt + \epsilon$$

Ce théorème entraîne immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.12 Soit f une fonction intégrable sur $[a; b]$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $s = (a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = b)$ de $[a; b]$ dont le pas est strictement inférieur à η , et pour tout choix de réels y_1, \dots, y_k dans $]x_0, x_1[, \dots,]x_{k-1}, x_k[$, on a $|S(s, y_1, \dots, y_k) - \int_a^b f(t)dt| \leq \epsilon$.

DÉMONSTRATION Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a; b]$. Soit g une fonction en escalier qui majore f sur $[a; b]$ et $s_g = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ une subdivision subordonnée à g . Donnons-nous alors une subdivision quelconque $s = (a = y_0, y_1, \dots, y_k = b)$ de $[a; b]$ et majorons $\Sigma(f, s)$ à l'aide de g .

Pour $1 \leq i \leq n$, appelons $K_i = \{j \in \{1; \dots; k\} \text{ tq } [y_{j-1}; y_j] \subset]x_{i-1}; x_i[$ et K la réunion des K_i . Notons, pour $1 \leq i \leq n$, g_i la valeur de g sur $]x_{i-1}; x_i[$. Notons δ le pas de la subdivision s . Notons enfin M un majorant de $|f|$ et M' un majorant de $|g|$ sur $[a; b]$.

Remarquons que si on se fixe $i \in \{1; \dots; n\}$, il y a au plus une valeur de j pour laquelle $y_{j-1} \in]x_{i-1}; x_i[$ et $y_j \notin]x_{i-1}; x_i[$. Or, si $j \in \{1; \dots; k\}$ n'est pas dans K , alors soit il est de la forme précédente (au plus n possibilités), soit y_{j-1} est un des éléments de la subdivision s_1 (au plus n possibilités car b ne peut convenir). Ainsi, $\{1; \dots; n\} \setminus K$ contient au plus $2n$ éléments.

On a

$$\begin{aligned} \Sigma(f, s) &= \sum_{1 \leq j \leq k} (y_j - y_{j-1}) \left(\sup_{t \in [y_{j-1}; y_j]} f(t) \right) = \\ &= \sum_{1 \leq j \leq k, j \in K} (y_j - y_{j-1}) \left(\sup_{t \in [y_{j-1}; y_j]} f(t) \right) + \sum_{1 \leq j \leq k, j \notin K} (y_j - y_{j-1}) \left(\sup_{t \in [y_{j-1}; y_j]} f(t) \right) \end{aligned}$$

La deuxième de ces deux sommes peut être majorée par $2n \cdot \delta \cdot M$ puisqu'elle contient au plus $2n$ éléments, chacun étant majoré par $\delta \cdot M$.

Pour la première, on regroupe les y_j , pour j dans K suivant l'intervalle de s_g auquel ils appartiennent. Cela donne :

$$\sum_{1 \leq j \leq k, j \in K} (y_j - y_{j-1}) \left(\sup_{t \in [y_{j-1}; y_j]} f(t) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in K_i} (y_j - y_{j-1}) \left(\sup_{t \in [y_{j-1}; y_j]} f(t) \right)$$

De plus, comme g majore f , on peut dire que pour tout j dans K_i , on a $g_i \geq \sup_{t \in [y_{j-1}; y_j]} f(t)$. Cela donne alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in K_i} (y_j - y_{j-1}) \left(\sup_{t \in [y_{j-1}; y_j]} f(t) \right) &\leq \sum_{i=1}^n g_i \cdot \sum_{j \in K_i} (y_j - y_{j-1}) = \\ &= I[a; b](g) - \sum_{i=1}^n g_i \left((x_i - x_{i-1}) - \sum_{j \in K_i} (y_j - y_{j-1}) \right) \end{aligned}$$

Or, pour tout i , les éléments de K_i sont des éléments consécutifs de $\{1, \dots, k\}$ et on a donc

$$\sum_{j \in K_i} (y_j - y_{j-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } K_i = \emptyset \\ y_{\max K_i} - y_{\min K_i - 1} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après la remarque 5.3, si $K_i = \emptyset$, c'est que $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta$. Sinon, on a nécessairement $x_{i-1} \leq y_{\min K_i - 1} \leq x_{i-1} + \delta$ et $x_i - \delta \leq y_{\max K_i} \leq x_i$. De ces deux égalités, on déduit

$0 \leq (x_i - x_{i-1}) - (y_{\max K_i} - y_{\min K_{i-1}}) \leq 2\delta$. On obtient ainsi

$$\left| \sum_{i=1}^n g_i \left((x_i - x_{i-1}) - \sum_{j \in K_i} (y_j - y_{j-1}) \right) \right| \leq n \cdot M' \cdot (2\delta)$$

On en déduit

$$\sum_{1 \leq j \leq k, j \in K} (y_j - y_{j-1}) \left(\sup_{t \in [y_{j-1}, y_j]} f(t) \right) \leq I[a; b](g) + 2n\delta M'$$

Et finalement

$$\Sigma(f, s) \leq I[a; b](g) + 2n\delta(M + M')$$

Ceci va nous permettre de trouver assez facilement ce qu'on désire. Fixons déjà $\epsilon > 0$. Prenons g qui majore f sur $[a; b]$ et tel que $I[a; b](g) - \int_1^a; b] f(t) dt \leq \frac{\epsilon}{2}$. Appelons s_g une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à g , n le nombre d'intervalles de s_g , M un majorant (non nul) de $|f|$ sur $[a; b]$ et M' un majorant de $|g|$ sur $[a; b]$. Soit maintenant s une subdivision quelconque de $[a; b]$ vérifiant $\delta(s) \leq \frac{\epsilon}{4n(M+M')}$. On a alors $\Sigma(f, s) \leq I[a; b](g) + 2n \frac{\epsilon}{4n(M+M')} (M + M') \leq \int_1^a; b] f(t) dt + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \int_1^a; b] f(t) dt + \epsilon$.

Ainsi, on a trouvé $\eta_+ > 0$ tel que toute subdivision s de $[a; b]$ de pas inférieur à η_+ vérifie bien $\Sigma(f, s) \leq \int_1^a; b] f(t) dt + \epsilon$.

Par un raisonnement analogue, on trouve $\eta_- > 0$ tel que toute subdivision s de $[a; b]$ de pas inférieur à η_+ vérifie $\sigma(f, s) \geq \int_1^a; b] f(t) dt - \epsilon$.

En posant $\eta = \min(\eta_+, \eta_-)$, on a trouvé un réel satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème, qui s'en trouve démontré. Λ

On applique souvent ce théorème en faisant la moyenne de points équirépartis dans l'intervalle $[a; b]$. Plus clairement :

COROLLAIRE 5.13 *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a; b]$. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{i}{n}(b-a))$. Alors la suite $(u_n)_n$ converge vers $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.*

On obtient la même limite pour la suite de terme général $u'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{i}{n}(b-a))$, ainsi que pour la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(a + \frac{i}{n}(b-a))$.

En effet, prenons pour $n \geq 1$ la subdivision $s_n = (a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b)$. Pour tout n , le pas de cette subdivision est $\frac{b-a}{n}$ et tend donc vers 0. Or, pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision de pas $\leq \delta$, on a $|\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{i}{n}(b-a)) - \int_a^b f(t) dt| \leq \epsilon$. Et il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a $\delta(s_n) \leq \delta$, ce qui donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{i}{n}(b-a)) = \int_a^b f(t) dt$. En divisant par $b-a$, on obtient le résultat annoncé.

Il en va de même pour u'_n , sauf qu'on prend alors à chaque fois l'autre extrémité de l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, ce qui ne change pas le résultat.

Pour v_n , on peut subdiviser $[a; b]$ en $(n + 1)$ intervalles de longueur $\frac{b-a}{n+1}$, et on voit que pour tout k , on a $a + \frac{i}{n}(b - a)$ dans l'intervalle $[a + \frac{i}{n+1}(b - a); a + \frac{i+1}{n+1}(b - a)]$ et conclure comme pour u et u' .

5.3 Intégration des fonctions continues

Les fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ forment une des catégories les plus importantes de fonctions intégrables. Pour le démontrer, nous allons nous servir du lemme suivant :

LEMME 5.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier f_+ et f_- sur $[a; b]$ telles que $f_- \leq f \leq f_+$ et pour tout x de $[a; b]$, $f_+(x) - f_-(x) \leq \epsilon$.*

PREUVE Soit $\epsilon > 0$. Appelons E_ϵ le sous-ensemble de $[a; b]$ formé des réels c pour lesquels la propriété du lemme est fautive pour la restriction de f à l'intervalle $[a; c]$. Si cet ensemble n'était pas vide, il posséderait une borne inférieure c_0 .

On ne peut avoir $c_0 = a$, par continuité de f en a . On a η tel que sur $c_0 - \eta; c_0 + \eta[$, $|f(x) - f(c_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Or la propriété est vraie pour $c - \frac{\eta}{2}$, donc on peut trouver les deux fonctions en escalier. On prolonge la plus grande par $f(c_0) + \frac{\epsilon}{2}$ et la plus petite par $f(c_0) - \frac{\epsilon}{2}$ sur $]c - \frac{\eta}{2}; c + \frac{\eta}{2}[$. On obtient alors une contradiction. Donc c_0 n'existe pas et la propriété du lemme est bien vérifiée sur $[a; b]$. Λ

Le théorème suivant, qui fait notamment le lien entre dérivation et intégration est bien entendu d'une importance primordiale :

THÉORÈME 5.14 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} . Alors f est intégrable sur cet intervalle et l'application $x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a; b]$.*

DÉMONSTRATION Soit f continue sur $[a; b]$, alors pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe deux fonctions en escalier f_- et f_+ telles que $f_- \leq f \leq f_+$ et pour tout $x \in [a; b]$, $f_+(x) - f_-(x) \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. Il est alors clair que $I_{[a; b]}(f_+) - I_{[a; b]}(f_-) \leq \epsilon$, ce qui prouve que f est intégrable sur $[a; b]$.

Nous allons montrer que la fonction $F : x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$, de dérivée f . Pour cela, nous montrerons que la dérivée à droite (resp. à gauche) existe en tout point de cet intervalle, b (resp. a) excepté et que toutes ces dérivées à droite ou à gauche en n'importe quel x valent $f(x)$.

Soit $x_0 \in [a; b[$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout t de $[x_0; x_0 + \eta[$, on ait $f(t) \in [f(x_0) - \epsilon; f(x_0) + \epsilon]$. On a, pour x dans $[x_0; x_0 + \eta[$, $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$.

Ainsi, $(x - x_0)(f(x_0) - \epsilon) \leq F(x) - F(x_0) \leq (x - x_0)(f(x_0) + \epsilon)$, et donc $f(x_0) - \epsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)} \leq f(x_0) + \epsilon$. On peut donc affirmer que F est dérivable à droite en x_0 , de dérivée à droite $f(x_0)$.

La preuve du fait que si x_0 est dans $]a; b]$, f est dérivable à gauche en x_0 , de dérivée à gauche $f(x_0)$ est analogue.

On en déduit donc que F est bien une primitive de f sur $[a; b]$. Λ

REMARQUE 5.15 *Si f est continue sur $[a; b]$, n'importe quel point c de $[a; b]$ vérifie que $x \rightarrow \int_c^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a; b]$.*

En effet, cette fonction n'y diffère de $x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ que de la constante $\int_c^a f(t)dt$. Elle a donc même dérivée.

5.4 Calcul d'intégrales

Nous avons vu que si f était continue sur un intervalle $[a; b]$, alors la fonction $F : x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$, définie sur $[a; b]$ y était une primitive de f . Comme $F(a) = 0$, on peut écrire $\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a)$. Si maintenant on prend une primitive G quelconque de f sur $[a; b]$, on sait qu'il existe une constante c telle que sur $[a; b]$, $G(x) = F(x) + c$. On a alors $G(b) - G(a) = f(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Ainsi, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle, il suffit de considérer une primitive quelconque de la fonction à intégrer et de faire la différence de ses valeurs aux bornes de l'intégrale.

Le calcul d'intégrales se ramène donc bien souvent à la recherche de primitives de fonctions continues.

De plus, on notera souvent un réel de la forme $G(b) - G(a)$ par $[G(t)]_a^b$, soit, si f est une fonction continue de primitive F sur un intervalle $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Primitives classiques Il faut connaître les dérivées classiques.

Fonctions polynomiales : Leurs primitives sont polynomiales.

Fonction puissance : Si la puissance est différente de -1 , on a une fonction puissance multipliée par une constante qui est primitive. Si la puissance est -1 , on a le logarithme, ou $x \rightarrow \ln |x|$ si on la veut sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .

Fonction exponentielle : Elle est elle-même une de ses primitives.

Fonction sinus : Une de ses primitives est l'opposé de la fonction cosinus.

Fonction cosinus : Une de ses primitives est la fonction sinus.

De plus, si on a des sommes et des produits par des constantes de telles fonctions, on en trouve des primitives en faisant la somme ou le produit par les mêmes constantes de ces fonctions.

Il y a aussi des méthodes classiques un peu plus élaborées pour trouver les primitives de certaines fonctions.

Intégration par parties Rappelons que si u et v sont dérivables sur un intervalle, alors uv aussi et on y a $(uv)' = u'v + uv'$. Ainsi, si W est une primitive de $u'v$, alors $uv - W$ est une primitive de uv' . Cette remarque permet de calculer certaines intégrales par la méthode dite d'intégration par parties, lorsque la fonction W est plus facile à calculer qu'une primitive directe de uv' .

PROPOSITION 5.16 Soit F une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a; b]$, où sa dérivée est f , g une fonction continue sur ce même intervalle, où elle admet la fonction G comme primitive. Alors :

$$\int_a^b F(t)g(t)dt = [FG(t)]_a^b - \int_a^b f(t)G(t)dt$$

EXEMPLE 5.4.1 Cherchons $\int_0^1 te^t dt$. Posons $F(t) = t$ ayant pour dérivée $f(t) = 1$ et $g(t) = e^t$, ayant pour primitive $G(t) = e^t$. Cela donne :

$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^t dt = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - [e^t]_0^1 = e - (e^1 - 1) = e - e + 1 = 1$$

Nous avons donc trouvé $(t - 1)e^t$ comme primitive de te^t "sans effort" au moyen d'une intégration par parties alors que la trouver sans ce moyen aurait été bien plus problématique.

Changement de variables Rappelons que si v est une fonction dérivable sur $[a; b]$, à valeurs dans l'intervalle $[c; d]$ et u est dérivable sur $[c; d]$, alors $u \circ v$ est dérivable sur $[a; b]$ et sa dérivée sur cet intervalle est $(u' \circ v) \cdot v'$. Cette remarque permet de calculer certaines intégrales par la méthode dite de changement de variables qui s'énonce ainsi :

PROPOSITION 5.17 Soit ϕ une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} et ψ une application de classe \mathcal{C}^1 d'un intervalle $[c; d]$ ou $[d; c]$ dans $[a; b]$ avec $a = \psi(c)$ et $b = \psi(d)$. On a alors :

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_c^d (\phi \circ \psi)(x)\psi'(x)dx$$

Très souvent, mais pas toujours, on utilise le changement de variables sous la forme suivante :

PROPOSITION 5.18 Soit f une fonction d'un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} dans $[f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$ qui est de classe \mathcal{C}^1 , bijective et dont la fonction réciproque est aussi de classe \mathcal{C}^1 (une telle fonction s'appelle un difféomorphisme entre ces deux intervalles). Soit g une fonction continue sur l'image de f . Alors on a la formule :

$$\int_a^b (g \circ f)(t) dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) \cdot (f^{-1})'(x) dx$$

On remarque que cette seconde proposition est un cas particulier de la première où on a posé $\phi = g \circ f$ et $\psi = f^{-1}$.

EXEMPLE 5.4.2 Cherchons $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan t dt$. On remarque déjà que $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t} dt$. En effectuant le changement de variables $u = \cos t$, on a $du = -\sin t dt$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Cela donne alors $I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} -\frac{du}{u} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u} = [\ln u]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \sqrt{3} = \frac{\ln 3}{2}$.

Nous avons donc trouvé $-\ln(\cos)$ comme primitive de la fonction tangente (sur un certain intervalle) "sans effort" au moyen d'un changement de variables alors que la trouver sans ce moyen aurait été plus problématique.

Cherchons ici $I' = \int_0^2 e^{\sqrt{x}} dx$. On effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}$, ce qui donne alors $x = u^2$ et $dx = 2udu$. Ainsi, $J = \int_0^{\sqrt{2}} e^u \cdot 2udu = 2 \int_0^{\sqrt{2}} ue^u du$. Nous avons vu ci-dessus comment une intégration par parties permettait de calculer cette dernière intégrale. On obtient donc $J = 2[(u-1)e^u]_0^{\sqrt{2}} = (2\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}} - (-1)e^0 = (2\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}} + 1$

Intégration des fractions rationnelles L'un des principaux intérêts de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles est de permettre d'en trouver des primitives et de calculer des intégrales.

Certains éléments simples s'intègrent facilement, d'autres plus laborieusement.

On sait déjà intégrer les fonctions polynomiales, nous n'y revenons pas.

Sur un intervalle où c'est défini, une primitive d'une fonction de la forme $\frac{\lambda}{x-a}$ est $\lambda \ln(|x-a|)$.

Sur un intervalle où c'est défini, une primitive d'une fonction de la forme $\frac{\lambda}{(x-a)^k}$, pour $k \geq 2$ est $-\frac{\lambda}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$.

Si on se donne un élément simple de la forme $\frac{\lambda x + \mu}{x^2 + ax + b}$, alors on écrit cet élément sous forme $\frac{\lambda'(2x+a) + \mu'}{x^2 + ax + b}$. Alors, une primitive de $\frac{\lambda'(2x+a)}{x^2 + ax + b}$ est $\lambda' \ln(x^2 + ax + b)$.

Pour trouver une primitive de $\frac{1}{x^2 + ax + b}$, on la cherche sous forme d'une intégrale, ce qui est plus pratique pour changer les variables. Nous appellerons Δ le réel strictement

négatif $a^2 - 4b$. Cela donne $\int_*^x \frac{dx}{x^2+ax+b}$, où $*$ représente un réel sans intérêt (car suivant sa valeur une constante est ajoutée). On ne s'en préoccupe pas. On effectue d'abord le changement de variables $X = x + \frac{a}{2}$. On obtient alors $dx = dX$ et $\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{X^2+b-\frac{a^2}{4}}$, donc la primitive est $\int_*^{x+\frac{a}{2}} \frac{dX}{X^2+b-\frac{a^2}{4}}$. Puis on factorise le dénominateur par son terme constant, qui est strictement positif, ce qui donne $\frac{4}{-\Delta} \int_*^{x+\frac{a}{2}} \frac{dX}{1+\frac{4}{-\Delta}X^2}$. On change à nouveau de variables, en posant $Y = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}X$, ce qui donne $dX = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}dY$. On obtient alors comme primitive $\frac{4}{-\Delta} \int_*^{\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}(x+\frac{a}{2})} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \frac{dY}{1+Y^2}$. On peut alors intégrer ce dernier terme et on obtient comme primitive $\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}[\arctan Y]_*^{\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}(x+\frac{a}{2})}$, donc $\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}(x + \frac{a}{2}))$.

Si on se donne un élément simple de la forme $\frac{\lambda X + \mu}{(x^2+ax+b)^k}$ avec $k \geq 2$, alors on l'écrit sous forme $\frac{\lambda'(2x+a)+\mu'}{(x^2+ax+b)^k}$. Une primitive de $\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^k}$ est donnée par $-\frac{1}{(k-1)(x^2+ax+b)^{k-1}}$.

Reste donc à trouver une primitive de $\frac{1}{(x^2+ax+b)^k}$, qui sont les éléments simples les plus délicats à intégrer ; ils sont heureusement assez rares dans la pratique.

Pour cela, on effectue un changement de variables analogue au précédent pour se ramener à $\frac{1}{(1+Y^2)^k}$. Ceci s'écrit aussi $\frac{(1+Y^2)-Y^2}{(1+Y^2)^k} = \frac{1}{(1+Y^2)^{k-1}} - Y \cdot \frac{Y}{(1+Y^2)^k}$. Une intégration par parties donne $\int Y \cdot \frac{Y dY}{(1+Y^2)^k} = [Y \cdot \frac{1}{-2(k-1)(1+Y^2)^{k-1}}] - \int \frac{dY}{-2(k-1)(1+Y^2)^{k-1}}$. Il ne reste à intégrer que des éléments de la forme $\frac{cste}{(1+Y^2)^{k-1}}$. On peut ainsi garantir qu'un tel calcul finira par aboutir.

Intégration des fractions rationnelles trigonométriques Si on se donne une fraction où numérateur et dénominateur sont des polynômes en sinus et cosinus, alors il est toujours possible d'en trouver une primitive à l'aide des fonctions usuelles (sur des intervalles où ces fractions sont définies). Le fait est qu'on peut toujours se ramener, via un changement de variables, à une primitive d'une fraction rationnelle (classique).

Il existe un changement de variables qui permet cela dans tous les cas, et certains qui ne marchent que dans des cas particuliers, mais qui, lorsqu'ils marchent, simplifient considérablement le calcul. Commençons par ces derniers :

Premier cas : La fraction rationnelle donne une fonction impaire. Dans ce cas, elle est le produit de la fonction sinus par une fraction rationnelle trigonométrique paire. On peut démontrer qu'une telle fraction est obligatoirement une fraction rationnelle en le cosinus. Le changement de variables $u = \cos t$ permet alors de se ramener directement à une fraction rationnelle.

EXEMPLE 5.4.3 Soit à trouver une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sin^3 x - 6 \sin x \cos^3 x}$ là où elle est définie. Il s'agit d'une fraction rationnelle trigonométrique impaire. On peut l'écrire comme produit de $\sin x$ par une fraction rationnelle en cosinus, soit

$\frac{1}{\sin^3 x - 6 \sin x \cos^3 x} = \sin x \cdot \frac{1}{\sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^3 x} = \sin x \cdot \frac{1}{(1 - \cos^2 x)^2 - 6(1 - \cos^2 x) \cos^3 x} = \sin x \cdot \frac{1}{(1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 x - 6 \cos^3 x)}$. On se ramène donc à trouver une primitive de la fraction rationnelle $t \rightarrow \frac{1}{(1-t^2)(1-t^2-6t^3)}$. Pour cela, on factorise $(1-t^2)(1-t^2-6t^3) = (1+t)(1-t)(1-2t)(1+2t+3t^2)$. La décomposition en éléments simples de la fraction est alors, après calcul,

$$\frac{1}{(1-t^2)(1-t^2-6t^3)} = \frac{1}{12(t+1)} + \frac{1}{12(t-1)} - \frac{8}{33(t-\frac{1}{2})} + \frac{15t+34}{66(3t^2+2t+1)}$$

Une primitive de $\frac{1}{t+1}$ est $\ln|t+1|$ sur un intervalle où c'est défini. Une primitive de $\frac{1}{t-1}$ est $\ln|t-1|$ sur un intervalle où c'est défini. Une primitive de $\frac{1}{t-\frac{1}{2}}$ est $\ln|t-\frac{1}{2}|$ sur un intervalle où c'est défini.

De plus, on a $\frac{15t+34}{66(3t^2+2t+1)} = \frac{5}{66} \cdot \frac{3t+1}{(3t^2+2t+1)} + \frac{29}{66} \cdot \frac{1}{3t^2+2t+1}$. Une primitive de $\frac{3t+1}{(3t^2+2t+1)}$ est $\frac{1}{2} \ln(3t^2+2t+1)$, sur \mathbb{R} .

On a de plus $3t^2+2t+1 = 3(t+\frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(1+\frac{9}{2}(t+\frac{1}{3})^2)$, soit $\frac{1}{3t^2+2t+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{3}{\sqrt{2}}t+\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$. Une primitive de cette fonction est donc $\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \arctan(\frac{3}{\sqrt{2}}t + \frac{1}{\sqrt{2}})$, soit $\sqrt{2} \arctan \frac{3t+1}{\sqrt{2}}$. Une primitive de la fraction $t \rightarrow \frac{1}{(1-t^2)(1-t^2-6t^3)}$ est alors, sur un intervalle où c'est défini, $\frac{1}{12} \ln|t+1| + \frac{1}{12} \ln|t-1| - \frac{8}{33} \ln|t-\frac{1}{2}| + \frac{5}{132} \ln(3t^2+2t+1) + \frac{29}{66\sqrt{2}} \arctan \frac{3t+1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, si on prend maintenant la fraction rationnelle trigonométrique initiale, une de ses primitives, sur un intervalle où elle est définie, est

$$\frac{1}{12} \ln(1 + \cos x) + \frac{1}{12} \ln(1 - \cos x) - \frac{8}{33} \ln|\cos x - \frac{1}{2}| + \frac{5}{132} \ln(3 \cos^2 x + 2 \cos x + 1) + \frac{29}{66\sqrt{2}} \arctan \frac{3 \cos x + 1}{\sqrt{2}}$$

Deuxième cas : La fraction rationnelle R vérifie $R(\pi - x) = -R(x)$. Dans ce cas, le changement de variables $u = \sin t$ marche (en fait, à une translation de la variable près, ce cas est analogue au premier).

Troisième cas : La fraction rationnelle R est π -périodique (i.e. vérifie $R(x + \pi) = R(x)$). Dans ce cas, on peut prouver que le changement de variables $u = \tan t$ permet à nouveau de se ramener à une fraction rationnelle. Cela donne alors, sur les bons intervalles, $t = \arctan u (+Cste)$, et $dt = \frac{du}{1+u^2}$. Il faut toutefois faire attention à l'intervalle sur lequel est définie la fonction, la fonction tangente ne réalisant pas un difféomorphisme entre intervalles si l'intervalle de départ contient un point où le cosinus s'annule.

EXEMPLE 5.4.4 Soit à trouver une primitive de la fonction $x \rightarrow R(x) = \frac{\cos^2 x}{2 + \sin^2 x}$. Il est clair que cette fonction est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} . De plus, comme elle est positive et s'annule peu, toute primitive de cette fonction est strictement croissante, et ne peut donc pas être π -périodique, comme le serait une fonction définie sur tout \mathbb{R} qui ne dépendrait que de $\tan x$.

Essayons d'en trouver une primitive. Il est clair que R est π -périodique et on l'exprime alors en fonction de $\tan x$ (quand $\tan x$ est défini). On a dans ce cas :

$$R(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} = \frac{1}{1 + 2 \tan^2 x}$$

Prenons pour commencer x dans $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On pose sur $[0; x]$, $u = \tan t$, ce qui donne $t = \arctan u$ et $dt = \frac{du}{1+u^2}$. On obtient ainsi : $\int_0^x \frac{\cos^2 t}{1+\sin^2 t} dt = \int_0^x \frac{dt}{1+2 \tan^2 t} = \int_0^{\tan x} \frac{du}{(1+u^2)(1+2u^2)}$. Il reste alors à trouver une primitive de la fraction rationnelle $u \rightarrow \frac{1}{(1+u^2)(1+2u^2)}$. La décomposition en éléments simples de cette fraction, (qui peut être faite astucieusement de tête), donne $\frac{1}{(1+u^2)(1+2u^2)} = \frac{2}{1+2u^2} - \frac{1}{1+u^2}$. Une primitive de $u \rightarrow \frac{1}{1+u^2}$ est l'Arctangente, une primitive de $u \rightarrow \frac{1}{(1+2u^2)}$ est $u \rightarrow \frac{\arctan(\sqrt{2}u)}{\sqrt{2}}$. On obtient donc comme primitive de R sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ la fonction $x \rightarrow \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x) - \arctan(\tan x) = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x) - x$. Cette expression fournit d'ailleurs une primitive de R sur tout intervalle de la forme $]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[$. Si on veut une primitive de R sur tout \mathbb{R} , il faut alors "recoller de tels morceaux" aux points de la forme $k\pi + \frac{\pi}{2}$.

La fonction ci-dessus tend vers $\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}^-$ et, par imparité, vers $\frac{\pi}{2}(-\sqrt{2} + 1)$ en $-\frac{\pi}{2}^+$. La différence de ces deux nombres vaut $(\sqrt{2} - 1)\pi$, ce qui indique que l'intégrale de R sur n'importe quel intervalle de longueur π vaut ce nombre.

Ainsi, la fonction qui vaut $\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x) - x + k(\sqrt{2} - 1)\pi$ sur $]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[$ et $(k + \frac{1}{2})(\sqrt{2} - 1)\pi$ en $(k + \frac{1}{2})\pi$ est une primitive de R sur tout \mathbb{R} .

Cas général : Dans le cas où aucune de ces conditions n'est remplie, on peut utiliser le changement de variables $u = \tan \frac{t}{2}$. Rappelons qu'alors on a $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $t = 2 \arctan u (+Cste)$, soit $dt = \frac{2du}{1+u^2}$. Là encore, il faut bien faire attention aux intervalles sur lesquels cette fonction réalise un difféomorphisme pour que le changement de variables soit valide.

EXEMPLE 5.4.5 Cherchons à calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$$

Commençons par nous ramener à une intégrale sur un intervalle adapté au changement de variables.

On a pour tous réels a et b , $\int_{\pi-b}^{\pi-a} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_a^b \frac{dt}{2+\sin t}$. En effet, il suffit d'effectuer le changement de variables $u = \pi - t$ dans la première intégrale. Cela donne $t = \pi - u$ et $dt = -du$. Soit $\int_a^b \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{\pi-a}^{\pi-b} \frac{-du}{2+\sin(\pi-u)} = \int_{\pi-b}^{\pi-a} \frac{du}{2+\sin u}$ et on renomme la variable.

On en déduit alors $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\sin t}$, $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dt}{2+\sin t}$.

On a aussi, pour tous réels a et b , $\int_a^b \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$. Il suffit en effet d'effectuer le changement de variables $u = t + 2\pi$ dans la première intégrale et on retrouve la seconde (où u a été renommé t). Ainsi, $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dt}{2+\sin t}$.

En recollant les quatre morceaux, on obtient alors $I = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\sin t}$.

La fonction $t \rightarrow \tan \frac{t}{2}$ réalise un difféomorphisme de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. Le changement de variables correspondant fournit donc $I = 2 \int_{-1}^1 \frac{2du}{(2+\frac{2u}{1+u^2})(1+u^2)} = 2 \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u+u^2}$.

Or, $u^2 + u + 1 = (u + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1 + (\frac{2u+1}{\sqrt{3}})^2)$. Ainsi, $\frac{1}{1+u+u^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1+(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})^2}$ et une primitive de cette fonction sur $[-1; 1]$ est $\frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}}$, soit $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}}$. Cela nous donne finalement

$$I = \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{\sqrt{3}} (\arctan \sqrt{3} - \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})) = \frac{4}{\sqrt{3}} (\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

5.5 Calcul approché d'une intégrale

Il n'est pas toujours aisé (ni même possible) d'exprimer de manière simple la valeur de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle. On peut aussi essayer d'en donner des valeurs, pas forcément exactes, mais proches de leur valeur réelle.

L'idée est généralement de découper l'intervalle d'intégration en un grand nombre de petits sous-intervalles et d'approcher la valeur (moyenne) de la fonction à intégrer sur ces petits sous-intervalles par une combinaison judicieuse de valeurs en différents points de ce sous-intervalle.

Nous avons par exemple déjà prouvé que n'importe quelle somme de Riemann associée à une fonction intégrable approximait assez bien son intégrale pour peu que l'intervalle d'intégration soit découpé en sous-intervalles suffisamment petits.

Nous allons toutefois constater que l'approximation n'est pas toujours de qualité comparable quels que soient les points choisis.

Méthode des rectangles : Il s'agit d'approcher la fonction sur un intervalle par sa valeur en une extrémité (son extrémité inférieure). Si on veut intégrer la fonction f sur $[a; b]$, on prend $n \geq 1$ et on pose :

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

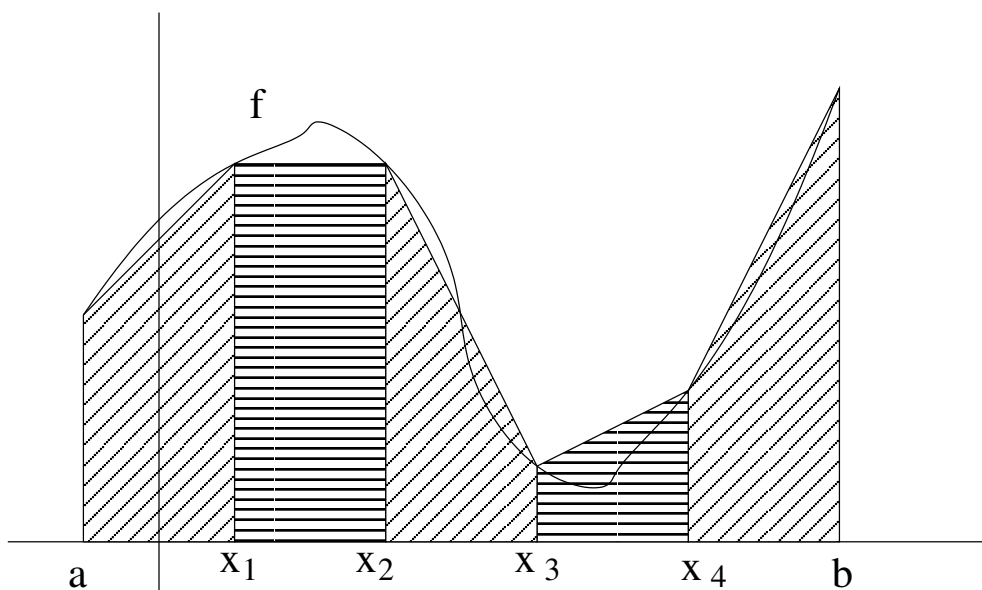
Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$, on peut majorer l'erreur commise, $|\int_a^b f(t)dt - I_n|$, par $\frac{K}{n}$ où, si M désigne un majorant de $|f'|$ sur $[a; b]$, $K = \frac{(b-a)^2 M}{2}$.

Méthode des points médians : Il s'agit ici d'approcher la fonction sur l'intervalle par sa valeur au centre de l'intervalle. Si on veut intégrer la fonction f sur $[a; b]$, on prend $n \geq 1$ et on pose $I'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$. On peut dans le cas où f est de classe \mathcal{C}^2 ,

majorer l'erreur commise, $|\int_a^b f(t)dt - I'_n|$, par $\frac{K'}{n^2}$ où, si M_2 désigne un majorant de $|f''|$ sur $[a; b]$, $K' = \frac{(b-a)^3 M_2}{24}$.

Méthode des trapèzes : Il s'agit ici d'approcher la fonction sur l'intervalle par la fonction affine qui coïncide avec elle aux extrémités de l'intervalle. Reprenons les mêmes notations que pour la méthode des points médians et posons :

$$J_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$



L'intégrale de f sur $[a; b]$ est approximée par l'aire hachurée

On peut, toujours sous l'hypothèse f de classe \mathcal{C}^2 , majorer l'erreur commise, $|\int_a^b f(t)dt - J_n|$, par $\frac{K''}{n^2}$ où $K'' = \frac{(b-a)^3 M_2}{12}$.

On remarque que le majorant de l'erreur commise par la méthode des trapèzes est le double de celui de la méthode des points médians, ce qui explique en partie la méthode suivante :

Méthode de Simpson : Il s'agit ici d'approcher la fonction sur l'intervalle par la fonction polynomiale de degré au plus 2 qui coïncide avec elle aux deux extrémités et au centre. On peut constater que cela revient à une pondération judicieuse ($\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$) entre la méthode des trapèzes et la méthode des points médians. On pose $J'_n = \frac{1}{3}(I_n + J_n)$ ou encore $J'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6} (f(x_i) + 4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1}))$.

On suppose ici que la fonction f est de classe \mathcal{C}^4 . On peut alors majorer l'erreur commise, $|\int_a^b f(t)dt - J'_n|$, par $\frac{K'''}{n^4}$ où, si M_4 désigne un majorant de $|f^{(4)}|$ sur $[a; b]$, $K''' = \frac{(b-a)^5 M_4}{2880}$.

Exercices

1) Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants :

- a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$; b) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\alpha + \frac{k}{n}\right)$
 c) $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$; d) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (k+n)}$
 e) $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^{-1} \right]$

2) Calculer les intégrales suivantes :

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \sin(2x) dx$

Par parties :

- c) $\int_1^2 \ln t dt$; d) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan u du$

Par changement de variables :

- f) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt$ (poser $u = \sqrt{1+t}$) ; g) $\int_1^{64} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ (poser $x = u^6$)

- h) $\int_{-1}^1 e^{\arcsin t} dt$

Comme vous pouvez :

- i) $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{u}) du$; j) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$; k) $\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}$
 l) $\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{(2+\sin u)(1+\sin^2 u)} du$; m) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx$.

3) Pour chacune des fonctions suivantes, trouver une primitive en précisant le ou les intervalles sur le(s)quel(s) le résultat est valide :

- $\frac{1}{t^n}$; $\frac{2t+3}{t^2-4t+4}$; $\frac{t^3+1}{t^2+t+2}$; $\frac{t^4+1}{(t-1)(t-2)(t-3)}$
 $\frac{1}{(t^4-1)^3}$; $\frac{1}{\sqrt{3t^2+4}}$; $\frac{1}{(t+1)\sqrt{5t^2+14t+10}}$; $\frac{1}{3t-1} \sqrt{\frac{t}{t+1}}$
 $\frac{1}{\sqrt{4-(e^t+1)^2}}$; $\sqrt{1+t} \ln t$; $\arcsin t$; $\frac{\sin t}{\sin^2 t - \cos t}$
 $\frac{1}{1+\tan t}$; $\frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$; $\frac{3^{3t}}{1-3^{3t}}$; $\frac{e^{2t}-e^t}{e^{2t}+e^t+1}$.

4) Donner un méthode pour trouver une primitive des fonctions suivantes :

- $\tan^n t$; $\frac{1}{\tan^n t}$; $\frac{1}{\cos^n t}$; $\frac{1}{\cosh^n t}$

5) Soient T un réel strictement positif et f une fonction continue sur \mathbb{R} , périodique, de période T . On se donne en outre un réel a et un entier n .

a) Montrer que :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

b) Montrer que :

$$\int_a^{a+nT} f(x) dx = n \cdot \int_0^T f(x) dx$$

6) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$$

- a) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
- b) Calculer I_n .

7) Pour tout réel x et tout entier naturel n , on pose :

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

- a) Calculer $J_0(x)$ et $J_1(x)$.
- b) Établir une relation de récurrence entre $J_{n+1}(x)$ et $J_n(x)$.
- c) Calculer $J_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x)$.

8) Pour deux entiers positifs m et n , on pose :

$$J_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^m t dt$$

- a) Trouver une relation entre $J_{m+2,n}$ et $J_{m,n}$.
- b) Trouver une relation entre $J_{m,n+2}$ et $J_{m,n}$.
- c) Trouver la valeur de $J_{m,n}$ pour tous m et n .

9) Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- a) Donner le comportement de la suite dont le terme général est :

$$n \int_0^1 x^n f(x) dx - n \int_0^1 x^n f(1) dx$$

- b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(t) dt = f(1)$.

10) a) Donner une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} et dont la dérivée en tout réel x soit égale à $\frac{1}{2+\sin x}$.

- b) Pour quel réel α la fonction qui envoie tout réel x sur $\frac{2}{2+\sin 2x} - \alpha$ possède-t-elle une primitive π -périodique?

11) Soit f la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0; 1]$ (c'est-à-dire la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Q} \cap [0; 1]$ et 0 ailleurs). Montrer que pour toute subdivision σ de $[0; 1]$, on a

$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = 1$. En déduire que f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0; 1]$.

12) On considère la fonction $f : x \rightarrow \sin(\frac{1}{x})$ et $f(0) = 0$ sur $[-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}]$.

a) Vérifier que f n'a pas de limite à droite ni à gauche en 0.

b) Montrer que f est intégrable sur $[-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}]$.

c) Que vaut $\int_{-\frac{1}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} f(t) dt$?

13) Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} . Montrer que les applications $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont aussi intégrables sur $[a; b]$.

14) On dit qu'une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est réglée si, pour tout réel x , f admet en x une limite à droite et une limite à gauche.

a) Montrer que les fonctions continues, les fonctions en escalier sur tout intervalle de la forme $[a; b]$ et les fonctions croissantes sur \mathbb{R} sont réglées.

b) On considère une fonction réglée f . Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $\epsilon > 0$ un nombre réel. Appelons E_ϵ l'ensemble des éléments x de $[a; b]$ pour lesquels il existe une subdivision σ_x de $[a; x]$ telle que $S(f, \sigma_x) - s(f, \sigma_x) \leq \epsilon(x - a)$. Montrer que $E_\epsilon = [a; b]$ et en déduire que f est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle fermé et borné de \mathbb{R} .