Université de Poitiers
UFR Sciences Fondamentales et Appliquées

Licence 1 SPIC

Analyse Elémentaire

Larbi Belkhchicha

Poitiers, le 19 janvier 2011

Table des matières

CHAPITRE 1

FONDEMENTS

≪ Du vrai suit le vrai... Du faux suit le faux... Du faux suit le vrai...
Mais du vrai, le faux ne peut s'ensuivre ≫
Diogène Laërce

1.1 Logique des propositions

Définition 1.1. — *Une proposition est un énoncé qui est, sans ambiguïté, soit vrai, soit faux , dans le cadre d'une théorie.*

1. *" un chien est un mammifère "* est une proposition vraie en zoologie.
2. *" 1+1=1 "* est une proposition vraie en algèbre de Boole mais fausse en algèbre classique.
3. *"Je pense que demain il fera beau "* n'est pas une proposition (au sens de notre définition).

Remarque 1.2. — *D'après cette définition il n'existe que deux états : vrai ou faux .*

Table de vérité

A toute proposition P on associe un élément de l'ensemble $\{V, F\}$. Si P est vraie on lui associe la valeur V, si P est fausse on lui associe F. Souvent on représente ces résultats par un tableau appelé table de vérité.

Négation d'une proposition

Définition 1.3. — *Une proposition ≪ non (P) ≫ est une proposition qui est vraie lorsque P est fausse et qui est fausse lorsque P est vraie .*

On retiendra en particulier les deux principe suivants :

► **Principe de non contradiction :** P et $non(P)$ ne peuvent être simultanément vraies ,

► **Principe du tiers exclu :** l'une des deux propositions P et $non(P)$ est vraie .

Equivalence logique

Définition 1.4. — *Deux propositions sont dites logiquement équivalentes si elles ont la même valeur de vérité. On écrira $P \iff Q$*

Le sens, le contenu et la complexité de ces propositions ne sont pas concernés par l'équivalence logique.

Connecteurs logiques usuels

► **Connecteur de disjonction inclusive ≪ OU ≫**

Définition 1.5. — *La proposition ≪ P ou Q ≫ est la proposition qui est fausse uniquement lorsque P et Q sont fausses simultanément.*

Attention ! Le ≪ ou ≫ mathématiques est toujours inclusif !

► **Connecteur de conjonction ≪ ET ≫**

Définition 1.6. — *La proposition ≪ P et Q ≫ est la proposition qui est vraie uniquement lorsque P et Q sont vraies simultanément.*

► **Implication ≪ $\Longrightarrow$ ≫**

Définition 1.7. — *Si P et Q sont deux propositions.*
L'implication $(P \Longrightarrow Q)$ est la proposition $(non(P)$ ou $Q)$.
L'implication $P \Longrightarrow Q$ est fausse seulement si P est une proposition vraie et Q est fausse.

La table de vérité de l'implication était connue dès la Grèce antique, notamment par les stoïciens : ≪ *Du vrai suit le vrai... Du faux suit le faux... Du faux suit le vrai... Mais du vrai, le faux ne peut s'ensuivre* ≫ Diogène Laërce, Vies et doctrines des philosophes, livre VII, 83

A la proposition $P \Longrightarrow Q$ on peut associer les deux propositions suivantes :

• L'implication $Q \Longrightarrow P$ qui est la *réciproque* de $P \Longrightarrow Q$.
• L'implication $non\ (Q) \Longrightarrow non(P)$ qui est la *contraposée* de $P \Longrightarrow Q$.

Proposition 1.8. — *Les deux propositions $(P \Longrightarrow Q)$ et $(non(Q) \Longrightarrow non(P))$ sont logiquement équivalents.*

Remarques

1. Il n'y a aucun lien entre une implication et sa réciproque.
2. Une implication est une proposition qui peut être vraie ou fausse. A ne pas confondre avec un raisonnement , qui lui , peut être correct ou incorrect.
3. Attention : affirmer que " $(P \Longrightarrow Q)$ est vraie" ne signifie absolument pas que P est vraie ou que Q est vraie, mais simplement que soit P et Q sont simultanément vraies, soit P est faux (et on ne peut rien dire sur Q).
4. On dit que P est une <u>condition suffisante</u> pour avoir Q ("dès qu'on a P, on a Q"), et que Q est une <u>condition nécessaire</u> pour avoir P (mais pas forcément suffisante) ("si on veut avoir P, il faut forcément supposer Q vraie, mais cela ne suffit pas en général").

Proposition 1.9. — *Deux propositions P et Q sont équivalentes ($P \Longleftrightarrow Q$) si et seulement si, $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$*

Si P et Q sont équivalentes on dit que P est <u>une condition nécessaire est suffisante</u> pour avoir Q. On dit aussi "P est vraie si et seulement si, Q est vraie". On dit aussi que "pour que Q soit vraie, il faut et il suffit que P soit vraie".

<u>**Table de vérité**</u>

P	Q	P ou Q	P et Q	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F

Exemples

1. L'implication suivante est vraie

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ (10^n + 1 \text{ est divisible par } 9) \Longrightarrow (10^{n+1} + 1 \text{ est divisible par } 9)$$

En effet, supposons que $10^n + 1$ est divisible par 9 . Il existe un entier k tel que $10^n + 1 = 9k$.
Nous avons donc

$$10^{n+1} + 1 = 10.10^n + 1 = 10(9k - 1) + 1 = 9(10k - 1)$$

L'hypothèse de départ fait que $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9.

L'implication est donc *vraie* mais les deux propositions sont fausses ! Aucun nombre de la forme $10^n + 1$ n'est divisible par 9.
On a ici une illustration de (Faux $\Longrightarrow$ Faux)

2. L'implication : $(2 = 3 \text{ et } 2 = 1) \Longrightarrow 4 = 4$ est vraie
On a ici une illustration de (Faux $\Longrightarrow$ Vrai)

Morale de l'histoire : *si P est fausse, alors l'implication $(P \Longrightarrow Q)$ est toujours vraie (indépendemment de la valeur de Q) ! Ceci a une conséquence importante : dans un raisonnement, si l'on veut prouver un résultat et si l'on part d'une hypothèse fausse, alors, même avec des raisonnements justes, la preuve n'est pas valable et aucun crédit ne peut être apporté au résulat obtenu.*

Propriétés remarquables des connecteurs logiques

Commutativité : P ou $Q \iff Q$ ou P , P et $Q \iff Q$ et P

Associativité : P ou $(Q$ ou $H) \iff (P$ ou $Q)$ ou H , P et $(Q$ et $H) \iff (P$ et $Q)$ et H

Distributivité : P et $(Q$ ou $H) \iff (P$ et $Q)$ ou $(P$ et $H)$, P ou $(Q$ et $H) \iff (P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $H)$

Négation : (lois de Morgan)

non(P ou Q) $\iff non(P)$ et $non(Q)$
non(P et Q) $\iff non(P)$ ou $non(Q)$

Négation d'une implication : $non(P \Longrightarrow Q) \iff P$ et $non(Q)$.

Preuve. $non(P \Longrightarrow Q) \iff non(non(P)$ ou $Q) \iff non(non(P))$ et $non(Q) \iff P$ et $non(Q)$.

1.2 Quantificateurs

Quanificateur existentiel

$\exists x \in E$, $P(x)$ signifie qu'il y a au moins un $x \in E$ pour lequel la proposition $P(x)$ est vraie

Exemple. $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -1$.

Quantificateur universel

$\forall x \in E$, $P(x)$ signifie que la proposition $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$

La négation du quantificateur existentiel est le quantificateur universel :

$$non(\ \forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, non(P(x))$$

La négation du quantificateur universel est le quantificateur existentiel :

$$non(\ \exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, non(P(x))$$

Unicité : $\exists! x \in E$, $P(x)$ signifie qu'il y a un *unique* x pour lequel la proposition $P(x)$ est vraie

Règles à respecter

- On peut permuter des quatificateurs de même natures
- On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes
- On ne peut pas distribuer $\forall$ sur ≪ ou ≫ et $\exists$ sur ≪ et ≫
- Il faut faire attention à l'emplacement des parenthèses

1.3 Eléments de la théorie des ensembles

La notion d'ensemble fait partie des notion fondamentales en mathématiques. Il est très difficile d'en donner une définition précise. A la notion d'ensemble se rattache la notion d'élément. Dans ce chapitre on se contentera de donner quelques propriétés essentielles des ensembles.

1.3.1 Définitions

Ensemble vide : On appelle ensemble vide l'unique ensemble qui ne possède aucun élément. On le note généralement $\emptyset$.
Eléments : Si x est un élément de E on note $x \in E$ (qui se lit x appartient à E)

Egalité et inclusion

Soient A et B deux ensembles.
Inclusion : A est inclus dans B si tout élément de A est élément de B , on note $A \subset B$
Egalité : $A = B$ si et seulement si ils ont les mêmes éléments. $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$

1.3.2 Opération sur les ensembles

Intersection de deux ensembles

Définition 1.10. — *Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E , on appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles A et B, ou encore :*

$$A \cap B = \{x \in E /\ x \in A \ \ et \ \ x \in B\}$$

Caractérisation : $x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \ \ et \ \ x \in B.$

Extention aux familles

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I \ ,\ x \in A_i$$

Propriétés

1. L'intersection est commutative : $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap E = A$
3. L'intersection est associative. Si on a 3 ensembles A, B et C, on peut faire les intersections dans n'importe quel ordre : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Cas particulier : Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont disjoints.

Réunion de deux ensembles

Définition 1.11. — *On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles A et B.*

$$A \cup B = \{x \in E /\ x \in A \ \ ou \ \ x \in B\}$$

Caractérisation : $x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \ \ ou \ \ x \in B.$

Extention aux familles

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I \quad \text{tel que} \ \ x \in A_i$$

Propriétés

1. La réunion est commutative : $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup \emptyset = A$, $A \cup E = E$
3. La réunion est associative : Si on a 3 ensembles A, B et C, on peut faire les réunions dans n'importe quel ordre : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Relation entre intersection et réunion : distributivité
L'intersection et la réunion sont distributives l'une par rapport à l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Complémentaire d'un ensemble

Définition 1.12. — *On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A . On note le plus souvent le complémentaire de A par $C_E A$ ou s'il n y a pas d'ambiguïté ${}^cA$*

$${}^cA = \{x \in E / x \notin A\}$$

Propriétés

1. $A \cap {}^cA = \emptyset$ et $A \cup {}^cA = E$
2. ${}^c\emptyset = E$ et ${}^cE = \emptyset$
3. ${}^c({}^cA) = A$

Enfin, notons qu'il existe des relations entre le passage au complémentaire, la réunion, et l'intersection, connues sous le nom de **lois de Morgan** :

1. ${}^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB$
2. ${}^c(A \cup B) = {}^cA \cap {}^cB$

Partition d'un ensemble

On appelle partition d'un ensemble E un ensemble de parties de E , que nous noterons $(A_i)_{i\in I}$, vérifiant les trois propriétés

1. $\forall i \in I,\, A_i \neq \emptyset$
2. $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
3. $\forall (i,j) \in I^2,\, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Proposition 1.13. — *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E , alors : $\forall x \in E, \exists ! i \in I$ tel que $x \in A_i$*

Produit cartésien

Définition 1.14. — *Si E et F sont deux ensembles, le produit cartésien de E par F est l'ensemble*

$$E \times F = \{(x,y), x \in E, y \in F\}$$

Ecrire $X \in E \times F \Longleftrightarrow \exists x \in E, \exists y \in F \,/\, X = (x,y) \iff \exists (x,y) \in E \times F, X = (x,y)$
$E^2 = E \times E$ de manière générale $E^n = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$

1.4 Applications

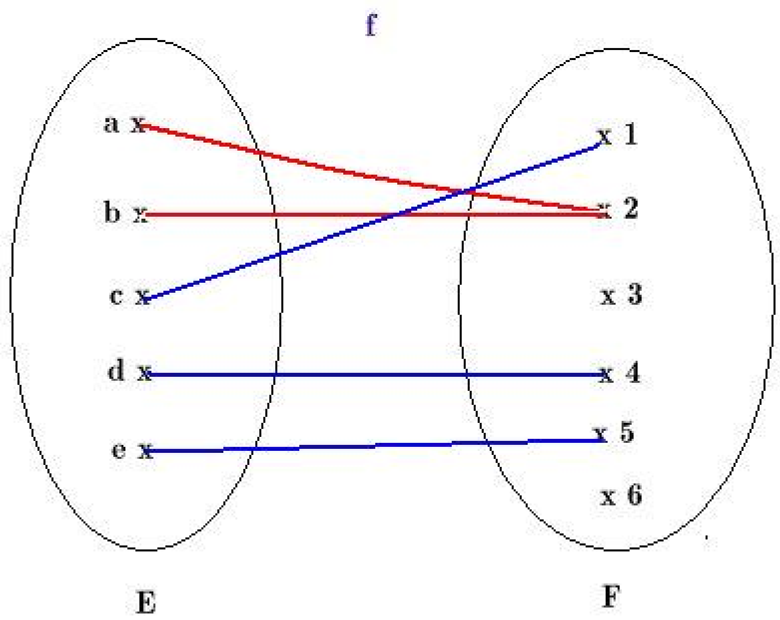
Une application est un objet mathématiques qui à tout élément d'un ensemble de départ E (par exemple, les élèves d'une classe) associe un élément d'un ensemble d'arrivée F (par exemple, sa taille). La définition mathématique précise d'une application est :

Définition 1.15. — *Soit E et F deux ensembles. On appelle application de E dans F la donnée d'une partie G de $E \times F$ telle que, pour tout x de E, il existe un unique y de F tel que (x,y) soit élément de G. On dit que y est l'image de x par f, et on le note $f(x)$.*
$G = \{(x, f(x)); x \in E\}$ s'appelle le graphe de f.

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sera considérée comme une application du domaine de définition D de f dans $\mathbb{R}$.

Exemples
1. Soit E un ensemble et A une partie de E . On définit une application $\chi_A : E \to \{0,1\}$ par
$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$.
χ_A est appelée fonction caractéristique de A.

2. Soient $E = \{a,b,c,d,e\}$, $F = \{1,2,3,4,5,6\}$ et f l'application de E dans F définie par:
$f(a) = f(b) = 2, f(c) = 1, f(d) = 4, f(e) = 5$.



On remarque que les éléments 3 et 6 de F n'ont pas d'antécédents.

3. L'application $Id : E \to E$ qui a tout $x \in E$ associe $Id(x) = x$ est appelée l'application identique ou identité.

Egalité
Deux applications f et g sont égales si et seulemnt si, elles ont le même ensemble de départ E , le même ensemble d'arrivée F et qui vérifient : $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Composition d'application

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. L'application composée, notée $g \circ f$ est l'application définie de E dans G par : $\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g\,[f(x)]$

Remarques importantes
• L'application $g \circ f$ peut être définie sans que $f \circ g$ ne le soit.
• Si les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies, on a en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Restriction et prolongement

Soient $f : E \to F$ et $A \subset E$. La restriction de f à A est l'application $f_{|A} : A \to F$ définie par

$$\forall x \in A,\quad f_{|A}(x) = f(x)$$

Soient $f : E \to F$ et U tel que $E \subset U$. Une application $g : U \to F$ est un prolongement de f à U si $g_{|E} = f$.

Images directes - images réciproques

1. Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle image de A par f et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

Caractérisation : soit $y \in F$, on a : $y \in f(A) \iff \exists x \in A\ /\ y = f(x)$.

2. Soit B une partie de F. On appelle image réciproque (ou inverse) de B par f et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

Injection, surjection, bijection

• **Injection** Une application $f : E \to F$ est dite injective ou est une injection si pour tout $y \in F$, il existe au plus un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On dit encore dans ce cas que tout élément y de F admet au plus un antécédent x (par f).
De manière équivalente, f est dite injective si pour tous x et y dans E,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

• **Surjection** L'application f est dite surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F possède au moins un antécédent dans l'ensemble de départ E, ie

$$\forall y \in F, \exists x \in E \ \text{ tel que } \ y = f(x)$$

• **Bijection** Une application $f : E \to F$ est bijective si elle est injective et surjective. Dans ce cas

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \ \text{ tel que } \ y = f(x)$$

Autrement tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un unique antécédent.

Théorème 1.16. — *Soit $f : E \to F$ une application. Alors f est bijective s'il existe une application $g : F \to E$ telle que*

$$g \circ f = Id_E \quad \textit{et} \quad f \circ g = Id_F$$

Dans ce cas l'application g est unique, on l'appelle application réciproque de f et on la note f^{-1}.

Propriétés immédiates

1. La composée de deux applications injectives est injective.
2. La composée de deux applications surjectives est surjective.
3. La composée de deux applications bijectives est bijective.

1.5 Raisonnements

Raisonnement par récurrence

Il existe toute une variété de raisonnements par récurrence, voici le plus simple :

Principe

$$\textit{Si} \quad \begin{cases} P(n_0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Longrightarrow P(n+1) \ \text{ pour tout } n \geq n_0 \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad P(n) \text{ est vraie pour tout } n \geq n_0$$

Le raisonnement par récurrence comporte trois étapes :

1. Intialisation : montrer que la propriété est vraie pour un entier n_0.
2. Hérédité : montrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi.
3. Conclusion : on conclue par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Il faut se rappeler que pour arriver en haut de l'escalier :

1. il faut mettre le pied sur la première marche ,
2. ensuite il faut être capable de passer d'une marche à une autre

En particulier, sans initialisation on raisonne dans le vide.

Exemple

Nous allons montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

On a $1 + 2 = 3 = \dfrac{2.3}{2}$. La propriété est vraie pour $n = 2$

Supposons que la propriété est vraie pour un entier $n \geq 2$, c.à.d

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Alors

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Raisonnement par l'absurde. Soit une propriété P dont on désire montrer qu'elle est fausse. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que cette propriété est vraie et à aboutir à une contradiction.

Ce raisennement est basé sur :

1. *Principe du tiers exclus,*
2. *Une proposition vraie ne peut impliquer une proposition fausse*

Exemple : montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

On suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel. Il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ (c.à.d la fraction est irréductible).

En élevant au carré on obtient $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ ou encore $p^2 = 2q^2$ L'entier p^2 est pair on en déduit que p est pair. Il existe donc un entier k tel que $p = 2k$; d'où $q^2 = 2k^2$. Donc q est aussi pair.

Conclusion les deux entiers p et q sont pairs , ceci contredit l'hypothèse faite au départ " p et q premiers entre eux ". Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Raisonnement par contraposée. Soient deux propriétés P et Q. On souhaite montrer que P implique Q. Le raisonnement par contraposée consiste à prouver que non Q implique non P.

Exemple : montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est sirictement croissante alors elle est injective.

Soient x et $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq y$. Nous avons deux cas :

1. Si $x < y$ alors, comme f est strictement croissante, on a $f(x) < f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$.

2. Si $x > y$ alors, comme f est strictement croissante, on a $f(x) > f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$.

On a montré dans les deux cas que $f(x) \neq f(y)$, ce qui montre que f est injective.

Contre exemple. Ceci consiste à trouver un seul exemple où la propriété n'est pas vérifiée pour conclure que la propriété est fausse.

Exemple : on sait que si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I. Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On a f est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 ...

Déduction Ce raissonement est basé sur le shéma suivant :

Si la proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie et si on sait que la proposition P est vraie , alors on peut affirmer que Q est nécessairement vraie.

C'est le raisonnement de base que vous reproduirez le plus souvent.

Nous verrons d'autres raisonnements : raisonnement direct, raisonnement par analyse-synthèse .....

1.6 Exercices

Exercice 1. Dire si les propriétés suivantes sont Vraies ou Fausses :

A.

(a) $x \leq 3$ implique $x^2 \leq 9$

(b) $0 \leq x \leq 3$ implique $x^2 \leq 9$

(c) $0 \leq x \leq 3$ équivaut à $x^2 \leq 9$

(d) $x > 3$ implique $x^2 > 3$

(e) $x > 3$ équivaut à $x^2 > 9$ et $x > 0$

(f) $x^2 < 9$ implique $x \leq 3$

B.

(a) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ x \leq y$

(b) $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ \ y \leq x$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists n \in \mathbb{N}, x \leq 2^n$

(d) $x = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \mid x \mid < \varepsilon$

(e) $x \leq y \Longrightarrow x^2 \leq y^2$

(f) $x \leq y \Longrightarrow x^3 \leq y^3$

Exercice 2. Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. Ecrire en utilisant les symboles mathématiques
($\in , \notin , \subset , \cap , \cup , \Longrightarrow , \dots$), et justifier les assertions suivantes :
a) si A est inclus dans B , alors le complémentaire de B est inclus dans le complémentaire de A.
b) si A et B sont disjoints , alors tout élément de E appartient à C_A ou à C_B.

Exercice 3. Donner la négation des assertions suivantes :

1. Il existe un entier positif n tel que $n + 1$ soit négatif.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle I.
3. $-2 < x \leq 1$
4. $\exists\, k > 0,\ \forall a \in I\ , \forall b \in I \quad |f(a) - f(b)| \leq k|a - b|$
5. $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon.$
6. $\forall x \in I,\ \forall y \in I, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$

Exercice 4. Démontrer les propositions suivantes :
(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n!\ \geq\ 2^{n-1}$
(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

Exercice 5. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant qui veut montrer qu'étant donnée une boite de crayons de couleurs, ils sont tous de la même couleur. On note n le nombre de crayons. Le résultat est vrai pour $n = 1$. On suppose qu'il l'est pour n crayons. Soit une boite de $n + 1$ crayons notés $c_1,\ c_2,\ ..., c_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, les n crayons $c_1,\ c_2,\ ..., c_n$ sont tous de la même couleur et les n crayons $c_2,\ ..., c_{n+1}$ sont tous de la même couleur. Donc, les crayons $c_1,\ c_2,\ ..., c_{n+1}$ sont de la même couleur. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6. Les propositions suivantes (P) et (Q) sont elles équivalentes ?

1) (P) : $[\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0$ et $g(x) = 0]$, (Q) : $[(\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0]$
2) (P) : $[\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0]$, (Q) : $[(\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0]$

Exercice 7. On rappelle que si $f\ :\ E \rightarrow F$ est une application et A est une partie de E, on note $f(A)$ l'ensemble : $f(A) = \{f(x)\ ,\ x \in A\}$.

1. Montrer que si A et B sont deux parties de E, on a : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. Donner un exemple d'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et de deux parties de $\mathbb{R}$ vérifiant $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Exercice 8. a) Soit y un réel donné. On considère l'équation :

$$y = \frac{x}{1+ \mid x \mid}$$

a) Montrer que si $\mid y \mid \geq 1$, alors cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si $\mid y \mid < 1$, alors cette équation admet une solution unique que l'on déterminera.
c) On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+ \mid x \mid}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- L'application f est-elle une surjective ?
- Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par f ?
- Vérifier que l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$, définie par : $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

CHAPITRE 2

NOMBRES RÉELS

2.1 L'ensemble des réels

L'ensemble des rationnels est insuffisant, par exemple on ne peut pas mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. D'après le théorème de *Pythagore* , celà revient à se demander s'il existe un rationnel c tel que $c^2 = 2$. La réponse à cette question est négative.
Vouloir remédier à cette lacune de $\mathbb{Q}$ à conduit à la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$.
Nous allons rencontrer d'autres nombres réels remarquables :
1. e la base du logarithme néperien.
2. π c'est le périmètre d'un cercle de diamètre 1.
3. Le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Dans l'antiquité il était considéré comme le rapport idéal entre la longueur du grand côté et celle du petit côté d'un rectangle.
4. La constante d'euler noté γ , c'est la limite de la suite

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

On ne sait pas si ce nombre est rationnel ou non.

Structure algébrique

L'ensemble des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif qui contient $\mathbb{Q}$, les opérations $+$ et $\times$ prolongent celles de $\mathbb{Q}$

Relation d'ordre

• L'ensemble des réels $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corp totalement ordonné :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$
• La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication par un nombre positif, c'est-à-dire :

1. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$
2. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a \leq b$ et $c \geq 0 \Longrightarrow ac \leq bc$

2.2 Borne supérieure et borne inférieure

Définition 2.1. — *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{R}$, on dit que :*

1. *m est un majorant de A si : $\forall x \in A \;,\; x \leq m$*
2. *m est le plus grand élément de A si : $m \in A$ et $\forall x \in A \;,\; x \leq m$*
3. *m est un minorant de A si : $\forall x \in A \;,\; x \geq m$.*
4. *m est le plus petit élément de A si : $m \in A$ et $\forall x \in A \;,\; x \geq m$.*

Définition 2.2. — *Une partie à la fois majorée et minorée est dite bornée.*

Une partie de $\mathbb{R}$ majorée n'admet pas forcément un plus grand élément.
Une partie de $\mathbb{R}$ minorée n'admet pas forcément un plus petit élément.
Exemple :
1. $A = [0, 1[$ est majorée par 1, mais n'admet pas de plus grand élément
2. $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est minorée par 0, mais n'admet pas de plus petit élément.

Remarque 2.3. — *Si M est un majorant de A alors tout nombre réel $M' \geq M$ est aussi un majorant de A.*
Si m est un minorant de A alors tout nombre réel $m' \leq m$ est aussi un minorant de A.

Cas particulier : si A est une partie de $\mathbb{N}$ on a le résultat suivant :

Théorème 2.4. — *- Toute partie de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
- Toute partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Définition 2.5. — *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
1. On appelle borne supérieure de A, si elle existe, le plus petit majorant de A. Ce nombre est noté $\sup A$
2. On appelle borne inférieure de A, si elle existe, le plus grand minorant de A. Ce nombre sera noté $\inf A$.

Remarque : $\sup A$ et $\inf A$ n'appartiennent pas nécessairement à A.

Axiome 2.6. — *Toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, admet une borne supérieure.*

Corollaire 2.7. — *Toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et minorée, admet une borne inférieure.*

2.2.1 Caractérisation de la borne supérieure

Théorème 2.8. — *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$, alors sont équivalents :*
(i) $M = \sup A$
(ii) $\forall x \in A \ , \ x \leq M$ *et pour tout* $\varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ / \ M - \varepsilon < x \leq M$
(iii) $\forall x \in A \ , \ x \leq M$ *et il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que* $\lim x_n = M$

Preuve. i) $\Longrightarrow$ ii) M est un majorant de A.
Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : pour tout $x \in A$ on ait $x \leq M - \varepsilon$. Mais alors $M - \varepsilon$ est un majorant de A strictement inférieur à M , ce qui est impossible.

ii) $\Longrightarrow$ i) M est un majorant de A . Supposons que M n'est pas la borne supérieure de A. Soit $N = \sup A$. On a $N < M$.
Pronons $\varepsilon = M - N > 0$. Il existe $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$. Ceci donne $M - (M - N) = N < x$ et N n'est plus un majorant de A. Absurde , d'où la conclusion souhaitée. ■

Résultat analogue pour la borne inférieure

Théorème 2.9. — ***Caractérisation de la borne inférieure***
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $m \in \mathbb{R}$, alors sont équivalents :
(i) $m = \inf A$
(ii) $\forall x \in A\ ,\ x \geq m$ *et pour tout* $\varepsilon > 0\ \exists x \in A\ /\ m \leq x < m + \varepsilon$
(iii) $\forall x \in A\ ,\ x \geq m$ *et il existe une suite* (x_n) *d'éléments de* A *telle que* $\lim x_n = m$

$\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure.
Soit $A = \{r \in \mathbb{Q}\ /\ r^2 < 2\}$ alors A est une partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

2.3 Intervalles

Définition 2.10. — *On appelle segment de $\mathbb{R}$ l'ensemble* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\ /\ a \leq x \leq b\}$.
On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x, y \in I,\ [x, y] \subset I$

Intervalles particuliers
$\emptyset$
$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
$[a, a] = \{a\}$

Intervalles bornés
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}\ /\ a < x < b\}$.
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\ /\ a \leq x \leq b\}$.
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}\ /\ a \leq x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}\ /\ a < x \leq b\}$

Intervalles non bornés
$[a\ ,\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x\}$
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$.
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/a < x\}$.
$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$

Notations
$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$
$\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$

2.4 Valeur absolue d'un réel

Définition 2.11. — *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel positif :* $|x| = \max\{-x, x\}$.

Proposition 2.12. — *Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :*

1. $|x.y| = |x|.|y|$
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*
3. $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$

Valeur absolue et intervalles

• $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r \iff x \in [-r, r]$
• $|x - a| \leq r \iff -r \leq x - a \leq r \iff x \in [a - r, a + r]$
Si les inégalités sont strictes les intervalles sont ouverts.

2.5 Partie entière d'un réel

Propriété d'Archimède

Théorème 2.13. — *$\mathbb{R}$ est archimédien, c.à.d :*
$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *, il existe un entier n tel que $n\varepsilon > x$.*

Preuve. Pour simplifier la démonstration nous allons supposer $\varepsilon = 1$.
Si $x \leq 0$, $n = 1$ convient.
Supposons $x > 0$. Il faut montrer qu'il existe un entier n tel que $n > x$.
L'ensemble $\{m \in \mathbb{N} \ / \ m \leq x\}$ est non vide et est majorée , il admet une borne supérieure M.
D'après la carctérisation de la borne supérieure, il existe un entier $k \in A$ tel que $M - \dfrac{1}{2} < k \leq M$.
D'où $M < M + \dfrac{1}{2} < k + 1$. Donc $k + 1 \notin A$ et par suite $k + 1 > x$.
Une autre preuve : on peut affirmer que A est une partie non vide bornée de $\mathbb{N}$ donc elle admet un plus grand élément M. On en déduit que $M + 1 \notin A$ ....
Dans le cas général il suffit de remplacer x par $\dfrac{x}{\varepsilon}$. ■

Proposition 2.14. — *Soit x un nombre réel, alors, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$, on appelle ce nombre n la partie entière de x et on le note $E(x)$.*

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe un entier m tel que $m > x$ ($\mathbb{R}$ est archimédien) .
Considérons l'ensemble $A = \{q \in \mathbb{N}, q > x\}$. Alors A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément p. On a alors $p - 1 \leq x < p.$, $n = p - 1$ convient.
Si $x < 0$ il suffit d'appliquer ce même raisonnement à $-x$. ■
A retenir :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < E(x) \leq x$.
3. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors : $E(x) = x$.

2.6 Densité dans $\mathbb{R}$

Approximation rationnelle d'un réel

Soient $x \in \mathbb{R}$ et n un entier. On a $E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$ d'où

$$10^{-n}E(10^n x) \leq x < 10^{-n}E(10^n x) + 10^{-n}$$

Posons $d_n = 10^{-n}E(10^n x)$, alors d_n est un nombre rationnel tel que

$$0 \leq x - d_n < 10^{-n} \quad \text{avec} \quad \lim 10^{-n} = 0$$

En particulier $\lim d_n = x$. On dit que d_n est une valeure approchée de x à 10^{-n} près.

Théorème 2.15. — *Nous avons les propriétés équivalentes suivantes :*

1. *Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$. Il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$*
2. *$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\mid x - r \mid < \varepsilon$.*
3. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite (r_n) de rationnels tels que $\lim r_n = x$*

Nous dirons alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2.7 Exercices

Exercice 1. a) Montrer que si $x > y > 0$ on a : $\dfrac{x}{1+y} > \dfrac{y}{1+x}$ et $\dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$

b) Montrer pour tout x de $\mathbb{R}$ $\quad -1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$

Exercice 2. Montrer que si x et y sont deux nombres réels quelconques , alors : $x^2 + xy + y^2 \geq 0$, et $x^2 + xy + y^2 = 0$ si et seulement si $x = y = 0$.

Exercice 3. Soient n un entier ≥ 2, $a_1, a_2, ..., a_n$ $b_1, b_2, ..., b_n$ des réels positifs donnés. Montrer :

$$\text{Min}\left(\frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_n}{b_n}\right) \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \leq \text{Max}\left(\frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_n}{b_n}\right)$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $x - \sqrt{2x+3} = 6$ (b) $\sqrt{2x+19} = x+2$

(c) $\sqrt{1+x} < 1 + x/2$ (d) $\sqrt{x^2+x+1} \leq x-1$

(e) $\sqrt{x^2-1} \leq x+2$ (f) $\sqrt{2x-x^2} \leq x-1$

Exercice 5. A deux réels positifs a et b donnés on associe : leur moyenne arithmétique : $m = \dfrac{a+b}{2}$, leur moyenne géométrique : $g = \sqrt{a\,b}$ leur moyenne quadratique : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ et leur moyenne harmonique h telle que $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b})$

Montrer qu'on a les inégalités : $\min(a,b) \leq h \leq g \leq m \leq q \leq \max(a,b)$

Montrer que l'une quelconque de ces inégalités est une égalité si et seulement si $a = b$.

Exercice 6. Quelles sont les bornes supérieures et inférieures (si elles existent) dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants :

$$A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \qquad B = \left\{x + \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\} \qquad C = \left\{\frac{x}{1+\mid x\mid},\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$D = \left\{\frac{xy}{x^2+y^2},\ x, y \in \mathbb{R}_+^*\right\} \quad E = \left\{r \in \mathbb{Q}_+ , r^2 < 2\right\}$$

Exercice 7. Déterminer les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n+2}, \frac{n+1}{n+2}\right], \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0, \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]0, \frac{1}{n}\right], \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0, \frac{1}{n}\right[$$

Exercice 8. Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, montrer

1. Si $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$.
2. $A \cup B$ est majorée et $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
3. On définit l'ensemble $A + B$ par : $A + B = \{z \in \mathbb{R} \ /\ \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}$
   - Vérifier que $A + B$ est majoré et que $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$.
   - On pose $M = \sup A + \sup B$, $M' = \sup(A+B)$. On suppose $M' < M$. En utilisant le nombre $\varepsilon = \dfrac{M-M'}{2}$, montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in A \times B$ tels que : $M' < x_0 + y_0$.
   - En déduire l'égalité : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

CHAPITRE 3

SUITES NUMÉRIQUES

3.1 Généralités

Définition 3.1. — *On appelle suite numérique toute application* u *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *,* $n \to u(n) = u_n$
Notation : une telle suite sera notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites monotones

1. la suite (u_n) est croissante si pour tout entier n on a : $u_n \leq u_{n+1}$
2. la suite (u_n) est décroissante si pour tout entier n on a : $u_n \geq u_{n+1}$
3. la suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.
4. la suite (u_n) est constante si pour tout entier n on a : $u_n = u_0$
5. la suite (u_n) est stationnaire s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_p \ \forall n \geq p$

Suites bornées

1. la suite (u_n) est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. la suite (u_n) est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$
3. la suite (u_n)est bornée si elle est majorée et minorée.

Suites extraites

Définition 3.2. — *On appelle suite extraite de la suite* (u_n) *une suite de la forme* $u_{\varphi(n)}$ *où* φ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Si $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels alors $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite (u_n)
Remarque importante : si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors, pour tout entier n on a $\varphi(n) \geq n$.

Exemple : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.2 Suites convergentes

Définition 3.3. — *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite l, si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \geq N \ \textit{ on a } \ |u_n - l| < \varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *ou* $\lim u_n = l$ *ou pour faire simple* $u_n \to l$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Soit $\varepsilon > 0$ donné. D'après la définition ci-dessus, il existe un entier N tel que

$$\forall n \geq N, \;\; l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$$

Exemples.

1. La suite $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ est convergente de limite 1. Soit $\varepsilon > 0$. 0n a :

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$$

D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier N tel que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon.$

On en déduit que pour tout entier $n \geq N$ on a $\dfrac{1}{n} < \varepsilon.$

2. La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente. Supposons que cette suite converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon = 1/2$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $|u_n - l| < 1/2.$

Pour tout entier $n \geq N$ on peut écrire $u_n - 1/2 < l < u_n + 1/2$. En particulier

Si n est pair on obtient $l \in \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$

Si n est impaire on obtient $l \in \left]\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-1}{2}\right[$

Ce qui est absurde. Donc la suite $(-1)^n$ est divergente.

Théorème 3.4. — ***Unicité de la limite.***
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite l est unique.

Preuve. On suppose que la suite (u_n) converge vers deux limites l et l' tel que $l \neq l'$.

Soit $\varepsilon = |l - l'|/4.$

Il existe un entier N_1 tel que : $\forall n \geq N_1$, $|u_n - l| < \varepsilon$

Il existe un entier N_2 tel que : $\forall n \geq N_2$, $|u_n - l'| < \varepsilon$

Soit $n \geq max(N_1, N_2)$ on a :

$$\left|l - l'\right| \leq |l - u_n| + \left|u_n - l'\right| < \left|l - l'\right|/2$$

Ce qui est absurde donc $l = l'$. ∎

Donons trois propriétés bien utiles :

Proposition 3.5. — *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite $\mid u_n - l \mid$ converge vers 0. En particulier* $\lim u_n = 0 \iff \lim |u_n| = 0.$

Proposition 3.6. — *Toute suite convergente est bornée*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad |u_n - l| < \varepsilon$$

Pour tout entier $n \geq N$ on a $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon.$

Ceci montre que l'ensemble $\{u_n / \; n \geq N\}$ est borné.

Par ailleurs, l'ensemble $\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\}$ est fini donc borné.

Finalement l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \{u_n / \; n \geq N\} \cup \{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\}$ est borné. ∎

Remarque. La réciproque est fausse ! Par exemple la suite $((-1)^n)$ est bornée mais n'est pas convergente.

Proposition 3.7. — *limite et suites extraites.*
Si la suite (u_n) est convergente, toute suite extraite de (u_n) est convergente de même limite.

Preuve. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n).
Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (u_n) est convergente, il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$.
Comme $\varphi(n) \geq n$, on a $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l. ■

Conséquences :
1. Si une suite (u_n) admet une suite extraite divergente alors (u_n) est divergente.
2. Si une suite (u_n) admet deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes alors (u_n) est divergente.

Exemple :
La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente car la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1 et la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1.

Limites infinies

Définition 3.8. — *Soit (u_n) une suite à valeurs réelles.*
1. La suite (u_n) est de limite $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \textit{tel que} \ \forall n \geq N \ , \ u_n \geq A$$

2. La suite (u_n) est de limite $-\infty$ si

$$\forall A > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \textit{tel que} \ \forall n \geq N \ , \ u_n \leq -A$$

Remarque. *Une suite qui admet une limite infinie est divergente.*

Exemple. $\lim \sqrt{n} = +\infty$.
Soit $A > 0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier N tel que $N > A^2$.
On en déduit que $\sqrt{N} > A$ et puis $\forall n \geq N$ alors $\sqrt{n} \geq \sqrt{N} > A$.

3.3 Opérations sur les limites

Théorème 3.9. — *Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites convergentes. alors*

1. *La suite $u + v$ est convergente et* $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
2. *La suite λu est convergente et* $\lim \lambda u_n = \lambda \lim u_n$
3. *La suite uv est convergente et* $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$.
4. *Si $v_n \neq 0$ pour tout n et si* $\lim v_n \neq 0$ *, la suite* $\dfrac{u_n}{v_n}$ *est convergente et* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}$

Cas des limites infinies
Ce théorème se généralise au cas de limites infinies. Rappelons qu'alors, il faut considérer des cas *indéterminés* : $\infty - \infty$, $0.\infty$, $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dans chacun de ces cas, tout peut arriver : la suite obtenue peut être ou ne pas être convergente.
1. Cas $\dfrac{l}{0}$ avec $l \neq 0$. Si la suite est positive à partir d'un certain rang, elle aura pour limite $+\infty$.
2. Cas $\dfrac{l}{\infty}$ avec $l \neq 0$. On convient que la suite converge vers 0.

3.4 Limites et inégalités

Nous dirons qu'une propriété est vraie à partir d'un certain rang s'il existe un entier N tel que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq N$.

Théorème 3.10. — ***Théorème des gendarmes.***
Soit (u_n) une suite numérique, alors :
a) Supposons qu'il existe deux suites , (a_n) et (b_n) tels que :

1. *à partir d'un certain rang on a : $a_n \leq u_n \leq b_n$*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l$ *,*

Alors la suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
b) Supposons qu'il existe une suite (a_n) tel que, à partir d'un certain rang on a : $a_n \leq u_n$ et $\lim a_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$
c) Supposons qu'il existe une suite (b_n) tel que, à partir d'un certain rang on a $u_n \leq b_n$ et $\lim b_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$

Preuve. a) Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe un entier N_1 tel que, $\forall n \geq N_1$, $|a_n - l| < \varepsilon$.
Il existe un entier N_2 tel que, $\forall n \geq N_2$, $|b_n - l| < \varepsilon$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$. On a pour tout entier $n \geq N$:

$$-\varepsilon < a_n - l \leq u_n - l \leq b_n - l < \varepsilon$$

Ce qui est équivalent à $|u_n - l| < \varepsilon$.
b) Soit $A > 0$. Il existe un entier N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $a_n > A$.
D'autre part on sait qu'il existe un entier N_2 tel que si $n \geq N_2$ alors $a_n \leq u_n$.
Soit $N = max(N_1, N_2)$. Si $n \geq N$ on a $u_n \geq a_n > A$, ce qui prouve que u_n tend vers $+\infty$.
c) On fait de même. ■

Théorème 3.11. — ***Passage à la limite dans une inégalité.***
Si les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, et vérifient pour tout entier n

$$u_n \leq v_n$$

Alors

$$\lim u_n \leq \lim v_n$$

Preuve. Commençons par montrer le résulat suivant :
Si (u_n) est une suite de termes positifs qui converge vers l , alors $l \geq 0$.
Supposons que $l < 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Ce qui veut dire

$$-\varepsilon + l < u_n < l + \varepsilon$$

Si on prend $\varepsilon = -l/2 > 0$, on obtient pour tout $n \geq N$: $\dfrac{3}{2}l < u_n < \dfrac{l}{2} < 0$. Ce qui est absurde.
Donc $l \geq 0$.
On a $(v_n - u_n)$ est une suite convergente et $\geq 0.$, d'où
$0 \leq \lim(v_n - u_n) = \lim v_n - \lim u_n$, donc $\lim u_n \leq \lim v_n$ ■

Remarque. Si on a des inégalités strictes $u_n < v_n$ on peut seulement affirmer l'inégalité large entre les limites $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Exemple. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < v_n$ mais $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

Enfin, nous avons ces deux propositions bien pratiques

Proposition 3.12. — *S'il existe $l \in \mathbb{R}$ et une suite positive (v_n) tel que :*
1. à partir d'un certain rang on a : $\mid u_n - l \mid \leq v_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$,
Alors la suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Proposition 3.13. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que :*
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. la suite (v_n) est bornée ,
Alors la suite $(u_n v_n)$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

3.5 Suites monotones

Théorème 3.14. — *Soit (u_n) une suite croissante.*
1. Si (u_n) est majorée alors (u_n) est convergente et on a $\lim u_n = \sup u_n$.
2. Si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) est divergente et on a $\lim u_n = +\infty$.

Preuve. 1. L'ensemble $\{ u_n, n \in \mathbb{N} \}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure $b \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation de la borne supérieure on a :
1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq b$.
2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $b - \varepsilon < u_{n_0}$
La suite est croissante, on a pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n_0} \leq u_n$ d'où $b - \varepsilon < u_n \leq b$ et donc $|u_n - b| < \varepsilon$
2. Soit $A > 0$. La suite (u_n) étant non bornée, il existe un entier N tel que $u_N > A$.
La suite étant croissante, pour tout $n \geq N$ on a $u_n \geq u_N > A$. Ce qui montre que $\lim u_n = +\infty$. ■

De la même manière on a le théorème suivant

Théorème 3.15. — *Une suite (u_n) décroissante et minorée est convergente et on a $\lim u_n = \inf u_n$*
Si (u_n) est une suite décroissante non minorée alors (u_n) est divergente et on a $\lim u_n = -\infty$

Exemple. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1. La suite (u_n) est croissante : on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.
2. La suite (u_n) est majorée par 3.
On montre par récurrence que pour tout entier n , $n! \geq 2^{n-1}$. Ceci nous permet d'avoir la majoration suivante :

$$u_n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

On en déduit que, pour tout entier n , $u_n \leq 3$.
La suite (u_n) est donc convergente, on admet que sa limite est e.

3.6 Suites adjacentes

Définition 3.16. — *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes, si :*

1. *(u_n) est croissante*
2. *(v_n) est décroissante*
3. *$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$*

Théorème 3.17. — *Soeint (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$*
2. *Les deux suites sont convergentes et on a $\lim u_n = \lim v_n = l$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n$$

Preuve. 1. Posons $w_n = v_n - u_n$. On a $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$. La suite (w_n) est donc décroissante.
Soit n un entier donné. On a pour tout $m \geq n \ : \ w_n \geq w_m$.
La suite (u_m) étant onvergente, on a par passage à la limite $w_n \geq 0$. Ceci montre que $u_n \leq v_n$ pour tout entier n.

2. Convergence. 0n a :
- La suite (u_n) est croissante majorée elle est convergente vers l.
- La suite (v_n) est décroissante minorée elle est convergente vers l'
On a $0 = \lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = l - l'$. D'où $l = l'$. ■
Remarque. Si les deux suites sont strictement monotones alors on peut écrire : $u_n < l < v_n$ pour tout n.

Exemple : les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

sont convergentes de même limite l.

• <u>La suite (u_n) est croissante :</u> $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$

• <u>La suite v_n est décroissante :</u>

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{-1}{nn!(n+1)^2} < 0$$

• $\lim(v_n - u_n) = \dfrac{1}{n.n!} = 0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjecentes, elles convergent vers la même limite l.
Ces deux suites sont strictement monotones, on a pour tout entier n : $u_n < l < v_n$.
Supposons que $l \in \mathbb{Q}$, $l = \dfrac{p}{q}$. On a donc $u_q < \dfrac{p}{q} < v_q$.
Multiplions par $q.q!$, on obtient $(q.q!).u_q < (q.q!)p < (q.q!)v_q$.
Posons $qq!u_q = M \in \mathbb{N}$. Alors $q.q!v_q = M + 1$. Nous avons alors : $M < p.q.q! < M + 1$, ce qui est absurde. Donc $l \notin \mathbb{Q}$.
On montre (dernier chapitre) que $l = e$. On en déduit que e n'est pas rationnel.

3.7 Exemples classiques

La propriété d'Archimède donne : $\lim n = +\infty$. On en déduit les limites des suites de la forme n^α et $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Preuve. exercice. ■

Suites géométriques

Proposition 3.18. — *Soit* $a \in \mathbb{R}$.
Si $|a| < 1$ *alors* $\lim a^n = 0$
Si $a > 1$ *, alors* $\lim a^n = +\infty$

Preuve. Ceci est une conséquence de la propriété d'Archimède. ■

3. Suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique, une suite de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$

Propriétés. On suppose que $a \neq 1$.

1. $u_n = \dfrac{b}{1-a} + a^n \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)$
2. la suite (u_n) est convergente si et seulement si $|a| < 1$ ou si $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$.

Preuve. poser $v_n = u_n - l$ avec $l = \dfrac{b}{1-a}$. Distinguer les deux cas : $u_0 = l$ et $u_0 \neq l$ ■

Comparaison de croissances : Cas des fonctions log , exp , puissance

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha e^n = +\infty \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-n} = 0 \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0 \ , \quad \alpha \in, \beta \in \mathbb{R}_+^*$$

Certaines suites se comparent à des suites géométriques :

Proposition 3.19. — *Soit* (u_n) *une suite à valeurs non nulles.*
Si, à partir d'une certain rang, $|u_{n+1}| \leq r.|u_n|$ *où* $0 \leq r < 1$ *alors* $\lim u_n = 0$

$$\text{Si } \lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = r \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \text{si } r < 1 \ , \ \lim u_n = 0, \\ \\ \text{si } r > 1 \ , \ \lim |u_n| = +\infty \end{cases}$$

Preuve. 1) Il existe N tel que si $n \geq N$ alors $|u_{n+1}| \leq r.|u_n|$. On en déduit par récurrence que $|u_n| \leq r^{n-N}|u_N| = r^n \dfrac{|u_N|}{r^N}$
2) Si $r < 1$, il existe k , $0 < k < 1$ et un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$ et on applique 1).
Si $r > 1$, il existe k , $1 < k < r$ et un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n| > k|u_{n-1}| > k^{n-N}u_N$ et $\lim k^n = +\infty$. ■

Cette proposition permet d'obtenir facilement les comparaisons de vitesse de convergence :

Proposition 3.20. — *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $a > 1$ *. On a*

$$\lim \frac{n^p}{a^n} = 0 \ \text{ et } \ \lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

3.8 Suites récurrentes

Une suite récurrente est une suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et par une relation pour $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
1. Existence : vérifier que la suite (u_n) est bien définie. Ceci exige que , pour tout entier n , u_n est dans le domaine de définition de f . C'est le cas, si u_0 appartient à un intervalle I stable par f, c.à.d $f(I) \subset I$.
Souvent, un raisonnement par récurrence nous permet de vérifier cette condition
2. Il est facile de voir graphiquement le comportement de la suite (u_n) , à partir du graphe de f , et de la donnée de u_0.
3. Limite éventuelle : si la suite (u_n) est convergente et si la fonction f est continue au point $l = \lim u_n$ alors, l vérifie l'équation $f(l) = l$.
Attention ! Ceci permet de repérer les valeurs possibles de la limite, mais ne permet pas de dire que cette limite existe.
4. Convergence : la convergence de la suite (u_n) se montre ensuite par différentes méthodes :
– Majoration de $|u_n - l|$
– Etude de la monotonie de (u_n)
– L'adjacence des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

Exemple : Etude la suite définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. La suite est bien définie car $u_0 \in [0, +\infty[$ qui est stable par $f(x) = \sqrt{2 + x}$
2. Le graphe permet de penser à une suite toujours convergente.
3. Sa limite l, si elle existe, vérifie $l = \sqrt{l + 2}$, d'où $l \geq 0$ et $l^2 - l - 2 = 0$. On obtient $l = 2$

Etude de la convergence
Première méthode :

$$|u_{n+1} - 2| = |\sqrt{2 + u_n} - 2| = \left| \frac{u_n - 2}{\sqrt{2 + u_n} + 2} \right| \leq \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.|u_n - 2|$$

On en déduit, par récurrence

$$|u_n - 2| \leq r^n.|u_0 - 2| \text{ avec } r = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} < 1.$$

La suite (u_n) est donc convergente et $\lim u_n = 2$.

Deuxième méthode : la fonction $f(x) = \sqrt{2 + x}$ est croissante.
On calcule $u_1 - u_0 = \sqrt{2 + u_0} - u_0 = \dfrac{2 + u_0 - u_0^2}{\sqrt{2 + u_0} + 2}$.
Si $u_0 \leq 2$, on a $2 + u_0 - u_0^2 \geq 0$ et donc $u_0 \leq u_1$. On en déduit par récurrence que la suite (u_n) est croissante majorée par 2.
Si $u_0 \geq 2$, on a $2 + u_0 - u_0^2 \leq 0$ et donc $u_0 \geq u_1$. On en déduit par récurrence que la suite (u_n) est décroissante minorée par 2.
Dans les deux cas la suite (u_n) est convergente de limite 2 d'après 3.

En fonction de la situation, d'autres méthodes peuvent êtres envisagées : étude de $f(x) - x$, $f(x) - l$ ....

3.9 Retour sur $\mathbb{R}$

3.9.1 Ecriture décimale

Soit x un nombre réel. Au chapitre 2 nous avons vu que pour tout entier n,

$$10^{-n}E(x10^n) \leq x < 10^{-n}E(x10^n) + 10^{-n}$$

Posons $a_n = 10^{-n}E(x10^n)$ alors a_n est l'unique réel de la forme $k10^{-n}$ avec k entier tel que $a_n \leq x < a_n + 10^{-n}$.

Proposition 3.21. — *La suite (a_n) converge vers x.*

Preuve. On a pour tout entier n , $0 \leq x - a_n < 10^{-n}$ et $\lim 10^{-n} = 0$. On en déduit, d'après le théorème d'encadrement, que $\lim a_n = x$. ∎

Définition 3.22. — *Si $x > 0$, le nombre $a_n = 10^{-n}E(x10^n)$ est appellé écriture décimale approchée à 10^{-n} près par défaut de x.*

Inversement, soient $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres entiers compris entre 0 et 9 on définit une suite (a_n) de nombres décimaux : $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k 10^{-k}$.
(a_n) est une suite croissante majorée par 1, en effet

$$a_n = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n} \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

La suite (a_n) converge vers un réel x mais cette suite n'est pas toujours l'écriture décimale de x à 10^{-n} près comme le montre l'exemple suivant : on a :

$$1 = 0,999999999....... = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}.$$

Définition 3.23. — *On appelle écriture décimale propre , toute suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ de nombres entiers compris entre 0 et 9 qui n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.*

Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 3.24. — *Ecriture décimale.*
L'application qui a une écriture décimale propre (α_k) fait correspondre le réel $x = \lim a_n$ où $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k 10^{-k}$ est une bijection de l'ensemble des écritures décimales propres sur l'intervalle $[0, 1[$. De plus, pour tout entier n, le nombre a_n est la valeur décimale approchée à 10^{-n} près par défaut de x.

Théorème 3.25. — *Théorème de Cantor.* *$\mathbb{R}$ est non dénombrable, c.à.d il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$*

Proposition 3.26. — *Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

3.9.2 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Définition 3.27. — *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A.*

Proposition 3.28. — *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$, si et seulement si, tout intervalle $]a, b[$ avec $a < b$ contient au moins un élément de A.*

Preuve. On suppose que A est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $]a, b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
Soit $c = \dfrac{a+b}{2} \in]a, b[$. Il existe une suite (a_n) d'éléments de A tel que $\lim a_n = c$.
Soit $\varepsilon = \dfrac{b-c}{2} > 0$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|a_n - c| < \varepsilon$. On a donc

$$\forall n \geq N, \ \ a_n \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset]a, b[$$

Inversement, soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $|x - a| < \varepsilon$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\text{Si } \varepsilon = 1 \ &, \ \text{il existe } a_1 \in A \text{ tel que } |x - a_1| < 1,\\
\text{Si } \varepsilon = \frac{1}{2} \ &, \ \text{il existe } a_2 \in A \text{ tel que } |x - a_2| < \frac{1}{2},\\
&\vdots\\
\text{Si } \varepsilon = \frac{1}{n} \ &, \ \text{l existe } a_n \in A \text{ tel que } |x - a_n| < \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

On construit ainsi une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x. Ceci montre que A est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Théorème 3.29. — *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Pour $\mathbb{Q}$ considérer la suite (a_n) des valeurs décimales approchées.
Pour les irrationnels, considérer la suite $\left(a_n\sqrt{2}\right)$ où les a_n sont les valeurs décimales approchées de $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$. ■

3.10 Bolzano-Weierstrass

Théorème 3.30. — ***Théoreme de Bolzano-Weirestrass***
Toute suite bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet au moins une sous-suite convergente.

La démonstration suivante exploite le principe de dichotomie qui consiste à découper un objet en deux portions, en conserver une et la découper à nouveau de sorte de générer un processus récurrent. L'idée essentielle ici est la suivante : lorsqu'on découpe un ensemble infini en deux sous-ensembles, nécessairement l'un d'entre eux (au moins) doit être infini. Ceci permettra d'exploiter le principe de dichotomie.
Preuve. Soit (u_n) une suite réelle bornée, il existe a et b tels que $a \leq u_n \leq b$ pour tout entier n. Nous allons construire, par un procédé dichotomique, deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel n, l'ensemble $A_n = \{k \in \mathbb{N} / a_n \leq u_k \leq b_n\}$ soit infini .

Initialisation : posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. L'ensemble $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \ / \ a_0 \leq u_k \leq b_0\}$ est infini car égal à $\mathbb{N}$.

Etape 1 : Posons $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Nous avons $[a_0, b_0] = [a_0, c_0] \cup [c_0, b_0]$,
$A_0^+ = \{k \in \mathbb{N}/c_0 \leq u_k \leq b_0\}$ et $A_0^- = \{k \in \mathbb{N}/a_0 \leq u_k \leq c_0\}$.

Comme $A_0^+ \cup A_0^- = A_0$ est infini, au moins l'un des deux ensembles A_0^- ou A_0^+ est infini.
Si A_0^+ est infini, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$,
Sinon on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$
Dans les deux cas on a :

1. L'ensemble $A_1 = \{k \in \mathbb{N}/a_1 \leq u_k \leq b_1\}$ est infini.
2. $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ et $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$

Etape n **:** soient a_n et b_n tels que l'ensemble $A_n = \{k \in \mathbb{N}/a_n \leq u_k \leq b_n\}$ soit infini.
Posons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et considérons : $A_n^- = \{k \in \mathbb{N}\ a_n \leq u_k \leq c_n\}$ et $A_n^+ = \{k \in \mathbb{N}/c_n \leq u_k \leq b_n\}$.
On a $A_n = A_n^- \cup A_n^+$. Puisque A_n est infini, au moins l'un des deux ensembles A_n^- ou A_n^+ l'est.
Si A_n^+ est infini, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$,
Sinon pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Dans les deux cas on a :

1) L'ensemble $A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N}/a_{n+1} \leq u_k \leq b_{n+1}\}$ est infini.

2) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

Par ce schéma, nous avons défini deux suites (a_n) et (b_n) tels que :

1. (a_n) est croissante,
2. (b_n) décroissante,
3. $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n} \to 0$

Ainsi les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Notons l leur limite commune.
On pose $\varphi(0) = 0$. Supposons construits $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$. L'ensemble $A_{n+1} \backslash \{0, 1, 2, ..., \varphi(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ elle admet un plus petit élément qu'on note $\varphi(n+1)$. On a bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. L'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ainsi définie est strictement croissante.

Considérone la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$. Par construction de φ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in A_n$ et donc $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$. Comme les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite l, par encadrement $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l. ■

3.11 Exercices

Exercice 1. a) Calculer les limites suivantes, si elles existent :

$$\begin{array}{llllll} a) & \dfrac{n^2+2n}{3n^2+4n} & b) & \dfrac{3n+\cos n}{\ln n+2n} & c) & \sqrt{4n^2+5n+6}-2n \\ d) & \dfrac{e^n}{\sqrt{n}} & e) & e^{-n}\sin n & f) & S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-k} \\ g) & \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n} & h) & \dfrac{\sin n}{n} & i) & 2^n-(-1)^n n^2 \end{array}$$

b) Même question avec

$$\frac{E(n\pi)}{2n+1}\ ,\ \left(1-\frac{a}{n}\right)^n\ ,\ \frac{2^n}{n!}\ ,\ n\sin\frac{1}{n}\ ,\ 2^n\ln\left(1+a^n\right)\ \ (a>0)$$

c) Etudier la convergence de la suite (a_n) définie par

$$a_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$$

et calculer sa limite si elle existe.

Exercice 2. Vrai ou Faux ? Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifier.

1. Toute suite positive divergente a pour limite $+\infty$
2. Toute suite croissante divergente a pour limite $+\infty$
3. Toute suite positive décroissante est convergente de limite nulle.
4. Toute suite positive de limite 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Toute suite convergente de limite $\ell>0$ est positive à partir d'un certain rang.
6. Toute suite bornée est convergente.
7. Toute suite bornée admet une suite extraite convergente
8. Si une suite (u_n) est divergente alors toute suite extraite de (u_n) est divergente.
9. La somme de deux suites divergentes est divergente
10. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
11. Le produit $(u_n v_n)$ d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

Exercice 3. Pour tout $n\geq 1$, on pose :

$$u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Soit k un entier tel que $0\leq k\leq n$, montrer que
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n}$$
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4. a) Montrer que $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$. En déduire la valeur de $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

b) On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. Montrer que $S_n\leq 1+u_{n-1}$.

- En déduire que la suite (S_n) est convergente.
c) On pose $R_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.
- Montrer que les suites (S_n) et (R_n) sont adjacentes.
- En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite de la suite (S_n).

Exercice 5. Soit (u_n) une suite à valeurs > 0. On pose pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

1. Si (u_n) est convergente de limite non nulle, que peut-on dire de la suite (v_n) ?
2. On suppose que (v_n) a une limite $a < 1$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et a pour limite 0.
3. Que peut-on dire de la suite (u_n) lorsque (v_n) a une limite $a > 1$?

Exercice 6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n\,n!}$
sont adjacentes.
En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de leur limite.
On admettra que cette limite est le nombre e. Montrer que ce nombre est irrationnel.

Exercice 7. Pour $a \in \mathbb{R}$ donné, on considère la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que si $a < 0$ la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
2. Montrer que si $0 \leq a \leq 1$, la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
3. Que peut-on dire si $a > 1$?

Exercice 8. Etudier en fonction du réel a la suite u_n définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$

Exercice 9. Etudier en fonction du réel positif a, la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n}$

Retrouver le résultat en vérifiant que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1-u_n}{u_n}$ est géométrique.

Exercice 10. Etudier les suites définies par :

1. $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
2. $v_0 \in]2, 3[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n - 6}{v_n - 4}$ c) $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{1}{1+w_n}$

Exercice 11. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

$u_0 \leq v_0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n + v_n}{3}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
Que peut-on dire de la suite (w_n) où $w_n = u_n + v_n$? En déduire la limite de (u_n) et (v_n).
$0 \leq u_0 \leq v_0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n\,v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

Exercice 12.

1. Montrer que tout nombre réel x vérifie : $\dfrac{x}{4+x^2} \leq \dfrac{1}{4}$
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite égale à 2. Montrer que l'ensemble A des nombres $\dfrac{a_n}{4+(a_n)^2}$ où $n \in \mathbb{N}$ admet une borne supérieure, et préciser sa valeur.

Exercice 13. On considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$ par la relation :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, x_n est définie et on a $x_n \geq \sqrt{2}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}$$

et en déduire que

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n}$$

puis que

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 4^{1-2^n}$$

4. Calculer x_2 et montrer que x_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 2.10^{-2} près.

La suite (x_n) est appelée suite de Hénon , mathématicien grec.

CHAPITRE 4

LIMITES ET CONTINUITÉ

4.1 Limites

On appelle fonction numérique, toute application d'une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). L'ensemble D est appelé domaine de définition de f.
Pour les fonctions définies par une formule , le domaine de définition n'est pas précisé. Toute étude de la fonction doit commencer par la recherche de ce domaine D.

Nous allons définir la notion de limite d'une fontion en un point a. Pour celà, il faut introduire une hypothèse technique : en effet on ne peut pas parler, par exemple, de limite en -1 de $f(x) = \sqrt{x}$.

Points adhérents

Définition 4.1. — *Si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on dit que a est adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un x dans A tel que $|x - a| < \varepsilon$. En langage formalisé*

$$a \text{ est adhérent à } A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \quad \text{tel que} \quad |x - a| < \varepsilon$$

Ceci équivaut à dire qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a.

Voisinages

On appelle voisinage de a un intervalle du type $]a - \alpha, a + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.
On appelle voisinage de $+\infty$ un intervalle du type $]A, +\infty[$ avec $A > 0$.

Définition 4.2. — *Soit a un point adhérent à D. On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ avec $|x - a| < \eta$ on ait $|f(x) - l| < \varepsilon$. En langage formalisé :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Dire que f tend vers l quand x tend vers a signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit soit-il, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D \cap]a - \eta, a + \eta[\quad , \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Théorème 4.3. — *Unicité de la limite d'une fonction*
Si f admet une limite l en a alors cette limite est unique.
Ce réel l est alors appelé limite de f en a et on note $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. On peut aussi écrire $f(x) \to l$ quand $x \to a$.

Preuve. Supposons que f admet deux limites l et l' en a , avec $l \neq l'$.
Soit $\varepsilon = \dfrac{|l-l'|}{4} > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in D,\ |x-a| < \eta_1 \implies |f(x)-l| < \varepsilon$
Il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in D,\ |x-a| < \eta_2 \implies |f(x)-l'| < \varepsilon$
Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, alors pour tout $x \in D$ tel que $|x-a| < \eta$ on a :

$$\left|l-l'\right| \leq |f(x)-l| + \left|f(x)-l'\right| < \frac{|l-l'|}{2}$$

Ce qui est absurde. Donc $l = l'$. ■

Limites infinies, limites en l'infini

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$, et on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| < \alpha \implies f(x) > M$$

On dit que f, a pour limite $-\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ et on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| < \alpha \implies f(x)\ < -M$$

De la même manière :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l :\ \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0,\ \forall x > A,\ |f(x)-l| < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty :\ \forall M > 0, \exists A > 0,\ \forall x > A,\ f(x) > M$

Les autres limites s'écrivent de la même manière.

4.2 Limite à droite, limite à gauche, limite unilatère

Limite à droite

Définition 4.4. — *Soit f une fonction numérique définie sur $I =]a,b]$ (ou $]a,b[$ ou $]a,+\infty[$).*
On dit que $f(x)$ admet pour limite à droite le nombre l quand x tend vers a, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de I avec $a < x < a+\eta$ on ait $|f(x)-l| < \varepsilon$.
En langage formalisé cette définition s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ a < x < a+\eta \implies |f(x)-l| < \varepsilon$$

Cette limite quand elle existe est unique on la note : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l$.

Limites à gauche

Définition 4.5. — *Soit f une fonction numérique définie sur $I = [b,a[$ (ou $]b,a[$ ou $]-\infty,a[$).*
On dit que $f(x)$ admet pour limite à gauche le nombre l quand x tend vers a, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de I avec $a-\eta < x < a$ on ait $|f(x)-l| < \varepsilon$.
En langage formalisé cette définition s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ a-\eta < x < a \implies |f(x)-l| < \varepsilon$$

Cette limite quand elle existe est unique on la note : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l$.

Limite ”bilatère ” ou ”épointé ”

Définition 4.6. — *Soit f une fonction définie sur D et a un point adhérent à $D\setminus\{a\}$.*
On dit que $f(x)$ a pour limite le nombre l, quand x tend vers a avec $x \neq a$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de D avec $0 < |x-a| < \eta$ on ait $|f(x) - l| < \varepsilon$.
En langage formalisé cette définition s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in D, 0 < |x-a| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Cette limite quand elle existe est unique on la note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$.

Remarque

Si f est définie sur un intervalle $I = [b, a[\cup]a, b]$ les définitions 5.2 et 5.6 sont identiques.

La seule différence c'est quand f est définie en a et que $\lim f(x) \neq f(a)$ mais dans ce cas on préfère parler de continuité ou non au point a.

Attention, écrire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ signifie que cette limite existe et qu'elle vaut l.

4.3 Résultats

Caractérisation de la limite par les suites

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Théorème 4.7. — ***Caractérisation de la limite par les suites.***
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $l \in .\overline{\mathbb{R}}$ Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

(ii) Pour toute suite (x_n) d'éléments de D de limite a, la suite $(f(x_n))$ a pour limite l.

Preuve. Nous ne traiterons que le cas $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$; les autres cas sont très semblables.
(i) $\implies$ (ii) Supposons $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
Soit (u_n) une suite d'éléments de D tel que $u_n \to a$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $f(x) \to l$ quand $x \to a$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant $\forall x \in D, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
Puisque $u_n \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq N, |u_n - a| < \alpha$.
On a alors $\forall n \geq N,\ |f(u_n) - l| < \varepsilon$. Ainsi $f(u_n) \to l$.

(ii) $\implies$ (i) Par contraposée :
Supposons que f ne tend pas vers l en a.
Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in D$ vérifiant $|x-a| < \alpha$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.
Pour $n \in N$, prenons $\alpha = 1/(n+1)$. Il existe $u_n \in D$ tel que

$$|u_n - a| < \alpha \ \text{ et } \ |f(u_n) - l| \geq \varepsilon$$

En faisant varier n, ce qui précède définit une suite (u_n) d'éléments de D telle que $u_n \to a$ et $(f(u_n))$ ne tend pas vers l. ■

Exemple : $\sin x$ n'a pas de limite en l'infini , en effet :
$\lim \sin(n\pi) = 0 \neq 1 = \lim \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2})$

Théorème 4.8. — *Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.*

Preuve. Supposons $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ quand $x \to a$.
Soit $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap]a-\eta, a+\eta[$ on ait $l - 1 < f(x) < l + 1$
Ainsi f est bornée au voisinage de a. ∎

Attention ! La réciproque est fausse, la fonction $x \mapsto sin(1/x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et en particulier au voisinage de 0 alors que cette fonction n'a pas de limite en 0.

Théorème 4.9. — ***Passage à la limite dans une inégalité.***
Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ telles $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$
Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a alors $l \leq l'$

Ce résultat est faux en terme d'inégalité stricte ; on retient que, par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

Théorème 4.10. — ***Théorème des gendarmes***
(i) On suppose qu'au voisinage de a, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$
(ii) On suppose qu'au voisinage de a , $g(x) \leq f(x)$. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
(iii) Soit $l \in \mathbb{R}$. Si au voisinage de a, on a pour tout $x \in D$: $|f(x) - l| < \varphi(x)$ où $\lim\limits_{a} \varphi(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

4.4 Opérations sur les limites

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**

FI : Forme indéterminée.

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) =$	ll'	$+\infty$ **ou** $-\infty$	**FI**	$+\infty$ **ou** $-\infty$

ou : on décide de $\pm\infty$ suivant le signe de l, en appliquant la règle des signes.

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l \neq 0$	l	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l' \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	l'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (\frac{f}{g})(x) =$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$ **ou** $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	**FI**	**FI**

ou : on décide de $\pm\infty$ suivant le signe de l, en appliquant la règle des signes.
ou : on décide de $\pm\infty$ suivant le signe de l', en appliquant la règle des signes.

Limite d'une fonction composée

Proposition 4.11. — *Si f est définie sur D , a un point adhérent à D et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.*
Si g est définie sur D' , b est adhérent à D' et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$ et si au voisinage de a, on a pour tout $x \in D$, $f(x) \in D'$ alors $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = l$

Preuve. Écrivons les définitions :
$\lim\limits_{x\to b} g(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0$ tel que $\forall x \in D', |x - b| < \eta \Longrightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$: soit $\varepsilon = \eta, \exists\alpha > 0$ tel que $\forall x \in D, |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \eta$
Soit donc $\varepsilon > 0$. Alors on a : $\exists\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \eta \Longrightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon$$

D'où le résultat. ■

Fonctions monotones

Proposition 4.12. — *Soit f :$]a, b[\to \mathbb{R}$ une application croissante. Alors :*
(i) f admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point $c \in]a, b[$ et on a

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c^+} f(x)$$

(ii) f admet une limite à droite en a (finie ou égale à $-\infty$)
(iii) f admet une limite à gauhe en b (finir ou égale à $+\infty$)

Ce résultat est encore vrai pour une fonction décroissante.

4.5 Continuité

Définition 4.13. — *Si a appartient au domaine de définition D de la fonction f , on dit que f est continue en a, si on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
On dit que f est continue sur D si, et seulement si f est continue en tout point de D.

Par exemple si f est définie sur $I = [a, b]$ on distingue les 3 cas :
• f est continue en $c \in]a, b[$ équivaut à :

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

• f continue en a équivaut à $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
• f continue en b équivaut à $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

D'après le définition de la limite (définition 5.2) on a :

f est continue au point $a \in D$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in D,\ |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Proposition 4.14. — ***Caractérisation de la continuité par les suites.***
Soit f une fonction numérique définie sur D et soit $a \in D$. Sont équivalentes :
(i) f est continue au point a,
(ii) Pour toute suite (x_n) d'éléments de D qui a pour limite a, la suite $(f(x_n))$ a pour limite $f(a)$.

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 5.7. ∎

Prolongement par continuité

Définition 4.15. — *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur $I - \{a\}$. On appelle prolongement par continuité de f au point a, une fonction g définie sur I continue au point a, qui prolonge f, c'est à dire vérifie pour tout $x \in I - \{a\}$: $g(x) = f(x)$*

Proposition 4.16. — *f admet un prolongement par continuité en a si et seulemenent si f admet une limite finie l en a. Dans ce cas ce prolongement g est unique. C'est la fonction définie par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ l \quad \text{ si } x = a \end{cases}$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, donc la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

Continuité et opérations

La propriété suivante découle directement de la propriété correspondante pour les limites de fonctions.

Proposition 4.17. — *Soient f et g deux fonctions continues en a (respectivement sur un intervalle I). Alors :*

1. *$f+g$ est continue en a (respectivement sur I) ;*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ est continue en a (respectivement sur I) ;*
3. *fg est continue en a (respectivement sur I) ; si de plus $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{g}$ est continue en a (respectivement sur I) ;*
4. *$f \circ g$ est continue en a (respectivement sur I) , sous réserve bien sûr que $f \circ g$ existe en a (respectivement sur I).*

4.6 Continuité et intervalles

Théorème 4.18. — ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Enoncé 1 : *Soit une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$.*
Si $f(a)f(b) < 0$ alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Enoncé 2 : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ tel que $a \leq b$. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$.*

Enoncé 3 : *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Preuve.
Preuve de l'énoncé 1. Cette démonstration repose sur la méthode d'approximation par dichotomie. L'idée est de considérer deux suites numériques qui vont encadrer de plus en plus finement le réel c du théorème.
On considère ainsi les suites (a_n) et (b_n) définies par récurrence de la manière suivante :
• $a_0 = a$ et $b_0 = b$;
• Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$, alors on choisit $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;
• Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$, alors on choisit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$;
• Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$, alors on a trouvé $c = \frac{a_n+b_n}{2}$.

On a : $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ Les deux suites(a_n) et (b_n) ainsi construites, vérifient :

1. (a_n) et (b_n) sont adjaentes ;
2. Pour tout entier n on a : $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) > 0$.

Les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers un réel $c \in [a, b]$ et
On a pour tout entier n, $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, comme f est continue au point c , on a par passage à la limite

$$f(c) \leq 0 \leq f(c)$$

D'où $f(c) = 0$. ■
Preuve énoncé 2 : on considère la fonction $g(x) = f(x) - y$ et on applique le 1)

Preuve énoncé 3 : conséquence directe de 2.

On appelle intervalle fermé borné tout intervalle du type $[a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.19. — *Image d'un intervalle fermé borné.*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Si f est continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$. En particulier, la fonction f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.
Ainsi, il existe $c, d \in [a, b], \forall x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Preuve.
Première étape : f est bornée.

Supposons que f n'est pas majorée. Pour tout entier n il existe un réel $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. On a donc une suite (x_n) à valeurs dans le segment $[a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass , on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de la suite (x_n). On a alors $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n$, ce qui implique que la suite $(f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $+\infty$.
Notons $l = \lim x_{\varphi(n)}$. Comme f est continue en l, on a $\lim f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$. Ce qui contredit $f(x_{\varphi(n)}) \to +\infty$.

Deuxième étape : f atteint ses bornes

Posons $M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$. Il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ tel que $\lim f(x_n) = M$. Puisque la suite (x_n) est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme l'existence d'une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. Posons d sa limite. Puisque pour tout $n \in N, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on obtient à la limite $d \in [a, b]$. Mais par continuité de f en d, on a alors $f(x_{\varphi}(n)) \to f(d)$. Or $(f(x_{\varphi(n)}))$ est une suite extraite de la suite $(f(x_n))$ qui tend vers M donc $f(x_{\varphi(n)}) \to M$. Par unicité de la limite on obtient $M = f(d)$. Ainsi f admet un maximum en d.
De façon symétrique, on montre que f admet un minimum en un certain $c \in [a, b]$. ■

Fonctions strictement monotones

Théorème 4.20. — *Théorème de la bijection*
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

(i) Soient $a, b \in I$. Pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l' équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur $[a, b]$.

(ii) La fonction f définit une bijection entre I et $f(I)$ et sa bijection réciproquef^{-1} est elle-même continue et de même sens de variation que$f$.

Preuve. On suppose que f est strictement croissante (considérer la fonction $-f$ si f, est décroissante).
Grâce au Théorème des valeurs intermédiaires, on peut montrer que $J = f(I)$ est un intervalle.
Tout élément de $J = f(I)$ possède un antécédent par f dans I, : par définition de J,. (g est une fonction surjective)
Celui-ci est unique car$f$ est strictement croissante. (g est une fonction injective). ■

De manière précise :

I	$[a, b]$	$]a, b[$	$[a, b[$	$]a, b]$
Si f continue strictement $\nearrow$ $f(I) =$	$[f(a), f(b)]$	$]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\,[$	$[f(a), \lim\limits_{b^-} f\,[$	$]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\,]$
Si f continue strictement $\searrow$ $f(I) =$	$[f(b), f(a)]$	$]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f\,[$	$]\lim\limits_{b^-} f\,, f(a)]$	$[f(b), \lim\limits_{a^+} f\,[$

4.7 Exercices

Exercice 1. Calculer, si elle existe, la limite de la fonction f au point x_0 dans les cas suivants :

A)

$a)$ $\sqrt{x^2-4}-x$, $x_0=+\infty$ $\quad$ $b)$ $x^x, x_0=0^+$ $\quad$ $c)$ $e^x-\sqrt{x^2-4}$, $x_0=+\infty$ puis $-\infty$

$d)$ $(3^x+x)\sqrt{\cos x+3}$, $x_0=0$ $\quad$ $e)$ $\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $x_0=0$ $\quad$ $f)$ $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$, $x_0=4$

$g)$ $\dfrac{1-x}{\sin x}$, $x_0=0$ $\quad$ $h)$ $\dfrac{1-x}{\sin^2 x}$, $x_0=0$ $\quad$ $i)$ $\dfrac{(x^2-3)^{\frac{1}{2}}}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}$, $x_0=+\infty$ puis $-\infty$

B)

$a)$ $\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$, $x_0=0$ $\quad$ $b)$ $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$, $x_0=0$

$c)$ $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$, $x_0=0$ $\quad$ $d)$ $\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a>0$, $b>0$, $x_0=0$

$e)$ $e^{x-\sin x}$, $x_0=+\infty$ $\quad$ $f)$ $\dfrac{2^x-32}{x-5}$, $x_0=5$

$g)$ $\left(1+\dfrac{m}{x}\right)^x$, $m\in\mathbb{R}$, $x_0=+\infty$ $\quad$ $h)$ $(x^2+2x-3)\,\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, $x_0=1$

$i)$ $\dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x}$, $x_0=1$ $\quad$ $j)$ $\dfrac{e^{2x}-1}{1-\sqrt{x^2+3x+1}}$, $x_0=0$

$k)$ $xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0=0$ $\quad$ $l)$ $xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0=+\infty$

Exercice 2.

a) La fonction $\sin x$ admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

b) La fonction $g(x) = e^x\sin x$ admet-elle une limite en $+\infty$? en $-\infty$? Si oui la calculer.

Exercice 3. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0) = 1$. Dessiner l'allure de son graphe.

b) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 4. Montrer qu'on peut prolonger par continuité en 0 les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x\sin x} \qquad g(x)=\frac{e^x-\cos x}{1-\ln(e+\sin x)}$$

Exercice 5. Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 \text{ si } x<2\\ a \text{ si } x=2\\ x^2+b \text{ si } x>2\end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Justifier l'existence d'une fonction continue f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x-1} \text{ si } 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{(e^x - e)\ln x}{x-1} \text{ si } x > 1$$

Exercice 7.
a) Montrer que l'équation $x^4 + x = 3$ admet une solution unique dans $[1,2]$.
b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$, montrer que f est constante.

Exercice 8. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 9. Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, telles que $f(0) > g(0)$ et $f(1) < g(1)$. Montrer qu'il existe un x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.
indication : considére l'application $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exercice 10. Soit $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ où $a > 0$. On suppose $f(0) > 0$ et f continue en 0.
Montrer qu'il existe un réel b avec $0 < b \leq a$ tel que pour tout $x \in]-b,b[$ on a : $f(x) > 0$.

Exercice 11. Montrer que toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en -∞ et $+\infty$ est bornée.

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ , \ f(2x) + f(x) = 0$$

1. Soit x_0 un réel quelconque. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_0) = (-1)^n f(\frac{x_0}{2^n})$.
2. En déduire que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to]-1,1[$ une application continue, et (x_n) une suite bornée. Montrer que la suite $((f(x_n))^n)$ est convergente de limite 0.

Exercice 14. Soit a un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x^n - a(1-x)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite l, celle-ci ne peut valoir que 1.
3. Soit $n \geq 1$. Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. Conclure.

Exercice 15. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) = xf(1)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = xf(1)$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)$.

DÉRIVÉES

5.1 Nombre dérivée

Définition 5.1. — *Soit f une fonction réelle définie sur $]a,b[$, et soit $x_0 \in]a,b[$. On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie quand $x \to x_0$. Cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée dérivée de f en x_0.

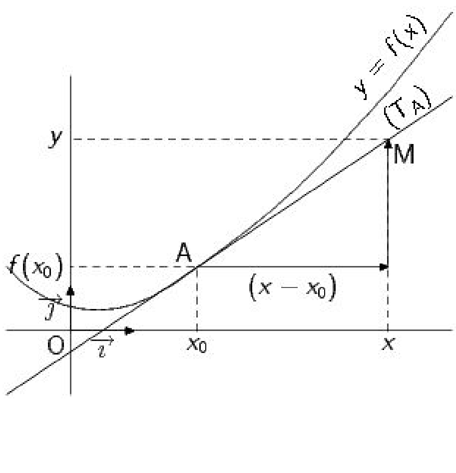
Remarque. Il est souvent commode de se ramener à des limites en 0 , en écrivant :
$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Intérprétation géométrique

Le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé taux d'accroissement de f en x_0.
la valeur de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ c'est la pente de la droite passant par les points du graphe $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. Cette droite s'appelle une sécante.
Lorsque f est dérivable en x_0 , ce rapport admet une limite lorsque $x \to x_0$, et cette limite c'est la pente de la tangente en x_0 à la courbe d'équation $y = f(x)$.

Proposition 5.2. — ***Tangente au graphe.***
Si f est dérivable en x_0, son graphe Γ : $y = f(x)$ admet une tangente au point A de coordonnées$(x_0, f(x_0))$ qui est la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Inversement, si le graphe Γ admet une tangente au point A non parallèle à l'axe des y, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)$ est la pente de cette tangente.



Exemples :

• Si f est constante, ses taux d'accroissements sont nuls, et donc sa dérivée en tout point est nulle.
$\forall x \in I,\ f(x) = \lambda \implies \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
• Si f est linéaire, ses taux d'accroissements sont constants, et donc sa dérivée en tout point est constante.
$\forall x \in I,\ f(x) = \lambda x \implies \forall x \in I,\ f'(x) = \lambda$.
• La fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Soit $a > 0$ on a : $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} . \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ quand $x \to a$.

Dévéloppement limité d'ordre 1

Proposition 5.3. — *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est dérivable en x_0,
(ii) Il existe un réel l *et une fonction* ε *définie dans un voisinage de* x_0*, continue en* x_0 *avec* $\varepsilon(x_0) = 0$ *tels que*

$$f(x) = f(x_0) + l.(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Dans ce cas l=f'(a).

Preuve. $(i) \implies (ii)$ il suffit de poser $\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(a) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 \quad \text{si } x = x_0 \end{cases}$

$(ii) \implies (i)$ évident. ■

Remarques :

1. La condition ε continue en x_0 avec $\varepsilon(x_0) = 0$ peut s'écrire $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

2. Si on fait le changement de variable $h = x - x_0$ on peut écrire le développement limité d'ordre 1 : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Proposition 5.4. — *Si* f *est dérivable en* x_0 *, alors* f *est continue en* x_0 *.*

Preuve.
Preuve 1 : Écrivons le développement limité d'ordre 1 : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$. avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
On en déduit $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, ce qui équivaut à : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Preuve 2 : on peut écrire

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) \longrightarrow f'(x_0).0 = 0$$

D'où $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

La réciproque est fausse : par exemple la fonction "valeur absolue " $x \longrightarrow |x|$ est continue en 0, mais non dérivable en 0. Il en est de même pour la fonction "racine carrée".

Définition 5.5. — *On dit que* f *est dérivable sur* $]a, b[$ *lorsque* f *est dérivable en tout point de* $]a, b[$. *Dans ce cas la fonction* $x \to f'(x)$ *, définie sur* $]a, b[$, *est appelée dérivée de* f *et est noté* f'.

Dérivée à gauche, dérivée à droite

Il peut se faire que le taux d'accroissement admette seulement une limite unilatérale en x_0 , auquel cas on parle de dérivée à gauche ou de dérivée à droite.

Définition 5.6. — *(i) Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable à droite en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite en a. Notation $f'_d(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.*
Nous dirons que f est dérivable sur $[a,b[$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$ et à droite en a.

(ii) Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable à gauche en b si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ admet une limite à gauche en b Notation $f'_g(a) = \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.
Nous dirons que f est dérivable sur $]a,b]$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$ et à gauche en b.

(iii) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Nous dirons que f est dérivable dans $[a,b]$ lorsque f est dérivable dans $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.

Exemples :
1. Considérons la fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$. Son taux d'accroissement en 0 est :

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \ \ 1 & \text{si} \quad x > 0\ . \end{cases}$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 , mais elle admet une dérivée à gauche égale à -1 , et une dérivée à droite égale à 1 .

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Proposition 5.7. — *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche en x_0, f est dérivable à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dans ce cas on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

5.2 Opérations sur les dérivées

Les résultats de cette section sont à connaître par coeur : ils vous permettent de calculer les dérivées de toutes les fonctions que vous rencontrerez, à partir d'un petit nombre de dérivées usuelles.

Théorème 5.8. — *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant a . On suppose que f et g sont dérivables en a . Alors :*
1. $f + g$ est dérivable en a , de dérivée $f'(a) + g'(a)$
2. fg est dérivable en a , de dérivée $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. Si g ne s'annule pas dans un voisinage de a alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Théorème 5.9. — *Fonction composée.*
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert , dérivable en a. Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $f(a)$, dérivable en $f(a)$. Alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a , de dérivée : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

On retient la formule $(f(u))' = f'(u)u'$.

Proposition 5.10. — *Fonction inverse*.
Si f est continue, strictement monotone sur l'intervalle I , et dérivable au point $a \in I$, l'application réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas , on a $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

C'est une conséquence du théorème 7.9. On dérive la formule $g(f(x)) = x$, on obtient :
$1 = (g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$. D'où la formule de la proposition.

5.3 Résultats

<u>**Extrema**</u>

Définition 5.11. — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I . Soit a un point de I . On dit que a est un*

• *maximum local de f si a est un point intérieur à I et s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, on ait $f(x) \leq f(a)$,*

• *minimum local de f si a est un point intérieur à I et s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, on ait $f(x) \geq f(a)$,*

• *On dit que f admet un extremum local en a si f admet un minimum ou un maximum local en a.*

Insistons sur l'adjectif local. Il suffit que la valeur de f en a soit la plus grande des valeurs prises par f sur un petit intervalle autour de a pour que f soit un maximum local. Cette valeur n'est pas nécessairement la plus grande prise par f sur tout son domaine de définition

Proposition 5.12. — *Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Preuve. Supposons que l'extremum est un maximum. Alors par définition il existe un intervalle $I_\alpha =]a - \alpha, a + \alpha[$ tel que pour tout $x \in I_\alpha$ on a $f(x) \leq f(a)$.
Si $x > a$, on a $x - a > 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ et par passage à la limite on obtient $f'(a) \leq 0$.
Si $x < a$, on a $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ et par passage à la limite on obtient $f'(a) \geq 0$.
En combinant les deux inégalités on obtient $f'(a) = 0$. ■

<u>La réciproque est fausse :</u> exemple $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais n'a pas d'extremum en 0.

Conséquence : si f est dérivable sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, f est continue sur cet intervalle fermé borné donc est bornée, et atteint son maximum M et son minimum m en des points c et d de $[a, b]$.

Ces points ne peuvent êtres que les extrémités a et b de l'intervalle ou des points où la dérivée s'annule.

Théorème 5.13. — *Théorème de Rolle.*
Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.

Preuve. Comme f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, f admet un maximum M et un minimum m.
Si $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(b)$ il existe un $c \in]a, b[$ tel que f possède un extremum en c. On sait alors que $f'(c) = 0$.
Sinon $m = f(a) = f(b)$ et $M = f(a) = f(b)$; donc f est constante sur $[a, b]$ et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$. ■

Théorème 5.14. — *Théorème des accroissements finis*
Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Preuve. On introduit la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Comme

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

on obtient la formule annoncée avec $x = c$. ■

Théorème 5.15. — *Inégalité des accroissements finis.*
Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et qui vérifie pour tout x de $]a, b[$, $|f'(x)| \leq k$, alors on a : $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.

Application

Proposition 5.16. — *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .*
• La fonction f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ pour tout $x \in I$.
• La fonction f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ pour tout $x \in I$.
• La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème des accroissements finis. ■

Remarques :

1. Ce théorème est faux si I n'est pas un intervalle.
2. Ce théorème reste vrai si f est dérivable sur I sauf en un nombre fini de points, par exemple : si f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ " *si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est constante sur $[a, b]$.* "

5.4 Dérivées successives.

Soit f une fonction dérivable sur I . Sa dérivée f' peut être elle-même dérivable. On appelle alors dérivée seconde la dérivée de f' , et on la note f'' . Cette fonction peut être elle-même dérivable, etc. Si f est k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ sa dérivée d'ordre k , ou dérivée k -ième. Par définition, la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle-même. Par exemple, si n est un entier fixé, et f est la fonction $x \mapsto x^n$,
$\forall k = 1, \dots, n,\ f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$ et $\quad \forall k > n,\ f^{(k)}(x) = 0$.

Définition 5.17. — *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , ou encore f est k fois continûment dérivable, si elle admet une dérivée k -ième continue sur I .*
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , si elle admet des dérivées successives de tout ordre (elles sont nécessairement continues puisque dérivables)

Vous pouvez retenir que : toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles ouverts où elles sont définies. Ceci concerne les fonctions polynômes, fractions rationnelles, puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus.

La formule de Leibniz, très proche de la formule du binôme de Newton, exprime la dérivée n -ième d'un produit à d'aide des dérivées successives des composantes.

Proposition 5.18. — ***Formule de Leibniz***
Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur un intervalle I , alors le produit fg est n fois dérivable sur I et :
$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$.

5.5 Formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Lagrange du nom du mathématicien Brook Taylor (1685-1731), qui l'établit en 1712, donne une approximation d'une fonction plusieurs fois dérivables au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. C'est une généralisation du théorème des accroissaments finis.

Théorème 5.19. — ***Formule de Taylor-Lagrange.***
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothsès suivantes :
– f est de classe C^n sur $[a,b]$,
– f admet une dérivée à l'ordre $n+1$ sur $]a,b[$,
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Définition 5.20. — *Le polynôme*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

est appelé polynôme de Taylor à l'ordre n de f en a.

Le terme $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange.

Preuve. On considère l'application φ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

On peut choisir A tel que $\varphi(a) = 0$.

L'application φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Par ailleurs, on a pour tout $x \in]a, b[$:

$$\left(\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\right)' = -\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x)$$

En regroupant ces termes dans $\varphi'(x)$ on obtient :

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x)\right)$$

On en déduit que $A = f^{(n+1)}(c)$. ■

<u>**Différentes écritures de la formules de Taylor-Lagrange.**</u>

• Si $b = a + h$ on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)$$

où $0 < \theta < 1$.

• Si $a = 0$ et $b = x$, on obtient **la formule de Mac-Laurin** :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta h)$$

Exemple. $f(x) = e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Le polynôme de Taylor à l'ordre n de f en 0 est donné par :

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Soit x un réel non nul, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, x[$ (ou $]x, 0[$) tel que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

<u>**Inégalité de Taylor-Lagrange**</u>

Proposition 5.21. — *Supposons qu'il existe M tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$, alors :*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ceci généralise l'inégalité des accroissements finis.

Exemple. $\lim 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e.$
D'après la formule de Taylor-Lagrange , il existe $c \in]0,1[$ tel que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

On pour tout $x \in]0,1[,\ \ e^x \leq e$; d'où

$$\left| e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} \to 0$$

D'où le résultat.

5.6 Formule de Taylor-Young

Théorème 5.22. — ***Formule de Taylor-Young.***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application n fois dérivable en un point $a \in I$. Alors il existe une fonction ε définie sur un voisinage de a tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$
$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = x^n \varepsilon(x)$ *est appelé reste de Young.*

Preuve.
On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on sait que si f est dérivable en un point a alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a :
$f(x) = f(a) - (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$
Pour simplifier, on prend $a = 0$ dans toute la suite.
Supposons maintenant que le résultat soit vrai à l'ordre $n-1$. Soit $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Nous avons $R'(x) = f'(x) - T'{}_n(x)$
Or le polynôme de Taylor d'ordre $n-1$ de f' est exactement $T_n'(x)$:

$$f'(0) + \frac{f''(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f'^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} = \left(f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right)'$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que : $R_n'(x) = f'(x) - T_n'(x) = x^{n-1}\varepsilon(x)$.
Ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $|x| < \eta \implies \left| \frac{R_n'(x)}{x^{n-1}} \right| < \varepsilon$.
Fixons x dans l'intervalle $]0, \eta]$ et appliquons le théorème des accroissement finis à $R_n(x)$, sur l'intervalle $[0, x]$: $\exists c \in]0, x[$, $\quad R_n(x) = xR_n'(c)$. Alors :

$$\left| \frac{R_n(x)}{x^n} \right| = \left| \frac{R_n'(c)}{x^{n-1}} \right| \leq \left| \frac{R_n'(c)}{c^{n-1}} \right| < \varepsilon$$

Le raisonnement est le même pour $x \in [-\eta, 0[$. Nous avons donc montré que $\lim \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$. D'où le résultat, par récurrence. ■

Exemples.

1. La fonction $f(x) = e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ nous pouvons donc écrire la denière formule à n'importe quel ordre n.
Nous savons que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = e^x$; d'où $f^{(k)}(0) = 1$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Par exemple pour $n = 2$ on a $\quad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

2. Développement de $\sin x$ et $\cos x$:
La fonction $f(x) = \sin x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \end{array}$$

D'où la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$

De la même manière nous obtenons le développement de $\cos x$ à l'ordre 2 , $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)$.

Développement de $f(x) = \ln(1+x)$. On a

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln(1+x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} & f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} & f^{(3)}(0) = 2 \end{array}$$

Formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

Formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 3

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

Application : calcul de limites.

1. Calculer la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{x - \ln(1+x}{x^2}$.
On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$. D'où

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - x + \dfrac{x^2}{2} - x^2\varepsilon(x)}{x^2} = 1/2 + \varepsilon(x) \longrightarrow 1/2$$

Remarques.

1. La formule de Taylor-Lagrange est globale, elle est valable sur tout l'intervalle $[a, b]$. Elle est utile pour obtenir des majorations ou monorations de $f(x) - T_n(x)$ lorsque la dérivée d'ordre $n + 1$ est majorée ou minorée.
2. La formule de Taylor-Young est locale. Elle est valable au voisinage d'un point et permet par exemple de calculer une limite.

5.7 Exercices

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, et la dérivée.

$$\sqrt{1-2\sin x} \quad , \quad \sqrt{\frac{1+\ln x}{1-\ln x}} \quad , \quad \frac{1}{\cos\sqrt{x}} \quad , \quad \sin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2. a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |\, x \,|$.
- Montrer que f est continue en 0 mais que f n'est pas dérivable en 0.
- Donner l'exemple d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas dérivable en deux points donnés a et b.

b) On considère la fonction : $g(x) = \dfrac{x}{2+|\, x \,|}$. Montrer que cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une dérivée en $x=0$.

Exercice 3. Etudier la dérivabilité en zéro des fonctions suivantes

$$a)\ f(x) = \sqrt{4|x|+5x^2} \qquad b)\ g(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}} \qquad c)\ h(x) = x\sqrt{1-e^{-x^2}}$$

Exercice 4. Etudier la continuité , la dérivabilité et la continuité de la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = x^2\cos\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad , \quad f(0) = 0.$$

Exercice 5. Déterminer a et b pour que la fonction f suivante soit dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 \ \text{ si } x \geq 2 \\ (ax+b)^2 \ \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

Exercice 6.
a) Posons $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$. Déterminer des nombres réels a et b tels que

$$\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} \quad \text{pour tout } x \text{ différent de 1 et } -2$$

En déduire une expression de $f^{(n)}(x)$

b) Montrer que les dérivées n-ième des fonctions $sinus$ et $cosinus$ sont définies par :

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

Exercice 7. Etablir les inégalités suivantes :

$$a)\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |\, x \,| \qquad b)\forall (a,b) \in \mathbb{R_+}^* \times \mathbb{R_+}^* \quad (b \leq a) \implies \frac{a-b}{a} \leq \ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$$

$$c)\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad |\tan x| \geq |x| \qquad d)\forall x \geq 0 \quad x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $f'(0)$.
b) Justifier (sans calculer $f'(x)$) l'existence d'un réel $a \in]0, 2\pi[$, tel que $f'(a) = 0$.
c) Calculer $f'(x)$, étudier les variations de $x^2 f'(x)$ et en déduire que a est unique c.à.d que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution dans $]0, 2\pi[$.

Exercice 9. a) Montrer que pour tout nombre $x > 0$, on a les inégalités

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

c) Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, $(n \geq 1)$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

Exercice 10. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$, deux fois dérivables sur $]a, b[$ et soit $u \in]a, b[$.
a) Justifier l'existence d'un réel A tel que l'application φ définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - A(x - a)(x - b)$$

vérifie $\varphi(u) = 0$.
b) Justifier l'existence de $c_1 \in]a, u[$ et $c_2 \in]u, b[$ tels que $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$.
c) En déduire l'existence de $c \in]a, b[$ tel que

$$f(u) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(u - a) + \frac{1}{2}(u - a)(u - b)f''(c)$$

Exercice 11. a) Ecrire la formule de Taylor - Lagrange à l'ordre 2 en zéro pour une fonction f de classe C^3 dans $] - a, a[$ $(a > 0)$. b) Appliquer cette formule aux fonctions

$$f(x) = e^x \quad , \quad g(x) = \ln(1 + x) \quad , \quad h(x) = \sin x$$

c) Soit x un réel strictement positif. Montrer que l'on a :

$$\left|\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{3}$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

d) On approche $\sqrt[4]{10001}$ par $10,00025$. Donner un majorant de l'erreur commise, puis donner une valeur approchéee de $\sqrt[4]{10001}$ à 10^{-12} près. Indication : appliquer la formule de Taylot-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction $\sqrt[4]{x}$ sur l'intervalle $[10000, 10001]$

Exercice 12. a) Montrer qu'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

b) En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ se prolonge en une fonction $\widetilde{g}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $\widetilde{g}'(0)$.

Exercice 13. Soit $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1 - \mathrm{e}^x + \sin x$.
   Vérifier que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x)}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$
3. En déduire que $\tilde{f}$ est dérivable en 0, et préciser la valeur de $\tilde{f}'(0)$.

Exercice 14. *Sinus cardinal.* Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Etudier f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
c) Calculer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
d) En utilisant une machine, donner une valeur approchée du minimum de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
e) Démontrer que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est atteint sur l'intervalle $]\pi, \frac{3}{2}\pi[$.

EXERCICES DE RÉVISION

Exercice 1. Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y.

1) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(P_1) f est injective

(P_2) pour tout couple (A, B) de parties de X tel que $A \cap B = \emptyset$, on a $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 2. Soit f une application croissante sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, et A l'ensemble des x de $[0,1]$ vérifiant $f(x) \geq x$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure. On la note α. Justifier que $\alpha \in [0,1]$.
2. Montrer que pour tout x de A on a : $f(x) \leq f(\alpha)$. En déduire que $f(\alpha)$ est un majorant de A, et que α appartient à A.
3. Vérifier que si $\alpha = 1$ alors $f(\alpha) = \alpha$.
4. On suppose $\alpha \neq 1$. Montrer que $f(\alpha)$ est un minorant de $]\alpha, 1]$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha$
5. En déduire que toute application croissante de $[0,1]$ dans lui-même admet au moins un point fixe. (on appelle point fixe d'une application f, un réel x vérifiant $f(x) = x$).
6. Donner un exemple d'application décroisssante de $[0,1]$ dans lui-même n'admettant pas de point fixe.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \qquad u_n = S_n - 2\sqrt{n} \quad et \quad v_n = S_n - 2\sqrt{n-1}$$

1. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire l'existence d'un réel l (qu'on ne demande pas de calculer) tel que pour tout $n \geq 1$, on ait
$$l + \ 2\sqrt{n-1} \ \leq S_n \ \leq \ l + 2\sqrt{n}$$
3. Quelle est la limite de la suite $\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$?

Exercice 4 (*) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ et $v_n = \dfrac{S_n}{n}$.

1. Si (u_n) est bornée, montrer qu'il en est de même de la suite (v_n).
2. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Soit $\epsilon > 0$ fixé, et N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Montrer qu'on a pour $n > N$: $\dfrac{S_n}{n} - \ell = \dfrac{S_N - N\,\ell}{n} + x_n$ où $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n}(u_n - \ell)$
vérifie $|x_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite ℓ.

N.B. : ce résultat est appelé lemme de la convergence en moyenne de Cesaro.

Exercice 5. (*) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+$ une application à valeurs positives telle que :

$$\forall\varepsilon > 0 \ , \quad I_\varepsilon = \{x \in I,\ f(x) > \varepsilon\} \quad \text{est fini}$$

Montrer qu'en tout point $a \in I$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to a, x\neq a} f(x) = 0$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en a.

Exercice 6. Soient deux fonctions continues $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in [0,1]$: $0 < f(x) < g(x)$, et une suite (u_n) telle que $u_n \in [0,1]$ pour tout entier n. On se propose d'étudier la suite (v_n) telle que :

$$v_n = \left[\frac{f(u_n)}{g(u_n)}\right]^n$$

a) Montrer que la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue.
b) Montrer qu'il existe deux constantes $m,\ M$ tels que $0 < m \leq M < 1$ et tels que pour tout $x \in [0,1]$, $m \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq M$.
c) En déduire que le suite (v_n) est convergente, et calculer sa limite.

Exercice 7. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
- Montrer qu'il existe un réel $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = \cos\dfrac{a\pi}{2}$
- On suppose de plus que f est strictement croissante sur $[0,1]$. Montrer que le réel a est unique.
indication : considérer l'application $g(x) = f(x) - \cos\dfrac{x\pi}{2} \cdots$

Exercice 8. On considèe la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Etudier la continuité de f en 0.
   (b) Montrer que f est continue sur tout intervalle de la forme $\left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$ où n est un entier ≥ 1.
   (c) Montrer que f est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
   (d) Etudier la continuité de f aux points $\dfrac{1}{n}$(on pourra distinguer les deux cas $n = 1$ et $n > 1$)
   (e) Conclusion.
2. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $]1/5, +\infty[$

Exercice 9. Soit a un nombre réel et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$

1. Montrer que la suite $(|u_n|)$ est décroissante de limite 0.
2. Calculer u_2 lorsque $a = 1$.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = \sqrt{3}/6$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = f(x)$.

   a) Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère la suite définie ci-dessus. Montrer qu'on a pour tout n : $f(u_n) = f(a)$.
   En déduire que $f(a) = f(0)$.

   b) Qu'en déduit-on sur la fonction f ?

Exercice 10. Soit $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \tan x - x$.

1. Montrer que f est une bijection continue strictement croissante de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique nombre réel $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x_n = x_n + n$.
3. Quelle est la limite de $f^{-1}(x)$ quand x tend vers $+\infty$? En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{ln(1+x)} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

1. Montrer que f est continue en 0 .
2. On pose $g(x) = 2(e^x - 1 - ln(1+x)) + (x^2 - 2x)(e^x - 1)$.

   a) Montrer qu'on a : $(x+1)g'(x) = x^2 h(x)$ où h est une fonction que l'on précisera.

   b) Soit a un réel de $]0,1[$. Justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout $x \in [-a, a]$, on ait $\left|\dfrac{h(x)}{x+1}\right| \leq M$.

   c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'on a pour tout $x \in [-a, a]$: $|g(x)| \leq \dfrac{M}{3}|x|^3$.

   En déduire la limite de $\dfrac{g(x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

3. Quelle est la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{(x^2 - 2x)(e^x - 1)}{x^2}$?

En utilisant le résultat de 2.c), en déduire que la fonction f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application dérivable, vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Soit ϵ un réel > 0 donné.

1. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que pour tout $x > a$ on ait : $\dfrac{|f(x) - f(a)|}{x - a} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$

2. Montrer qu'il existe $b \in]a, +\infty[$ tel que pour tout $x \geq b$ on ait les inégalités :
$$|\frac{f(x)}{x}| \leq \frac{|f(x) - f(a)|}{x - a} + \frac{|f(a)|}{x - a} \leq \epsilon$$
3. Qu'en déduit-on sur la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$?

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Etudier la continuité , la dérivabilité et la continuité de la dérivée de la fonction f définie par
$$f(x) = x^n \sin\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad , \; f(0) = 0$$

Exercice 14. a) Montrer qu'il existe un unique nombre réel $l \in]0, 1[$ tel que $\cos l = l$.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.
b) Montrer que l'on a , $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $| u_{n+1} - l | \leq (\sin 1) | u_n - l |$.
d) Montrer que l'on a $| u_n - l | \leq (\sin 1)^n l$ pour tout n.
e) Conclusion.

Exercice 15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{1}{1 + 1^2} + \frac{2}{1 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{1 + n^2}$$
$$u_n = 2S_n - \ln\left(1 + (n + 1)^2\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2S_n - \ln\left(1 + n^2\right)$$

a) Pour $n \geq 1$, montrer en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x^2)$ les inégalités :
$$\frac{2(n + 1)}{1 + (n + 1)^2} \leq \ln(1 + (n + 1)^2) - \ln(1 + n^2) \leq \frac{2n}{1 + n^2}$$
b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note l leur limite commune (on ne demande pas de la calculer)
c) Quelles sont les limites des suites
$$(S_n)_{n\geq 1} \qquad \left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{S_n}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$$

Exercice 16. a) Déterminer le polynôme de Taylor T_n à l'ordre n en 0 de la fonction f définie sur $] - 1, +\infty[$
par $f(x) = \ln(1 + x)$.
Quelle valeur faut-il donner à n pour être sûr que
$$|\ln(x + 1) - T_n(x)| \leq 10^{-6} \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, 10^{-1}]?$$
b) Démontrer que
$$|\ln 2 - T_n(1)| \leq \frac{1}{n + 1}$$
et en déduire que la suite u_n définie par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$
est convergente et admet $\ln 2$ pour limite.