Université de Poitiers MATH 2L03, Analyse élémentaire - Corrigé de l'examen du Mai 2010

A) Ouvrir votre cours (chapitre 7)

B. a) On pose $h = x - \frac{\pi}{2}$. On a $(\pi - 2x)\tan x = -2h \tan\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2h}{\tan h} = 2\cos h \frac{h}{\sin h}$.
Or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{\sin h} = 1$, d'où $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x = 2$.

b) On a $\frac{1-\cos x}{\sqrt{9+x}-3} = \frac{1-\cos x}{x} \times \left(\sqrt{9+x}+3\right) = \frac{1-\cos x}{x^2} \times \left(x(\sqrt{9+x}+3)\right)$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{9+x}-3} = 0$.

C. 1) La fonction f est définie sur $]-1, +\infty[$ et est continue sur $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
On a $\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1$. Cette limite est égale à $f(0)$, donc f est continue en 0.
2) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à n'importe quel ordre n en tout point $a > -1$. En particulier pour $n = 2$ et $a = 0$.
Il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0 tel que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Calcul :

$$\varphi(x) = \sin x - \ln(x+1) \qquad \varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1} \qquad \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(x) = -\sin x + \frac{1}{(x+1)^2} \qquad \varphi''(0) = 1$$

D'où $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$. On en déduit que

$$\frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x) \to \frac{1}{2} \text{ quand } x \to 0.$$

3) On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{\varphi(x)}{x^2} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \to \frac{1}{2} \text{ quand } x \to 0.$$

Ceci montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

C. Soit $a > 0$
1) $f(\sqrt{a}) = f((\sqrt{a})^2) = f(a)$.
2) Par récurrence. La propriété est vraie pour $n = 1$, d'après 1). On suppose qu'elle est vraie pour un entier $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} f\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) &= f\left(\sqrt{a^{\frac{1}{2^n}}}\right) = f\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right) \text{ , d'après 1)} \\ &= f(a) \text{ , d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.
3) On a $a^{\frac{1}{2^n}} = \exp\left(\frac{\ln a}{2^n}\right)$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln a}{2^n} = 0$ et la fonction e^x est continue en 0, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{2^n}} = 1$.
La suite $\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)$ converge vers 1 et la fonction f est continue en 1 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$.

Or la suite $\left(f\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)\right)$ est constante égale à $f(a)$, d'après 2). On en déduit que $f(a) = f(1)$ pour tout $a > 0$.
Comme f est continue en 0 on a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ d'où $f(0) = f(1)$.

4) f est paire d'où $f(a) = f(1)$ pour tout $a \leq 0$ et f est constante sur $\mathbb{R}$.

E. 1. a) f est définie sur $[0,1]$ si $-x^2 + x + 2 > 0$.
L'équation $-x^2 + x + 2 = 0$ admet deux racines réelles $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$, l'étude du signe de ce trinôme montre que $-x^2 + x + 2 > 0$ pour tout $x \in]-1, 2[$ et donc en particulier pour tout $x \in [0,1]$.
On en déduit que f est définie , continue et dérivable sur $[0,1]$ comme composition de fonctions dérivables.

b) On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.

Existence : on a $g(0) = \ln 2 > 0$ et $g(1) = \ln 2 - 1 < 0$ et g est continue sur $[0,1]$, donc il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Unicité : on a

$$g'(x) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+2} - 1 = \frac{x^2-3x-1}{-x^2+x+2} = \frac{1}{-x^2+x+2}\left(x - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$$

On a $[0,1] \subset \left]\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right[$ donc $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et g est strictement décroissante sur $[0,1]$. Ceci entraine que α est unique.

c) On a $f'(x) = \dfrac{-2x+1}{-x^2+x+1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2}$.
$\forall x \in [0,1]$, $1 \leq x+1 \leq 2$ et $-2 \leq x-2 \leq -1$ donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{1}{x-2} \leq -\frac{1}{2}$$

Soit $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{-1}{2} \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2}$.

d) L'étude des variations de f sur $[0,1]$ donne

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\ln 2$ $\nearrow$	$\ln\left(\frac{9}{4}\right)$	$\searrow$ $\ln 2$

Comme $0 < \ln 2 < 1$ et $0 < \ln \frac{9}{4} < 1$, on en déduit donc que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

2. a) Récurrence : $u_0 \in [0,1]$.
Supposons $u_n \in [0,1]$, comme $[0,1]$ est stable par f, $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.

b) Remarquons d'abord que $\alpha, u_n \in [0,1]$ et que $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$.
f est continue et dérivable sur $[\alpha, u_n]$ (ou $[u_n, \alpha]$) , d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f(u_n) - f(\alpha) = (u_n - \alpha) f'(c)$$

Comme $|f'(c)| \leq \dfrac{1}{2}$ on a l'inégalité demandée.

c) On en déduit directement par récurrence : $\forall n \geq 0, |\, u_n - \alpha \,| \leq \dfrac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$

d) Comme $\dfrac{1}{2^n}$ tend vers 0, $u_n - \alpha$ également. Ainsi (u_n) converge vers α.

e) On a $|\, u_n - \alpha \,| \leq \dfrac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$. Pour que $|\, u_n - \alpha \,| \leq 10^{-9}$ il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$ ce qui est équivalent à $2^n \geq 10^9$ et donc $n \geq 9\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$.