Appendice à l'exposé précédent : La filtration naturelle du mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}$ dans une variété compacte

M. Arnaudon

Résumé. — Étant donnés deux points x et y d'une variété riemannienne compacte M de dimension $d \geq 2$ et un mouvement brownien X issu de x, on prouve qu'il existe un mouvement brownien issu de y, qui rencontre presque sûrement X et qui engendre la même filtration. Avec une démonstration analogue à celle de l'exposé précédent, on en déduit que la filtration naturelle du mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}$ et à valeurs dans M est, à un changement de temps régulier près, égale à la filtration naturelle d'un mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et issu de 0.

1. Introduction

La filtration naturelle du mouvement brownien à valeurs dans le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et *indexé par la droite* $\mathbb{R}$ est une filtration brownienne au sens où tout changement de temps régulier (c'est-à dire déterministe, absolument continu ainsi que son inverse, et transformant $\mathbb{R}$ en $]0, \infty[$), en fait une filtration brownienne au sens usuel. Ce résultat est établi dans l'exposé précédent (proposition 3) par un argument de couplage de browniens sur le cercle. Le but de cet appendice est de l'étendre au cas où le cercle est remplacé par une variété riemannienne compacte de dimension supérieure ou égale à deux.

Nos énoncés seront repérés par des lettres, les énoncés numérotés renvoyant à l'exposé précédent.

Nous nous donnons donc une variété M de classe C^∞, riemannienne compacte, connexe, sans bords, de dimension finie d supérieure ou égale à 2. La définition des « circular Brownian motions » de l'exposé précédent se généralise sans difficulté :

DFINITION. — *Un processus $U = (U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ indexé par $\mathbb{R}$ et à valeurs dans M est un mouvement brownien pour une filtration $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ si pour tout s fixé, la restriction de U à $[s, \infty[$ est un mouvement brownien dans M pour la filtration $(\mathcal{H}_t)_{t\geq s}$.*

Un tel processus est aussi un mouvement brownien pour sa filtration naturelle ; c'est un processus stationnaire et toutes les variables aléatoires U_t ont la loi uniforme sur M, c'est-à-dire la probabilité $(1/V)\,\rho$, où ρ est la mesure riemannienne sur M et la constante de normalisation V est le volume $\rho(M)$.

Bien que cette propriété ne soit pas utilisée dans la suite, rappelons brièvement comment on peut l'établir :

Soit μ_t la loi de U_t. Pour $s < t$, l'équation de Chapman-Kolmogorov donne $\mu_t(dy) = \int_{x \in M} \mu_s(dx)\, p_{t-s}(x,y)\, \rho(dy)$, où p_t est le noyau de la chaleur sur $M \times M$ (avec la normalisation des probabilistes : l'opérateur de la chaleur est $\frac{1}{2}\,\Delta - \partial_t$) ; la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques dit que $p_t(x,y)$ est continu (et même C^∞) en (t,x,y) sur $]0,\infty[\times M \times M$ (voir par exemple Davies [D]). En particulier, $p_1(x,y)$ est continu sur $M \times M$, et, par compacité, borné par une constante C. L'équation de Chapman-Kolmogorov entraîne que la fonction continue $u_s(y) = \int \mu_{s-1}(dx)\, p_1(x,y)$ est une densité de μ_s par rapport à ρ. Cette fonction vérifie

$$\|u_s\|_{L^2} = \Big\| \int \mu_{s-1}(dx)\, p_1(x,\ .\ ) \Big\|_{L^2} \leq \int \mu_{s-1}(dx)\, \|p_1(x,\ .\ )\|_{L^2} \leq C.$$

Mais, par compacité et connexité, les fonctions harmoniques sont constantes, et la projection dans L^2 de u_t sur l'espace des fonctions harmoniques est la constante $1/V$. La propriété de trou spectral du laplacien (voir par exemple Berger, Gauduchon et Mazet [B,G,M]) donne

$$\|\, u_t - (1/V)\|_{L^2} \leq e^{-\lambda_1(t-s)} \|\, u_s - (1/V)\|_{L^2} \leq \big(C + \|1/V\|_{L^2}\big)\, e^{-\lambda_1(t-s)}\ ,$$

où $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre non nulle de $-\frac{1}{2}\,\Delta$. En faisant tendre s vers $-\infty$, on obtient $u_t = 1/V$.

Appelons filtration brownienne à d dimensions (indexée par $\mathbb{R}_+$) la filtration naturelle d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de 0, et filtration brownienne à d dimensions indexée par $\mathbb{R}$ toute filtration qui s'en déduit par un changement de temps régulier. Étendons de même à $\mathbb{R}^d$ et à M en fixant une origine $O \in M$, la définition des mouvements browniens tronçonnés (« chopped Brownian motions »). Il est clair que la proposition 2 reste vraie lorsque l'on y remplace « filtration brownienne » par « filtration brownienne à d dimensions ». De même, on peut énoncer l'analogue du lemme 1 : la filtration engendrée par un mouvement brownien tronçonné dans $\mathbb{R}^d$, ou par un mouvement brownien tronçonné dans M, est une filtration brownienne à d dimensions. La preuve est identique, et le passage de $\mathbb{R}^d$ à M se fait à l'aide du développement stochastique, après avoir fixé une isométrie $\mathbb{R}^d \to T_O M$.

Pour démontrer que la filtration naturelle de tout mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}$ et à valeurs dans M est une filtration brownienne de dimension d (proposition E), nous allons procéder de façon analogue à l'exposé précédent. Comme dans le lemme 2, nous commencerons par établir un résultat de couplage dans une même filtration de mouvements browniens issus de points différents (proposition A). Il faudra distinguer le comportement au voisinage du cutlocus (lemme B) et le comportement en dehors de ce voisinage (lemme D).

Contrairement à la première moitié de la proposition 3, nous n'étendrons pas aux variétés la seconde moitié. En effet, lorsque M n'a aucune structure particulière (telle que groupe de Lie ou espace symétrique), nous ne voyons pas comment définir la filtration des innovations de façon intrinsèque, sans faire intervenir une structure supplémentaire, par exemple le choix (non canonique !) d'un champ mesurable de repères.

Dans la suite, la différentielle d'Itô d'une semimartingale X à valeurs dans M sera notée $d_\Gamma X$. Elle admet une décomposition canonique en partie martingale et partie à variation finie, qui seront notées respectivement $d_m X$ et $\tilde{d}_\Gamma X$. En coordonnées locales, si $dX^i = dN^i + dA^i$ où N^i est une martingale locale réelle et A^i un processus à variation finie, et si on désigne par Γ^k_{ij} les symboles de Christoffel de la connexion, on a

$$d_\Gamma X = \left(dX^i + \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk} d{<}X^j, X^k{>} \right) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$d_m X = dN^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad \tilde{d}_\Gamma X = \left(dA^i + \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk} d{<}X^j, X^k{>} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Formellement, $d_\Gamma X$, $d_m X$ et $\tilde{d}_\Gamma X$ sont des vecteurs tangents au point X (voir [M]). Si M' est une autre variété avec connexion, si e est une section C^1 du fibré $TM' \otimes (TM)^*$ au-dessus de $M \times M'$ (pour $(x,y) \in M \times M'$, $e(x,y)$ est une application linéaire de $T_x M$ dans $T_y M'$) et X est une semimartingale dans M, alors l'équation d'Itô

$$d_\Gamma Y = e(X,Y) d_\Gamma X$$

a une unique solution de condition initiale Y_0, à durée de vie éventuellement finie (voir par exemple [E1], [E2], [A,T]).

2. Couplage de mouvements browniens dans une variété riemannienne compacte

Il est bien connu qu'étant donnés deux points de M, il existe une filtration et deux mouvements browniens dans cette filtration, à valeurs dans M, issus chacun de l'un des points, et qui se rencontrent presque sûrement (voir [K] et [C]). La proposition qui suit est plus exigeante : elle demande que les filtrations naturelles des deux mouvements browniens soient égales.

PROPOSITION A. — *Il existe une constante* $\alpha > 0$ (*ne dépendant que de* M) *telle que pour tout* $y \in M$ *et pour tout mouvement brownien* $(X_t)_{t\geq 0}$ *dans* M, *il existe un mouvement brownien* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *dans* M *vérifiant les quatre propriétés suivantes*:

(*i*) $Y_0 = y$;

(*ii*) Y *est indépendant de* X_0 ;

(*iii*) *les processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(X_0, Y_t)_{t\geq 0}$ *engendrent la même filtration*;

(*iv*) *notant* S *le temps d'arrêt* $\inf\{t,\ X_t = Y_t\}$, *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}[S \leq n] > 1 - (1-\alpha)^n$$

et $Y = X$ *sur* $[S, \infty[$. *En particulier,* $\mathbb{P}[S < \infty] = 1$.

Pour établir cette proposition, on utilise deux lemmes. Le premier permet de construire Y au voisinage du cutlocus. La notation $\beta((x,y),r)$ désigne la boule centrée en $(x,y)\in M\times M$ et de rayon $r>0$.

LEMME B. — *Il existe trois constantes $\varepsilon_h>0$, $\varepsilon>0$ et $\alpha_h>0$ ne dépendant que de M, telles que pour toute filtration $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, pour toute v.a. $\mathcal{F}_0$-mesurable $\mathscr{Y}$ à valeurs dans M et pour tout $\mathcal{F}$-mouvement brownien $(X_t)_{t\geq 0}$, il existe un mouvement brownien $(Y_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes:*

(i) $Y_0=\mathscr{Y}$;

(ii) conditionnellement à Y_0, Y est indépendant de X_0 ;

(iii) les processus $(X_t,Y_0)_{t\geq 0}$ et $(X_0,Y_t)_{t\geq 0}$ engendrent la même filtration;

(iv) notant $T=\inf\left\{t>0,\ (X_t,Y_t)\notin\beta\big((X_0,Y_0),\varepsilon_h\big)\right\}$ et pour un ouvert A de $M\times M$, $T^A=\inf\left\{t\geq 0,\ (X_t,Y_t)\notin A)\right\}$, si A est de mesure inférieure à ε, alors

$$\mathbb{P}\left[T^A<T\wedge 1/2\right]>\alpha_h.$$

La démonstration va reposer sur la construction d'une diffusion hypoelliptique (X,Y) dans $M\times M$, dont les deux composantes X et Y sont des mouvements browniens, et telle que les trois processus X, Y et (X,Y) aient une même filtration naturelle. Pour cela, on a besoin du lemme suivant.

LEMME C. — *Soit $(a,b)\in M\times M$. Il existe un voisinage ouvert $\mathscr{B}$ de (a,b) et d champs de vecteurs $W_1,\dots,W_d$ définis sur $\mathscr{B}$ vérifiant les propriétés suivantes:*

(i) notant $W_i=(A_i,B_i)$, pour tout $(x,y)\in\mathscr{B}$, $(A_1(x,y),\dots,A_d(x,y))$ est une base orthonormale de T_xM et $(B_1(x,y),\dots,B_d(x,y))$ est une base orthonormale de T_yM ;

(ii) pour tout $(x,y)\in\mathscr{B}$, Lie$(W_1,\dots,W_d)(x,y)=T_{(x,y)}M\times M$, où Lie$(W_1,\dots,W_d)$ désigne l'algèbre de Lie engendrée par $W_1,\dots,W_d$.

Démonstration du lemme C. — On considère tout d'abord le cas $d=3$. Soit $(a,b)\in M\times M$, et soit $\big(A_1(a),A_2(a),A_3(a)\big)$ une base orthonormale de T_aM. Pour x^1, x^2, x^3 au voisinage de 0, on la transporte parallèlement le long de $t\mapsto\exp(tA_1(a))$ de $t=0$ à $t=x^1$, puis le long de $t\mapsto\exp(tA_2(\exp(x^1A_1(a))))$ de $t=0$ à $t=x^2$, puis le long de $t\mapsto\exp(tA_3(\exp(x^2A_2(\ \exp(x^1A_1(a))))))$ de $t=0$ à $t=x^3$. On obtient ainsi des coordonnées (x^1,x^2,x^3) centrées en a. On effectue la même construction au voisinage de b, et on note C_1, C_2 et C_3 les champs de vecteurs obtenus, (y^1,y^2,y^3) les coordonnées. En a, les dérivées covariantes $\nabla_{A_i}A_j$ s'annulent, ainsi que $\nabla_{A_1}\nabla_{A_1}A_2$ et $\nabla_{A_1}\nabla_{A_2}A_1$ Par conséquent, les crochets $[A_i,A_j]$ et $[A_1,[A_1,A_2]]$ s'annulent aussi. Il en va de même en b avec les vecteurs C_i. On définit ensuite au voisinage de (a,b)

$$W_1=(A_1,\cos x^1\cos x^2C_1+\sin x^1\cos x^2C_2+\sin x^2C_3),$$

$$W_2=(A_2,-\sin x^1C_1+\cos x^1C_2),$$

$$W_3=(A_3,-\cos x^1\sin x^2C_1-\sin x^1\sin x^2C_2+\cos x^2C_3).$$

La propriété (i) est facile à vérifier. D'après les remarques ci-dessus sur l'annulation des crochets, au point (a,b), $\Big(W_1,\ W_2,\ W_3,\ [W_1,W_2],\ [W_1,[W_1,W_2]],\ [W_2,W_3]\Big)$ est égal à

$$\Big((A_1,C_1),\ (A_2,C_2),\ (A_3,C_3),\ (0,-C_1-C_3),\ (0,-C_2),\ (0,-C_1)\Big).$$

C'est une famille génératrice de $T_{(a,b)}M\times M$. Par continuité, on déduit que $\Big(W_1,\ W_2,\ W_3,\ [W_1,W_2],\ [W_1,[W_1,W_2]],\ [W_2,W_3]\Big)(x,y)$ engendre $T_{(x,y)}M\times M$ pour (x,y) dans un voisinage de (a,b), d'où la propriété (ii).

Pour les autres valeurs de d, on conserve la construction des A_i et des C_i en remplaant les 3 transports parallèles par d transports parallèles. Si d est pair, on construit les W_j par couples en posant

$$W_{2i+1}=(A_{2i+1},\cos x^{2i+1}C_{2i+1}+\sin x^{2i+1}C_{2i+2})$$

et

$$W_{2i+2}=(A_{2i+2},-\sin x^{2i+1}C_{2i+1}+\cos x^{2i+1}C_{2i+2}).$$

Avec les mêmes calculs que plus haut, on vérifie alors qu'au point (a,b),

$$\Big(W_{2i+1},\ W_{2i+2},\ [W_{2i+1},W_{2i+2}],\ [W_{2i+1},[W_{2i+1},W_{2i+2}]]\Big)$$

est égal à

$$\Big((A_{2i+1},C_{2i+1}),\ (A_{2i+2},C_{2i+2}),\ (0,-C_{2i+1}),\ (0,-C_{2i+2}),\Big).$$

Si d est de la forme $2n+3$, on construit n couples comme ci-dessus et les trois derniers W_j comme en dimension 3, en remplaant les indices j par $2n+j$. Dans tous les cas, (i) est facile à vérifier et $\mathrm{Lie}(W_1,\dots,W_d)(a,b)=T_{(a,b)}M\times M$, donc pour tout (x,y) dans un voisinage $\mathscr{B}$ de (a,b), $\mathrm{Lie}(W_1,\dots,W_d)(x,y)=T_{(x,y)}M\times M$, d'où la propriété (ii). $\square$

Démonstration du lemme B. — On recouvre $M\times M$ par un nombre fini, disons n, d'ouverts $\mathscr{B}_1$, ..., $\mathscr{B}_n$ définis comme l'ouvert $\mathscr{B}$ du lemme C, puis on définit ε_h tel que toute boule $\beta((x,y),\varepsilon_h)$ ait son adhérence incluse dans l'un des ouverts du recouvrement.

On se place sur l'événement $\big\{\beta((X_0,Y_0),\varepsilon_h)\subset\mathscr{B}_1\big\}$. On se contente de construire (X,Y) jusqu'au premier temps de sortie T de $\beta((X_0,Y_0),\varepsilon_h)$, un prolongement après ce temps ne pose pas de difficulté.

Pour $(x,y)\in\mathscr{B}_1$, on note $W(x,y)$ l'application linéaire $\mathbb{R}^d\to T_{(x,y)}M\times M$ qui à $(\zeta^1,\dots,\zeta^d)$ associe $\sum_{i=1}^d\zeta^iW_i(x,y)$. On a $W(x,y)=(A(x,y),B(x,y))$, où $A(x,y)$ est une isométrie de $\mathbb{R}^d$ dans T_xM, et $B(x,y)$ est une isométrie de $\mathbb{R}^d$ dans T_yM. On définit le mouvement brownien Y par $Y_0=\mathscr{Y}$ et

$$d_\Gamma(X,Y)=W(X,Y)A(X,Y)^{-1}d_\Gamma X.$$

Si on note $W = (A, B)$, les processus X et Y satisfont les équations différentielles

$$d_\Gamma Y = B(X, Y)A(X, Y)^{-1}d_\Gamma X$$

et

$$d_\Gamma X = A(X, Y)B(X, Y)^{-1}d_\Gamma Y,$$

dont les coefficients sont de classe C^∞, donc (X^T, Y_0) et (X_0, Y^T) engendrent la même filtration. Ainsi on a (iii). Et comme Y est une martingale dans la filtration engendrée par (X_0, Y) et est aussi un mouvement brownien, on obtient (ii) grâce à la propriété de Markov. Pour établir l'inégalité de (iv), on peut conditionner par $(X_0, Y_0) = (x, y)$. Quitte à remplacer A par $A \cap \beta\big((x, y), \varepsilon_h\big)$, on peut supposer que A est inclus dans $\beta\big((x, y), \varepsilon_h\big)$. Comme $\mathrm{Lie}(W_1, \dots, W_d)$ engendre $TM \times TM$ en tout point, le processus (X, Y) est une diffusion hypoelliptique sur $[0, T[$. On veut ensuite utiliser un résultat de majoration des densités des diffusion hypoelliptiques dans $\mathbb{R}^{2d}$. Pour cela, à l'aide d'une carte et quitte à réduire la taille de $\mathscr{B}_1$, on identifie $\mathscr{B}_1$ à un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$ et on prolonge les champs de vecteurs à tout $\mathbb{R}^{2d}$ en des champs dont toutes les dérivées sont bornées, et on en rajoute éventuellement qui s'annulent sur $\mathscr{B}_1$ afin que la condition d'hypoellipticité de Hörmander soit réalisée. On dispose grâce à ces champs de vecteurs d'une diffusion hypoelliptique (X', Y') sur $\mathbb{R}^{2d}$, issue de (x, y) qui coïncide avec (X, Y) jusqu'au premier temps de sortie de $\mathscr{B}_1$. Or pour tout $\eta > 0$, il existe $t_\eta > 0$ tel que si $t \in]0, t_\eta[$, la probabilité de transition de $Z = (X', Y')$ vérifie $p_t(z, z') \le e^{\frac{\eta}{2t}} e^{-\frac{\mathrm{dist}^2(z,z')}{2t}}$ ([L], théorème 1 ; puisqu'on cherche une majoration, on peut prendre pour dist la distance euclidienne qui est plus petite que la distance hypoelliptique). Pour t fixé suffisamment petit (en particulier $t < 1/2$), la densité est donc majorée dans la boule de rayon ε_h par un nombre $M(t)$, et par conséquent la probabilité de sortir d'un ouvert quelconque de mesure ε avant l'instant t est minorée par $\alpha = 1 - \varepsilon M(t)$. On peut choisir t suffisamment petit pour que Z reste dans $\beta\big((x, y), \varepsilon_h\big)$ avant l'instant t avec une grande probabilité α', et ensuite ε suffisamment petit pour que α soit proche de 1. En posant $\alpha_h = \alpha + \alpha' - 1$, on a la propriété voulue pour le processus Z. Mais comme Z^T et $(X, Y)^T$ coïncident, on a le résultat recherché. ∎

On note Δ la diagonale de $M \times M$, et $\mathscr{C} = \cup_{x \in M} (\{x\} \times \mathscr{C}(x))$, où $\mathscr{C}(x) \subset M$ est la réunion du cutlocus et du "conjugate locus" de x. L'ensemble $\mathscr{C}$ est un compact de $M \times M$ de mesure nulle.

Avec le lemme suivant, on construit Y lorsque (X, Y) est en dehors d'un petit voisinage de $\mathscr{C}$.

Lemme D. — *Soit $W_{\mathscr{C}}$ un voisinage ouvert de $\mathscr{C}$. Il existe $\alpha_c > 0$ ne dépendant que de M, tel que pour toute filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$, pour toute v.a. $\mathcal{F}_0$-mesurable $\mathscr{Y}$ à valeurs dans M et pour tout $\mathcal{F}$-mouvement brownien $(X_t)_{t\ge0}$ tels que p.s. $(X_0, \mathscr{Y}) \in W_{\mathscr{C}}^c$, il existe un mouvement brownien $(Y_t)_{t\ge0}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes:*

(i) $Y_0 = \mathscr{Y}$;

(*ii*) *conditionnellement à* Y_0, Y *est indépendant de* X_0 ;

(*iii*) *les processus* $(X_t, Y_0)_{t\ge 0}$ *et* $(X_0, Y_t)_{t\ge 0}$ *engendrent la même filtration*;

(*iv*) *notant* $T = \inf\left\{t > 0,\ (X_t, Y_t) \in \mathscr{C})\right\}$ *et* $S = \inf\{t \ge 0,\ (X_t, Y_t) \in \Delta\}$, *on a*

$$\mathbb{P}\left[S < T \wedge 1/2\right] > \alpha_c.$$

Démonstration du lemme D. — Si on remplace $W^c_{\mathscr{C}}$ par un voisinage V_Δ arbitrairement petit de la diagonale de $M \times M$ et le temps $1/2$ par $1/4$, alors ce résultat peut se déduire de [C] théorème 1. Il nous suffit donc de construire un Y tel qu'avec une probabilité strictement positive α'_c, le processus (X, Y) issu de $(X_0, \mathscr{Y}) \in W^c_{\mathscr{C}}$ atteigne V_Δ avant d'atteindre le cutlocus, et avant le temps $1/4$. On construira Y à partir de X avec un couplage miroir. La clef de la démonstration consistera à trouver des coordonnées dans $M \times M$ telles que la première coordonnée soit la distance de x à y et telles que lorsqu'on exprime (X, Y) à l'aide des autres coordonnées, le mouvement brownien directeur soit indépendant du mouvement brownien directeur utilisé pour la distance de X à Y. Cette propriété n'est pas utile dans la démonstration de Cranston.

Soit SM le fibré unitaire, i.e. la sous-variété de TM formée des vecteurs de norme 1. Si $(x, y) \notin \mathscr{C}$, soit $m(x, y)$ le milieu de la géodésique minimisante reliant x à y, $2\rho(x, y)$ la distance de x à y et $u(x, y) := \dfrac{1}{\rho(x, y)} \exp^{-1}_{m(x,y)} y$. L'application

$$\begin{aligned} M \times M\backslash(\mathscr{C} \cup \Delta) &\to \mathbb{R}^*_+ \times SM \\ (x, y) &\mapsto (\rho(x, y), u(x, y)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme local d'application réciproque

$$(\rho, u) \mapsto (\exp(-\rho u), \exp(\rho u)).$$

Il existe $\varepsilon' > 0$ vérifiant la propriété suivante. Si $(x, y) \in W^c_{\mathscr{C}}$, alors $\mathscr{C}^c$ contient l'ouvert $T(x, y) =$

$$\{(x', y') \in M \times M,\ \mathrm{dist}\,(u(x', y'), u(x, y)) < \varepsilon' \text{ et } \varepsilon' < \rho(x', y') < \rho(x, y) + \varepsilon'\}.$$

Il suffit de construire (X, Y) jusqu'au temps de sortie de $T(X_0, Y_0)$, il sera ensuite facile de prolonger Y après ce temps. On va définir le couplage miroir et montrer que le mouvement brownien Y construit à partir de X avec un couplage miroir répond à la question. Pour cela, quitte à diminuer ε', il suffit de montrer qu'avec une probabilité strictement positive, le processus (X, Y) sort de $T(X_0, Y_0)$ pour la première fois au moment où $\rho(X, Y)$ atteint ε'. On notera F cet événement.

Si $(x, y) \in \mathscr{C}^c$, on désigne par $t \mapsto \gamma(t, x, y)$ $(t \in [0, 1])$ la géodésique minimisante qui vérifie $\gamma(0, x, y) = x$ et $\gamma(1, x, y) = y$, et pour $\jmath_0 \in T_xM$, $\jmath_1 \in T_yM$, on note $J(t, \jmath_0, \jmath_1) = T\gamma(t, x, y)(\jmath_0, \jmath_1)$ où $T\gamma$ est la dérivée par rapport à (x, y), $\dot{J}(t, \jmath_0, \jmath_1) = \frac{\nabla}{dt} J(t, \jmath_0, \jmath_1)$. On désigne par $\tau(x, y, \cdot)$ le transport parallèle de T_xM vers T_yM le long de $t \mapsto \gamma(t, x, y)$, $p(x, y, \cdot)$ la projection orthogonale d'un vecteur de T_xM parallèlement à $\dot\gamma(0,x,y)$ où $\dot\gamma$ est la dérivée par rapport à t, $\mathscr{M}(x,y,\cdot) = \tau(x,y,2p(x,y,\cdot)-I(x))$ l'application miroir ($I(x) : T_xM \to T_xM$ est l'application identité), et on pose $u'(x,y) = 2\rho(x,y)u(x,y)$.

On a alors $m(x,y) = \gamma(1/2,x,y)$, $u'(x,y) = \dot\gamma(1/2,x,y)$, et pour $v \in T_xM$,

$$J\left(\frac{1}{2}, v, \mathscr{M}(x,y,v)\right) = J\left(\frac{1}{2}, p(x,y,v), \tau(x,y,p(x,y,v))\right)$$

et

$$\begin{aligned}\dot J\left(\frac{1}{2}, v, \mathscr{M}(x,y,v)\right) =& \dot J\left(\frac{1}{2}, p(x,y,v), \tau(x,y,p(x,y,v))\right)\\ &- 2\tau(x,m(x,y),v-p(x,y,v)).\end{aligned}$$

On ne s'intéresse à (X,Y) qu'avant le temps de sortie T' de $T(X_0,Y_0)$. Le processus Y issu de $\mathscr{Y}$ est défini en résolvant l'équation d'Itô

$$d_\Gamma Y = \mathscr{M}(X,Y,d_\Gamma X).$$

Comme X satisfait l'équation

$$d_\Gamma X = \mathscr{M}(Y,X,d_\Gamma Y),$$

les processus $(X^{T'},Y_0)$ et $(X_0,Y^{T'})$ engendrent la même filtration. On obtient ainsi (iii). De plus, Y est une martingale dans la filtration engendrée par (X_0,Y) et un mouvement brownien, donc on obtient (ii) grâce à la propriété de Markov.

Pour établir (iv), on peut conditionner par $(X_0,Y_0) = (x,y)$. Posant $U_t = u(X_t,Y_t)$, $U'_t = u'(X_t,Y_t)$, $M_t = m(X_t,Y_t)$ et $\rho_t = \rho(X_t,Y_t)$, on obtient pour les parties martingales

$$\begin{aligned}d_mM =& J\left(\frac{1}{2}, d_mX, d_mY\right)\\ =& J\left(\frac{1}{2}, p(X,Y,d_mX), \tau(X,Y,p(X,Y,d_mX))\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_mU' =& \dot J\left(\frac{1}{2}, d_mX, d_mY\right)\\ =& \dot J\left(\frac{1}{2}, p(X,Y,d_mX), \tau(X,Y,p(X,Y,d_mX))\right)\\ &- 2\tau(X,M,d_mX - p(X,Y,d_mX)),\end{aligned}$$

et

$$d_m\rho = \langle U, -\tau(X,M,d_mX - p(X,Y,d_mX))\rangle . \qquad (1)$$

Comme

$$\nabla_mU = \frac{1}{2\rho}\nabla_mU' - \frac{d_m\rho}{\rho}U,$$

on obtient

$$\nabla_m U = \frac{1}{2\rho_t} \dot{J} \left(\frac{1}{2}, p(X, Y, d_m X), \tau(X, Y, p(X, Y, d_m X)) \right),$$

ce qui donne en définitive

$$\begin{aligned} d_m U = h_U J\Big(\frac{1}{2}, &p(X, Y, d_m X), \tau(X, Y, p(X, Y, d_m X))\Big) \\ &+ v_U \frac{1}{2\rho_t} \dot{J} \left(\frac{1}{2}, p(X, Y, d_m X), \tau(X, Y, p(X, Y, d_m X)) \right) \end{aligned} \tag{2}$$

où h_u (resp. v_u) : $T_{\pi(u)}M \to T_u TM$ désigne le relèvement horizontal (resp. vertical). De (1) on déduit que ρ_t peut s'écrire

$$d\rho_t = -dB_t + b(\rho_t, U_t)dt$$

où B est un mouvement brownien réel et $|b|$ est borné par une constante $C > 0$ qui ne dépend que de M et ε'. De (2) on déduit que dans des coordonnées centrées en $u(x, y)$,

$$dU_t^i = \sigma^i(\rho_t, U_t)dB_t' + c^i(\rho_t, U_t)dt,$$

où B' est un mouvement brownien de dimension $d - 1$ indépendant de B, σ et c sont bornés ainsi que leurs dérivées d'ordre 1, par une constante qui ne dépend que de M et ε'. Pour un temps t_0 suffisamment petit (en particulier $t_0 < 1/4$), la probabilité pour U de ne pas sortir d'un voisinage de U_0 de rayon ε' est supérieure à α_c'' proche de 1, ne dépendant que de M et ε'. D'autre part, avec une probabilité α_c''' strictement positive (éventuellement très petite), on a pour tout $t \in [0, t_0]$,

$$\rho_0 - B_t + Ct \le \rho_0 - \frac{\rho_0}{t_0} t + \varepsilon'.$$

Les deux événements étant indépendants, leur intersection a une probabilité supérieure à $\alpha_c' = \alpha_c'' \alpha_c'''$. Et comme

$$\rho_t \le \rho_0 - B_t + Ct$$

pour tout t inférieur au temps de sortie de $T(x, y)$, cette intersection est incluse dans F. Ceci achève la démonstration. $\square$

Démonstration de la proposition A. — Soit $(X_t)_{t \ge 0}$ un mouvement brownien. On choisit un voisinage ouvert $W_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$ de mesure inférieure au nombre ε donné par le lemme B.

On va définir par récurrence une suite de temps d'arrêt $(R_k)_{k \ge 0}$ et construire le processus Y sur les intervalles $[R_k, R_{k+1}]$.

On pose $R_0 = 0$. On a $(X, Y)_{R_0} = (X_0, y)$.

Soit $k \ge 0$. On suppose que R_j est construit pour $j \le k$ et que Y est construit jusqu'au temps d'arrêt R_k.

Si $Y_{R_k} = X_{R_k}$, alors on pose $Y_t = X_t$ pour $t \geq R_k$, $S = R_k$ et $R_n = R_k$ pour tout $n \geq k$.

Si $(X,Y)_{R_k} \in W^c_{\mathscr{C}}$, on construit Y par le lemme D (avec un couplage miroir) jusqu'au temps

$$R_{k+1} = \left(R_k + \frac{1}{2}\right) \wedge \inf\{t > R_k,\ (X,Y)_t \in \mathscr{C} \cup \Delta\}.$$

Si $(X,Y)_{R_k} \in W_{\mathscr{C}}$, on construit Y par le lemme B ((X,Y) est alors une diffusion hypoelliptique) jusqu'au temps

$$R_{k+1} = \left(R_k + \frac{1}{2}\right) \wedge \inf\{t > R_k,\ (X,Y)_t \notin W_{\mathscr{C}} \cap \beta((X,Y)_{R_k}, \varepsilon_h)\}$$

où ε_h est défini dans le lemme B (les champs de vecteurs servant à construire la diffusion hypoelliptique sont définis dans l'ouvert $\mathscr{B}_j$ de la preuve du lemme B, j étant le plus petit indice tel que $\beta((X,Y)_{R_k}, \varepsilon_h) \subset \mathscr{B}_j$).

On a ainsi construit (X,Y) jusqu'à un temps d'arrêt $R_{k+1} \leq 1/2 + R_k$. On peut donc recommencer la procédure en remplaçant k par $k+1$.

Partant de $W^c_{\mathscr{C}}$, le couplage a lieu en temps inférieur à $1/2$ avant de sortir de $\mathscr{C}^c$ avec une probabilité supérieure à α_c (lemme D). Partant de $W_{\mathscr{C}}$, (X,Y) entre dans $W^c_{\mathscr{C}}$ en temps inférieur à $1/2$ avec une probabilité supérieure à α_h (lemme B en prenant $A = W_{\mathscr{C}}$). On choisit $\alpha = \alpha_h \alpha_c$. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par X. Ainsi, pour $n \geq 0$, à l'aide d'un conditionnement par rapport à $\mathcal{F}_{R_n}$, on obtient $\mathbb{P}(S > R_{n+2}) < (1-\alpha)\mathbb{P}(S > R_n)$, donc pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(S \leq R_{2n}) > 1-(1-\alpha)^n$. Comme $R_{2n} \leq n$, cela donne $\mathbb{P}(S \leq n) > 1-(1-\alpha)^n$, et le processus Y ainsi construit est bien défini pour tout $t \geq 0$ et est un mouvement brownien dans la filtration engendrée par X.

La détermination de X à partir de Y et X_0 se fait de la même façon, donc X est un mouvement brownien dans la filtration engendrée par (X_0, Y) ; cela donne (iii). De plus, Y est une martingale dans la filtration engendrée par (X_0,Y) et un mouvement brownien, donc on obtient (ii) grâce à la propriété de Markov. $\square$

On peut maintenant établir le résultat principal.

Proposition E. — *Soit M une variété riemannienne de classe C^∞, compacte et connexe, de dimension $d \geq 2$. La filtration naturelle de tout mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}$ et à valeurs dans M est une filtration brownienne de dimension d.*

Démonstration. — On fixe une origine $O \in M$. On procède comme dans la preuve de la proposition 3 en apportant les modifications décrites dans la remarque qui suit cette preuve, et en remplaant le lemme 2 par la proposition A. Comme fonction $t \mapsto f(t)$ qui majore $t \mapsto \mathbb{P}(S \geq t)$, on peut choisir $f(t) = (1-\alpha)^{E(t)}$ où $E(t)$ est la partie entière de t. $\square$

References

[A,T] Arnaudon (M.), Thalmaier (A.) — *Stability of stochastic differential equations in manifolds*, Séminaire de probabilités XXXII, Lecture Notes in mathematics 1686, 1998, p. 188–214.

[B,G,M] Berger (M.), Gauduchon (P.), Mazet (E) — *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, t. **194**, 1971.

[C] Cranston (M.) — *Gradient estimates on manifolds using coupling*, Journal of Functional Analysis, t. **99**, 1991, p. 110–124.

[D] Davies (E.B.) — *Heat Kernels and Spectral Theory.* — Cambridge Tracts in Mathematics 92, Cambridge University Press, 1990.

[E1] Emery (M.) — *Stochastic calculus in manifolds.* — Springer, 1989.

[E2] Emery (M.) — *On two transfer principles in stochastic differential geometry*, Séminaire de Probabilités XXIV, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1426, Springer, 1989, p. 407–441.

[K] Kendall (W.S.) — *Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property*, Stochastics, t. **19**, 1986, p. 111–129.

[L] Léandre (R.) — *Majoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée*, Probability theory and Related Fields, t. **74**, 1987, p. 289–294.

[M] Meyer (P.A.) — *Géométrie stochastique sans larmes,*, Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Mathematics, Vol 850, Springer, 1981.

Marc Arnaudon
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
F 67 084 Strasbourg Cedex
arnaudon@math.u-strasbg.fr