2008-2009

Université de Poitiers. SFA

Année 1 de la Licence de Sciences et Technologies

Corrigé de l'examen final de mai 2009 en Analyse Élémentaire.

Exo 2 (a) La fonction f est continue et dérivable sur R^* comme produit et composée de fonctions continues et dérivables.

De l'inégalité $f(x) \leq |x^3|$ pour tout $x \neq 0$, il suit que la limite à gauche ainsi que la limite à droite de f en 0 est 0. Puisque par définition $f(0) = 0$, la fonction est continue en 0.

(b) De plus, la quantité :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x^3)$$

est majorée par x^2. Elle tend donc vers 0 en 0. La fonction f est donc dérivable en 0 de dérivée nulle.

(c) En premier lieu. cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. E second lieu, la limite à droite vaut 1, la limite à gauche aussi, et $g(0) = 1$. La fonction est donc continue en 0. Elle est donc continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

(d) La fonction

$$|x - 2| + |x + 3|$$

vérifie cette condition.

(e) Comme

$$\sin(x) = x - 1/6x^3 + x^4\epsilon(x)$$

on a

$$\sin^2(x) = x^2 - 1/3x^4 + x^4\epsilon(x).$$

Or

$$\ln(x) = x - 1/2x^2 + 1/3x^3 - 1/4x^4 + x^4\epsilon(x).$$

En prenant la combinaison linéaire avec les coefficients adaptés des trois relations précédentes, on en déduit le DL suivant :

$$k(x) = 1/2x^3 - (1/3 + 1/4)x^4 + x^4\epsilon(x)$$

D'où

$$k(x)/x^2 = 1/2x - (1/3 + 1/4)x^2 + x^2\epsilon(x).$$

Cette dernière identité implique que k est dérivable en 0 de dérivée 1/2.

Exo 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[0, 1 - 1/n^2] \subset [0, 1[.$$

Donc

$$\cup_{n\in\mathbb{N}^*}[0, 1 - 1/n^2] \subset [0, 1[.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in [0, 1[$, il existe un entier n_0 tel que $x \leq 1/n_0^2$. D'où $x \in [0, 1 - 1/n_0^2]$, et

$$[0, 1[\subset \cup_{n\in\mathbb{N}^*}[0, 1 - 1/n^2].$$

En conclusion,

$$\cup_{n\in\mathbb{N}^*}[0, 1 - 1/n^2] = [0, 1[$$

La suite $n \mapsto e^{1/n}$ est décroissante. Donc $[0, e^{1/n}] \subset [0, e^{1/1}] = [0, e]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\cup_{n\in\mathbb{N}^*}[0, e^{1/n}] = [0, e]$$

Exo 4 (a) Le sup de la fonction $\frac{1}{1+x}$ sur $[0, 2]$ est 1. En appliquant l'IAF à $f(x) = \ln(1+x)$ sur $[0, 2]$, on obtient

$$ln(1 + 2) - ln(1 + 0) \leq 1 \times (2 - 0)$$

ce qui donne le résultat.

(b) La fonction $f(x) = \ln(1 + x) - x^2 + \cos(\pi x)$ est continue et vérifie $f(0) = 1$, $f(1) = \ln(2) - 2$ et $f(2) = \ln(3) + 1$. On démontre comme en **(a)** que $f(1) < 0$. Donc par le TVI, cette fonction admet une racine c sur $[0, 1]$ et une racine d sur $[1, 2]$.

(c) Par Rolle, appliqué à l'intervalle $]c, d[$, il existe une solution dans cet intervalle à l'équation $f'(x) = 0$. Or $]c, d[\subset [0, 2]$ et la dérivée de f est précisément $1/(1 + x) - 2x + \pi sin(\pi x)$. Le résultat en découle.

Exo 5 (a) On a

$$u_n^2 \leq f(u_n) \leq 1 + 1/n \leq 2$$

donc $|u_n| \leq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On peut extraire de u_n une suite convergente $n \mapsto u_{i_n}$ de limite c. Comme

$$f(u_{i_n}) \leq 1 + 1/i_n$$

et comme $n \mapsto i_n$ tend vers $+\infty$. On a, par préservation des inégalités larges par passage à la limite

$$f(c) \leq 1.$$

(c) Comme $f(2) \geq 4$, par le TVI appliqué à l'intervalle $[c, 2]$ (ou $[2, c]$), il existe une solution à l'équation $f(x) = 1$.