Université de Poitiers
Mathématiques **2009-2010**
MATH 2L03, Analyse élémentaire

Examen du 21 Mai 2010

Durée : 3 heures

Calculatrices, téléphones portables et documents sont interdits

Les quatre parties sont indépendantes.

Barème indicatif : A : 4 points, B : 2 points, C : 4 points, D : 4 points, E : 6 points

Qualité de rédaction et rigueur de raisonnement seront des éléments majeurs d'appréciation des copies. Les énoncés des résultats de cours, utilisés au cours de l'épreuve, doivent être rappelés.

A. Questions de cours.

1.
a) Enoncer le théorème des accroissements finis. (*Appelé aussi égalité des accroissements finis*)
b) Démontrer ce dernier théorème. (Le théorème de Rolle étant admis)

2. Que pensez-vous de l'énoncé suivant ? Justifier votre réponse.
" *Si une fontion f est continue en* 0*, et admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en* 0 *alors f est dérivable en* 0."

B. Caluler les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x \quad , \quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{9+x}-3}$$

C. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\ln(1+x)} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $]-1, +\infty[$?
2. On pose pour $x > -1$, $\varphi(x) = \sin x - \ln(1+x)$.
   Vérifier que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
   Indication : on pourra appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 à φ.
3. En déduire que f est dérivable en 0, et préciser la valeur de $f'(0)$.

D. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ f(x^2) = f(x)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f(\sqrt{a}) = f(a)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(a^{\frac{1}{2^n}}) = f(a)$.
3. Déterminer la limite de la suite $\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)$. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Tourner la page svp

E. Etude d'une suite récurrente.

1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$.

   (a) Vérifier que f est définie, continue et dérivable sur $[0,1]$.

   (b) Montrer, soigneusement, qu'il existe un unique nombre réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

   (c) Montrer que $\forall x \in [0,1],\ f'(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2}$.

   En déduire que $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

   (d) Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f c.à.d $f([0,1]) \subset [0,1]$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

   (a) Montrer que $u_n \in [0,1]$ pour tout entier n.

   (b) Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$| u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | u_n - \alpha |$$

   (c) En déduire que : $| u_n - \alpha | \leq \dfrac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$ pour tout n.

   (d) Conclusion.

   (e) (1 point hors barème) Quelle valeur choisir pour N pour que u_N soit une valeur approchée à 10^{-9} près de α ? *On ne demande pas de calculer N.*

——————— *Fin du sujet* ———————

Un corrigé sera distribué à la fin de l'épreuve.