2008-2009

Université de Poitiers
Faculté des Sciences
Année 1 de la Licence de Sciences et Technologies

EXAMEN DE MATHEMATIQUES
du **mardi 30 juin 2009.**
UE 2L05. Analyse élémlentaire.

Ni les documents, ni les calculatrices, ne sont autorisés. Qualité de rédaction et rigueur de raisonnement seront des éléments majeurs d'appréciation des copies. Les énoncés des résultats de cours, utilisés au cours de l'épreuve, doivent être rappelés.

Exo 1 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x)$ la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = e^{nx} + nx.$$

(1) Montrer que pour toute paire d'entiers $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n < m$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_n(x) < f_m(x)$$

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution et que celle-ci est supérieure à 0. On note x_n cette solution.

(3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente. On note l sa limite.

(4) On suppose $l > 0$. Quelle est la limite de la suite $n \mapsto nx_n$?

(5) Montrer que si $l > 0$, la suite $n \mapsto e^{nx_n} + nx_n$ tend vers $+\infty$, et en conclure que $l = 0$.

Exo 2

(1) Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \mathrm{tg}(x^2)$. Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x^2)}{\mathrm{tg}(x)}.$$

(2) Calculer

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x^2+1)}.$$

(3) Calculer

$$\lim_{x\to \pi_-} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}.$$

(4) Calculer la limite de la suite

$$\frac{\ln(n^3+1)}{\ln(n)}.$$

Exo 3 Soit $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$.

(1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

(2) Supposons que l'équation $f(x) = x$ admette deux solutions distinctes a et b. En appliquant l'égalité des accroissements finis à l'intervalle $[a, b]$, montrer que l'équation $f'(c) = 1$ admet une solution. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution, que l'on note par c.

(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité $|f(x) - c| \leq \frac{1}{2}|x - c|$.

On considère la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur n que $|u_n - c| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - c|$. Conclure sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exo 4 On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

(1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante et de limite nulle (on pourra s'aider des variations de la fonction $f(x) = x - x^2$).

(2) Soit $T_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$. Montrer la relation $T_n = u_0 - u_{n+1}$ (on pourra remarquer que $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$). En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.