

THÈSE de DOCTORAT de L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par **Anne Moreau**

**Quelques propriétés de l'indice
dans une algèbre de Lie semi-simple**

Soutenue le 20 octobre 2006, devant le jury composé de :

M. Michel Brion	examineur
M. Jean-Yves Charbonnel	directeur de thèse
M. Michel Duflo	examineur
M. Alexander Premet	examineur
M. Rupert Wei Tze Yu	rapporteur

Rapporteur non présent à la soutenance : **M. Dmitri Panyushev**

REMERCIEMENTS

Même si l'exercice des remerciements me semble quelque peu convenu, il me paraîtrait encore plus prétentieux de m'en affranchir.

Tout d'abord je remercie mon directeur de thèse Jean-Yves Charbonnel. Il a toujours été avec moi d'une remarquable disponibilité, tout en me laissant une grande autonomie. Il n'a jamais cessé de me faire confiance. Et c'est Rached Mneimné qui a tout mis en œuvre pour m'inciter à commencer cette thèse et m'a dirigé vers Jean-Yves.

Je remercie Rupert Yu pour l'intérêt qu'il a su porter dès le début à mon travail, pour sa lecture très attentive et ses commentaires avisés et constructifs. Je le remercie, ainsi que Dmitri Panyushev, d'avoir été rapporteur de ma thèse.

Je suis heureuse que Michel Duflo ait suggéré des prolongements au chapitre 2 de cette thèse. Je le remercie, ainsi qu'Alexander Premet et Michel Brion, d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai eu de nombreux échanges avec l'Université de Poitiers. Patrice Tauvel m'a conseillé l'utilisation du logiciel GAP pour les calculs liés aux algèbres de Lie exceptionnelles. Le problème de l'additivité de l'indice dans la décomposition d'Iwasawa m'a été suggéré par Mustapha Raïs. Je suis très touchée par les nombreux encouragements qu'ils m'ont tous les deux témoignés. Hervé Sabourin, Céline et Anne ont eux aussi contribué à l'accueil chaleureux que j'ai reçu là-bas.

Merci également à Oksana Yakimova pour les discussions sur le centre du centralisateur d'un élément nilpotent.

Je crois n'avoir jamais douté de mon goût pour la recherche mais j'avoue avoir légèrement appréhendé l'atmosphère de Chevaleret. Je suis donc d'autant plus heureuse de m'y être non seulement adaptée mais encore d'y avoir rencontré parmi mes meilleurs amis. Tout d'abord Claire : son amitié a été

l'un de mes plus grands soutiens ces dernières années. Mais aussi Giovanni, Luca, Pietro, Matthieu, Ingo et Ernesto. Je pense aussi à Florent, que je veux particulièrement remercier pour son extrême gentillesse durant mon séjour au Japon. Toutes ces personnes ont largement contribué à mon intégration.

Je n'ai pour l'instant mentionné que trop peu de femmes. Et pourtant, je n'en ai jamais autant apprécié ! Je remercie d'abord mes amies Claire, Maria et Maria-Paula. Je suis très heureuse d'avoir initié avec elles notre désormais célèbre et très convoité «séminaire Bourbakettes». Merci aussi à Esther, Rachel, Charlotte et Clotilde pour les charmantes soirées passées ensemble et merci à Béatrice pour la relecture d'une partie de ma thèse. Enfin, je ne peux oublier Sarah, qui est loin de m'avoir seulement aidée en anglais.

Je tiens par ailleurs à remercier Pierre Schapira, Giuseppe Dito, Elisha Falbel, Philippe Caldero, Elie Compoint, Valerio Toledano et Edward Frenkel, qui m'ont humainement beaucoup apporté.

Je souhaite également remercier toutes les personnes à Chevaleret dont la bonne humeur constante est un plaisir quotidien. Je veux parler d'Amadéo, Luca(s), Yann, Pierre et Andrea.

Si je dois quelque chose à ma famille, c'est précisément d'avoir su me donner l'impression de ne rien lui devoir.

Mes «vieux amis» enfin — Hervé, Hakim, Anatole, Célia, Bertrand, Olivier, Marielle, Aurélie et mon frère François — ont énormément compté pour moi. Je les remercie pour tous les moments agréables.

Je terminerai naturellement par Aurélien. Je suis malheureusement incapable d'exprimer à quel point je suis touchée par tout ce qu'il fait pour moi. Et je le serai probablement toujours...

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	3
Introduction	7
1. Indice du normalisateur du centralisateur	11
Introduction.....	11
1.1. Résultats préliminaires - Propriété (P_1)	12
1.2. Premières réductions.....	24
1.3. Démonstration du théorème principal dans le cas classique.....	31
1.4. Démonstration du théorème principal lorsque e vérifie (P_1) , pour e nilpotent non régulier de \mathfrak{g}	36
1.5. Étude de la propriété (P_1) — Fin de la démonstration.....	45
2. Indice et décomposition de Cartan	49
Introduction.....	49
2.1. Quelques précisions sur la structure de \mathfrak{g}_0	50
2.2. Construction «en cascade» de Kostant.....	52
2.3. Utilisation des transformations de Cayley.....	57
2.4. Formes linéaires stables et indice de \mathfrak{b}	59
2.5. Calculs explicites dans les algèbres de Lie simples réelles.....	66
2.6. Formes linéaires réductives et algèbres quasi-réductives.....	69
3. Calculs explicites effectués avec GAP4	79
3.1. Introduction.....	79
3.2. Rappels des résultats que l'on justifie avec GAP4.....	80
3.3. Présentation des calculs.....	82
Bibliographie	119

INTRODUCTION

Compte tenu de l'importance de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans la théorie des représentations, la correspondance bijective entre les \mathfrak{sl}_2 -triplets et les orbites nilpotentes d'une algèbre de Lie semi-simple donne à l'étude de ses éléments nilpotents une place essentielle dans la théorie des algèbres de Lie. J. Y. Charbonnel valide dans [4] une conjecture due à A. G. Elashvili concernant l'indice. On démontre dans le chapitre 1 de cette thèse, grâce aux techniques développées dans [4], une conjecture due à D. Panyushev concernant l'indice du normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent dans une algèbre de Lie semi-simple complexe. On résout dans le chapitre 2 un problème d'additivité de l'indice lié à la décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle. Cette thèse consiste donc en deux résultats, pour une large part indépendants, concernant des calculs d'indice dans une algèbre de Lie semi-simple.

Dans tout ce qui suit, le corps de base est le corps des complexes et les algèbres de Lie sont de dimension finie.

Si \mathfrak{q} est une algèbre de Lie, l'*indice de \mathfrak{q}* , noté $\text{ind } \mathfrak{q}$, est la dimension minimale des stabilisateurs dans \mathfrak{q} d'un élément de \mathfrak{q}^* pour l'action coadjointe. L'indice d'une algèbre de Lie complexe est donc un entier lié à la représentation adjointe. Il a été introduit par J. Dixmier dans [7] pour son importance dans la théorie des représentations. Le problème de l'indice apparaît également dans la théorie des invariants. En effet, si \mathfrak{q} est une algèbre de Lie algébrique de groupe algébrique correspondant Q , l'indice de \mathfrak{q} est le degré de transcendance du corps des fonctions rationnelles Q -invariantes sur \mathfrak{q}^* . Lorsque \mathfrak{q} est une algèbre de Lie réductive, \mathfrak{q} et \mathfrak{q}^* sont isomorphes et l'indice de \mathfrak{q} est son rang. L'étude de l'indice n'a donc d'intérêt que pour les algèbres de Lie non réductives. On se tourne alors naturellement vers les

sous-algèbres non réductives des algèbres de Lie semi-simples. Il y a au moins deux grandes familles de sous-algèbres dont on cherche à étudier l'indice : a) les centralisateurs d'un élément et sous-algèbres associées ; b) les sous-algèbres paraboliques et «assimilées» (radical nilpotent, sous-algèbres «*seaweed*», etc.).

Des résultats concernant les sous-algèbres de type a) ont été étudiés par A. G. Elashvili et D. Panyushev. A. G. Elashvili formule une conjecture concernant l'indice du centralisateur d'un élément dans une algèbre de Lie réductive. Cette conjecture est étudiée dans des cas particuliers dans [22]. O. Yakimova valide cette conjecture pour les algèbres de Lie simples classiques dans [34] et elle est enfin vérifiée en toute généralité par J.Y. Charbonnel. Il obtient précisément dans [4] le résultat suivant :

Théorème 1 ([4], **Théorème 5.5**). — *Si x est un élément d'une algèbre de Lie réductive \mathfrak{g} , alors l'indice du centralisateur \mathfrak{g}^x de x dans \mathfrak{g} est égal au rang de \mathfrak{g} .*

Les techniques développées pour la démonstration de ce théorème et le théorème 1 lui-même ont conduit à l'étude d'une conjecture de D. Panuyshev formulée dans [22]. Le Chapitre 1 de cette thèse consiste en la démonstration de cette conjecture, dont l'énoncé précis est le suivant :

Théorème 2. — *Soit e un élément nilpotent d'une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} . Alors on a*

$$\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),$$

où $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ est le normalisateur dans \mathfrak{g} du centralisateur \mathfrak{g}^e de e et où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est le centre de ce centralisateur.

Notons que l'une des étapes de cette démonstration repose sur des calculs explicites effectués avec le logiciel GAP4, que l'on présente dans le chapitre 3. Ces calculs concernent les orbites nilpotentes distinguées des algèbres de Lie exceptionnelles.

On trouve dans [21], [30], [31], [6] et récemment dans [11], des résultats concernant les sous-algèbres de type b). Le travail précédent mène vers d'autres questions liées à l'indice. Si \mathfrak{g}_0 est une algèbre de Lie semi-simple réelle, la décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$, issue d'une décomposition de Cartan, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$, donne la décomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$, où $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$. La question de savoir si l'indice est additif dans cette décomposition a été soulevée par M. Raïs dans [23]. Puisque les algèbres de Lie $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k}_0)^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}}$ sont réductives, leur indice est égal à leur rang et il s'agit de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. — *L'indice de $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_0)^{\mathbb{C}}$ est donné par la relation :*

$$\text{ind } \mathfrak{b} = \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k}.$$

On démontre ce théorème dans le chapitre 2. En particulier, on répond de façon positive à la question de M. Rais. Bien qu'il s'agisse de nouveau d'un calcul d'indice, les méthodes utilisées ici sont très différentes de celles utilisées dans le premier chapitre. P. Tauvel et R. W. T. Yu ont montré dans [30] et [31] comment la *construction de Kostant* et la notion de *forme linéaire stable* interviennent dans le calcul d'indice des sous-algèbres de type \mathfrak{b}). La sous-algèbre \mathfrak{b} est une sous-algèbre résoluble qui est contenue dans une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} . On reprend donc les outils utilisés dans [30] pour calculer l'indice d'une sous-algèbre de Borel dans une algèbre de Lie semi-simple. Cependant, puisqu'il s'agit ici d'algèbres de Lie semi-simples réelles, l'involution de Cartan associée à la décomposition de Cartan précédente va jouer un rôle essentiel. On donne en outre dans ce chapitre une caractérisation des algèbres de Lie semi-simples \mathfrak{g} pour lesquelles la sous-algèbres \mathfrak{b} possède une forme linéaire stable. Selon les remarques de M. Duflo, il s'avère plus intéressant de savoir si une algèbre de Lie est *quasi-réductive* que de savoir si elle possède une forme linéaire stable. On donne alors plutôt une caractérisation des algèbres de Lie semi-simples \mathfrak{g} pour lesquelles la sous-algèbres \mathfrak{b} est quasi-réductives. On obtient, à l'aide des méthodes précédentes, une caractérisation des sous-algèbres «seaweed minimales» quasi-réductives. Ce dernier travail est nouveau par rapport à ce qui a été fait dans [20] et prolonge des résultats obtenus dans [31].

Précisons que les chapitres 1, 2 et 3 correspondent, à quelques modifications près, à [18], [20] et [19] respectivement. Toutefois, la partie 2.6 du chapitre 2 est nouvelle par rapport à [20] et le paragraphe 1.1.2 est nouveau par rapport à [18]. Il vise à corriger une erreur commise dans [15] qui m'a été signalée par D. Panyushev et O. Yakimova. Le paragraphe 1.3 du chapitre 1 est par conséquent modifié aussi, compte tenu de cette erreur. Les deux premiers chapitres sont indépendants et le chapitre 3 est une annexe du premier.

CHAPITRE 1

INDICE DU NORMALISATEUR DU CENTRALISATEUR

Introduction

L'indice d'une algèbre de Lie algébrique complexe est la codimension minimale de ses orbites coadjointes. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple complexe, son indice, $\text{ind } \mathfrak{g}$, est égal à son rang, $\text{rg } \mathfrak{g}$. Plus généralement, l'indice d'une représentation V d'une algèbre de Lie algébrique complexe \mathfrak{q} est la codimension minimale de ses orbites sous l'action contragrédiente. On le note $\text{ind}(\mathfrak{q}, V)$.

Dans tout ce qui suit, \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple complexe de groupe adjoint G . On identifie \mathfrak{g} à son image par la représentation adjointe. Pour x dans \mathfrak{g} , on note \mathfrak{g}^x son centralisateur, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^x)$ le centre de \mathfrak{g}^x et $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^x)$ le normalisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{g}^x . Le but de ce chapitre est de donner une expression simple de l'indice de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$, pour e un élément nilpotent de \mathfrak{g} . L'algèbre $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ agit sur le sous-espace \mathfrak{g}^e par la représentation adjointe et on établit en outre une formule pour l'indice, $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e)$, du $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ -module \mathfrak{g}^e . Plus précisément, on se propose de montrer les deux résultats suivants, conjecturés par D. Panyushev dans [22], Conjectures 6.1 et 6.2 :

***Théorème 4.** — Soit e un élément nilpotent de \mathfrak{g} . Alors on a,*

$$\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

***Théorème 5.** — Soit e un élément nilpotent de \mathfrak{g} . Alors on a,*

$$\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Notons que les deux relations précédentes sont indépendantes du choix d'un représentant dans l'orbite de e sous l'action du groupe adjoint. Dans [22], D. Panyushev dresse une liste de cas où ces deux égalités sont satisfaites. Remarquons à ce propos qu'il obtient seulement les relations : $\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \text{ind } \mathfrak{g}^e - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \text{ind } \mathfrak{g}^e - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. La relation $\text{ind } \mathfrak{g}^e = \text{rg } \mathfrak{g}$

n'est en effet énoncée dans [22] que sous forme de conjecture ([22], Conjecture 3.2 d'Elashvili). Cette égalité est démontrée depuis en [4], Théorème 5.5. Dans tous ses exemples, D. Panyushev obtient ces relations en montrant que le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ a une orbite ouverte dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$, où $N_{\mathfrak{g}}(e)$ désigne le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$. Cette condition est, comme on aura l'occasion de le voir, suffisante mais ne permet pas de traiter tous les cas.

La première partie regroupe un certain nombre de résultats autour du normalisateur et du centre du centralisateur d'un élément nilpotent. On introduit en outre dans cette partie une propriété (P_1) qui interviendra dans la suite. On montre dans la deuxième partie que le théorème 4 est en fait une conséquence du théorème 5 et qu'obtenir l'identité du théorème 5 équivaut à montrer qu'une certaine matrice à coefficients dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}^e)$ est de rang maximal. On consacre les deux parties qui suivent à la démonstration de ce dernier point dans deux cas particuliers : lorsque \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple classique (partie 1.3) et lorsque l'élément e vérifie la propriété (P_1) (partie 1.4). La troisième partie utilise des propriétés géométriques des algèbres de Lie classiques tandis que la quatrième partie repose pour une large part sur des résultats exposés dans [4] par J.Y. Charbonnel. On étudie dans la dernière partie la propriété (P_1) pour achever la démonstration des théorèmes 4 et 5 dans le cas exceptionnel. La fin de la démonstration s'appuie sur des calculs explicites effectués à l'aide du logiciel GAP4. On trouve les détails de ces calculs dans le chapitre 3.

1.1. Résultats préliminaires - Propriété (P_1)

1.1.1. Soit e un élément nilpotent de \mathfrak{g} . Puisque e est nilpotent, le théorème de Jacobson-Morosov assure l'existence de deux éléments h et f dans \mathfrak{g} pour lesquels e, h, f satisfont les relations de \mathfrak{sl}_2 -triplet :

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f.$$

Si u est un sous-espace de \mathfrak{g} , on note u^\perp l'orthogonal de u pour la forme de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathfrak{g} . On va décrire l'orthogonal de certains sous-espaces. La proposition suivante est bien connue et sa démonstration est rappelée en [4], Lemme 5.6 :

Proposition 1.1.1. — *L'orthogonal de \mathfrak{g}^e est le sous-espace $[e, \mathfrak{g}]$ et on a la décomposition $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

Puisque $\mathfrak{g}^{f^\perp} = [f, \mathfrak{g}]$, la deuxième relation permet d'identifier le dual de \mathfrak{g}^e à \mathfrak{g}^f via la forme de Killing.

Le normalisateur $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ du centralisateur \mathfrak{g}^e de e est, par définition, l'ensemble des y de \mathfrak{g} tels qu'on ait l'inclusion : $[y, \mathfrak{g}^e] \subset \mathfrak{g}^e$. C'est aussi le normalisateur du centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ de \mathfrak{g}^e , comme on le vérifie facilement. Le centre et le normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent sont étudiés dans [3] et [29]. La proposition suivante rassemble un certain nombre de propriétés du normalisateur. On en trouve une démonstration dans [3], Lemme 10.2, Corollaire 11 et Théorème 18, ou dans [29], paragraphe 35.3.5 et 35.4.1.

Proposition 1.1.2. — *On a les relations suivantes :*

$$1) \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \{y \in \mathfrak{g} \mid [y, e] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\}.$$

$$2) \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)].$$

En particulier, $\dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, et on a l'égalité $[\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), e] = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ un sous-espace de \mathfrak{g}^e stable par adh . Les sous-espaces \mathfrak{g}^e et $[f, \tilde{\mathfrak{g}}]$ ont une intersection nulle d'après la proposition 1.1.1 et on s'intéresse au sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \tilde{\mathfrak{g}}]$ de \mathfrak{g} . Son orthogonal est décrit par la proposition suivante :

Proposition 1.1.3. — *Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ un sous-espace de \mathfrak{g}^e stable par adh , alors on a :*

$$(\mathfrak{g}^e \oplus [f, \tilde{\mathfrak{g}}])^\perp = [e, \tilde{\mathfrak{g}}^\perp].$$

Démonstration. — Il est clair que \mathfrak{g}^e est contenu dans l'orthogonal de $[e, \tilde{\mathfrak{g}}^\perp]$. Soit u dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, alors on a :

$$\langle [f, u], [e, \tilde{\mathfrak{g}}^\perp] \rangle = \langle [[f, u], e], \tilde{\mathfrak{g}}^\perp \rangle = \langle -[h, u], \tilde{\mathfrak{g}}^\perp \rangle = \{0\},$$

car $[h, u]$ appartient à $\tilde{\mathfrak{g}}$, puisque $\tilde{\mathfrak{g}}$ est stable par adh . On a ainsi montré que le sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \tilde{\mathfrak{g}}]$ est contenu dans l'orthogonal de $[e, \tilde{\mathfrak{g}}^\perp]$. Calculons les dimensions des deux sous-espaces :

$$\begin{aligned} \dim (\mathfrak{g}^e \oplus [f, \tilde{\mathfrak{g}}])^\perp &= \dim \mathfrak{g} - (\dim \mathfrak{g}^e + \dim [f, \tilde{\mathfrak{g}}]) \\ &= \dim \mathfrak{g} - (\dim \mathfrak{g}^e + (\dim \tilde{\mathfrak{g}} - \dim(\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f))) \\ &= \dim \tilde{\mathfrak{g}}^\perp - (\dim \mathfrak{g}^e - \dim(\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f)) \end{aligned}$$

et,

$$\dim([e, \tilde{\mathfrak{g}}^\perp]) = \dim \tilde{\mathfrak{g}}^\perp - \dim(\tilde{\mathfrak{g}}^\perp \cap \mathfrak{g}^e).$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dim(\tilde{\mathfrak{g}}^\perp \cap \mathfrak{g}^e) &= \dim(\tilde{\mathfrak{g}} + (\mathfrak{g}^e)^\perp)^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim(\tilde{\mathfrak{g}} + (\mathfrak{g}^e)^\perp) \\ &= \dim \mathfrak{g} - \dim \tilde{\mathfrak{g}} - \dim(\mathfrak{g}^e)^\perp + \dim(\tilde{\mathfrak{g}} \cap (\mathfrak{g}^e)^\perp) \\ &= \dim \mathfrak{g}^e - (\dim \tilde{\mathfrak{g}} - \dim \tilde{\mathfrak{g}} \cap [e, \mathfrak{g}]) \\ &= \dim \mathfrak{g}^e - \dim \tilde{\mathfrak{g}}_0, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ est le sous-espace propre pour $\text{ad}(h)$ associé à la valeur propre 0. D'autre part, $\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f = \tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}^e = \tilde{\mathfrak{g}}_0$. Par suite les deux sous-espaces $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \tilde{\mathfrak{g}}]$ et $[e, \tilde{\mathfrak{g}}^\perp]$ sont de même dimension et la proposition s'ensuit. \square

À l'aide de la proposition précédente, on retrouve l'orthogonal de sous-espaces connus. Lorsque le sous-espace $\tilde{\mathfrak{g}}$ est nul, on retrouve l'orthogonal de \mathfrak{g}^e . D'après [22], Théorème 2.4, on dispose de la décomposition $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^f] = \mathfrak{g}$. On en déduit que l'orthogonal de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est le sous-espace $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^e]$. La proposition précédente appliquée à $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ permet alors de décrire l'orthogonal de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$:

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)^\perp = (\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)])^\perp = [e, [\mathfrak{g}^e, \mathfrak{g}]].$$

On a utilisé la proposition 1.1.2 pour la première égalité. Enfin, la proposition 1.1.1 et la proposition précédente, appliquées à $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^e$, donnent l'orthogonal du sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}^e]$. Ce dernier sous-espace interviendra à plusieurs reprises dans la suite. On a :

$$(\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}^e])^\perp = [e, [e, \mathfrak{g}]].$$

On termine cette partie par l'introduction d'une propriété (P_1) :

Définition 1.1.4. — On note \mathfrak{z}_{\max} le sous-espace propre de la restriction de adh à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ relativement à sa plus grande valeur propre. On dira que e vérifie la propriété (P_1) si, pour tout élément non nul v de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, le sous-espace \mathfrak{z}_{\max} est contenu dans le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], v]$.

Il est clair que si e vérifie la propriété (P_1) , il en est de même de tous les éléments de l'orbite de e sous l'action du groupe adjoint. On dira qu'une orbite nilpotente de \mathfrak{g} vérifie la propriété (P_1) si l'un de ses représentants la vérifie.

1.1.2. On étudie dans ce paragraphe le centre du centralisateur d'un élément nilpotent dans une algèbre de Lie simple classique. Ce paragraphe, nouveau par rapport à [18], vise à corriger une erreur commise dans [15] qui m'a été signalée par D. Panyushev. Ces résultats interviennent dans la partie 1.3, il est donc nécessaire de donner ici un énoncé correct. Notons que cette erreur a été observée puis corrigée dans [33] par O. Yakimova. On présente ici une démonstration faite indépendamment de celle de O. Yakimova.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple classique et e un élément nilpotent de \mathfrak{g} . Soit $\{e, h, f\}$ un \mathfrak{sl}_2 -triplet contenant e . La sous-algèbre $\mathfrak{s} = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f$ est alors isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

On considère le sous-espace $\tilde{\mathfrak{z}}$ de \mathfrak{g} engendré par les puissances de e . Autrement dit, on a :

$$\tilde{\mathfrak{z}} = \{\text{polynômes en } e\} \cap \mathfrak{g}.$$

Alors clairement $\tilde{\mathfrak{z}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ stable par adh . Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, le sous-espace $\tilde{\mathfrak{z}}$ est engendré par les puissances de e . Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ ou \mathfrak{sp}_{2n} , le sous-espace $\tilde{\mathfrak{z}}$ est engendré par les puissances impaires de e . Il est bien connu que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, alors les sous-espaces $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\tilde{\mathfrak{z}}$ coïncident.

On désigne par V un espace vectoriel de dimension $N \geq 5$ muni d'une forme bilinéaire b symétrique ou alternée non dégénérée. On note $\mathfrak{g}(V)$, ou plus simplement \mathfrak{g} lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'algèbre de Lie simple formée des endomorphismes x de V qui vérifient :

$$b(xv, w) + b(v, xw) = 0,$$

pour tout v, w dans V . Ainsi, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_N$ si b est symétrique et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N$ si b est alternée. D'après [28], il existe une décomposition de V de la forme,

$$(1) \quad V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m,$$

où les sous-espaces V_i satisfont aux conditions suivantes :

- (i) les sous-espaces V_1, \dots, V_m sont deux à deux orthogonaux pour b et $b|_{V_i}$ est non dégénérée, pour $1 \leq i \leq m$,
- (ii) pour $1 \leq i \leq m$, ou bien V_i est un \mathfrak{s} -module simple et on dira que V_i est de *type I*, ou bien il existe deux \mathfrak{s} -modules simples W_i et W'_i de même dimension tels que $V_i = W_i \oplus W'_i$, avec $b|_{W_i} = b|_{W'_i} = 0$, et on dira que V_i est de *type II*.

Soit i dans $\{1, \dots, m\}$. On note $\varepsilon_i d_i$ la dimension de V_i , avec $\varepsilon_i = 1$ si V_i est de type I et, $\varepsilon_i = 2$ si V_i est de type II. La partition $\mathbf{d}(e)$ de N associée à l'élément nilpotent e est alors $[(d_1)^{\varepsilon_1}, \dots, (d_m)^{\varepsilon_m}]$. Quitte à réordonner, on peut supposer en outre, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$. Si V_i est de type I (resp. de type II), on fixe une base \mathcal{B}_i de V_i dans laquelle la matrice de $b|_{V_i}$ est l'identité (resp. $\begin{bmatrix} 0 & I_{d_i} \\ I_{d_i} & 0 \end{bmatrix}$). On note E_i (resp. H_i, F_i) la matrice dans la base \mathcal{B}_i de la restriction e_i (resp. h_i, f_i) à V_i de l'élément e (resp. h, f). On désignera encore, par abus de notations, e_i (resp. h_i, f_i) l'élément de \mathfrak{g} dont la restriction à V_i est e_i (resp. h_i, f_i) et la restriction à V_j est nulle, pour $j \neq i$. Soit enfin \mathcal{B} la base orthogonale de V obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ et E (resp. H, F) la matrice de e (resp. h, f) dans la base \mathcal{B} . D'après [28], si b est symétrique (resp. alternée) et si V_i est de type I alors d_i est impair (resp. pair).

Définition 1.1.5. — *Si b est symétrique, on dit que la partition $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*) si elle est de la forme, $d_1 \geq d_2 > d_3 \geq \cdots \geq d_m$, avec d_1, d_2 impairs.*

On note $\mathfrak{a}(V)$ (resp. $\mathfrak{m}(V)$), ou plus simplement \mathfrak{a} (resp. \mathfrak{m}) lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, le sous-espace de $\mathfrak{g}(V)$ formé des éléments de $\mathfrak{g}(V)$ dont

la matrice dans la base \mathcal{B} est de la forme, $\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix}$ (respectivement

$\begin{bmatrix} 0 & & R \\ & \ddots & \\ -R^t & & 0 \end{bmatrix}$). Les sous-espaces \mathfrak{a} et \mathfrak{m} sont stables par adh et on a,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$. On note en outre \mathfrak{a}^e et \mathfrak{a}^f (resp. \mathfrak{m}^e et \mathfrak{m}^f) les intersections de \mathfrak{a} (resp. \mathfrak{m}) avec \mathfrak{g}^e et \mathfrak{g}^f . On dispose alors des décompositions,

$$\mathfrak{g}^e = \mathfrak{a}^e \oplus \mathfrak{m}^e, \quad \mathfrak{g}^f = \mathfrak{a}^f \oplus \mathfrak{m}^f,$$

et,

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)) \oplus (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)).$$

Pour i dans $\{1, \dots, m\}$, posons :

$$\text{Jord}_{d_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ et,}$$

$$\text{Diag}_{d_i} = \begin{bmatrix} d_1 - 1 & & & & \\ & d_1 - 3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -d_1 + 3 & \\ & & & & -d_1 + 1 \end{bmatrix}.$$

Il existe une base \mathcal{C}_i de V_i dans laquelle les matrices de h_i et e_i sont Diag_{d_i} et Jord_{d_i} , si V_i est de type I, et dans laquelle les matrices de h_i et e_i sont $\begin{bmatrix} \text{Diag}_{d_i} & 0 \\ 0 & -\text{Diag}_{d_i}^t \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \text{Jord}_{d_i} & 0 \\ 0 & -\text{Jord}_{d_i}^t \end{bmatrix}$, si V_i est de type II.

Si \mathfrak{g}_λ désigne le sous-espace propre de adh associé à la valeur propre λ , pour λ dans \mathbb{Z} , alors il résulte de ce qui précède les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^e &\subset \sum_{0 \leq i \leq 2(d_1-2)} \mathfrak{g}_i, & \mathfrak{a}^f &\subset \sum_{0 \leq i \leq 2(d_1-2)} \mathfrak{g}_{-i}, \\ \mathfrak{m}^e &\subset \sum_{0 \leq i \leq d_1+d_2-2} \mathfrak{g}_i \quad \text{et,} & \mathfrak{m}^f &\subset \sum_{0 \leq i \leq d_1+d_2-2} \mathfrak{g}_{-i}. \end{aligned}$$

Lemme 1.1.6. — *L'intersection de \mathfrak{a} et de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est égale à $\tilde{\mathfrak{z}}$.*

Démonstration. — L'inclusion $\tilde{\mathfrak{z}} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est claire. Prouvons l'autre inclusion par récurrence sur m .

$m = 1$: il y a deux cas :

1^{er} cas : V_1 est de type I. Alors e est un élément régulier de \mathfrak{g} , donc $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) = \mathfrak{g}^e$ et $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) = \text{rk } \mathfrak{g}$. Puisque V_1 est de type I, $d_1 = 2s_1 + 1$ et $\dim \tilde{\mathfrak{z}} = s_1 = \text{rk } \mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) = \tilde{\mathfrak{z}}$.

2^{ème} cas : V_1 est de type II. Alors la matrice de $e = e_1$ dans la base \mathcal{B}_1 est de la forme,

$$E = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0^t \end{bmatrix},$$

où E_0 est un élément nilpotent régulier de \mathfrak{sl}_{d_1} . Soit x un élément de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Sa matrice dans la base \mathcal{B} est de la forme $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{bmatrix}$, avec $[A, E_0] = 0$.

Puisque E_0 est un élément nilpotent régulier, A est un polynôme en E_0 . Par suite x appartient à $\tilde{\mathfrak{z}}$.

$m = 2$: supposons d'abord b symétrique. On vérifie sans difficulté que les éléments de \mathfrak{g}^e sont les éléments de \mathfrak{g} dont la matrice dans la base \mathcal{B} est de la forme :

$$\begin{bmatrix} P_1(E_1) & R \\ -R^t & P_2(E_2) \end{bmatrix},$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes impairs et R une matrice de taille $\varepsilon_1 d_1 \times \varepsilon_2 d_2$ vérifiant la relation $E_1 R - R E_2 = 0$.

Soit x appartenant à l'intersection de \mathfrak{a} et de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Il résulte du cas $m = 1$ qu'il existe deux polynômes impairs P_1 et P_2 tels que la matrice de x dans la base \mathcal{B} soit de la forme, $\begin{bmatrix} P_1(E_1) & 0 \\ 0 & P_2(E_2) \end{bmatrix}$. Il s'agit de prouver que $P_2(E_2) = P_1(E_2)$ car alors $x = P_1(e)$ et x appartient à $\tilde{\mathfrak{z}}$. Puisque x appartient à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, x commute aux éléments dont la matrice dans la base \mathcal{B} est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & R \\ -R^t & 0 \end{bmatrix},$$

avec $E_1 R - R E_2 = 0$. On en déduit la relation, $P_1(E_1)R - R P_2(E_2) = 0$, pour toute matrice R telle que $E_1 R - R E_2 = 0$, d'où on tire la relation $(P_1(E_1) - P_2(E_2))R = 0$, pour toute matrice R telle que $E_1 R - R E_2 = 0$. Les matrices $P_1(E_1)$ et $P_2(E_2)$ s'écrivent sous la forme :

$$P_1(E_1) = a_{\left[\frac{d_1}{2}\right]}^{(1)} E_1^{2\left[\frac{d_1}{2}\right]-1} + \dots + a_1^{(1)} E_1 \text{ et,}$$

$$P_2(E_2) = a_{\left[\frac{d_2}{2}\right]}^{(2)} E_2^{2\left[\frac{d_2}{2}\right]-1} + \dots + a_1^{(2)} E_2,$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière sur \mathbb{Q} . On suppose par l'absurde que $P_2(E_2) \neq P_1(E_2)$ et on cherche à aboutir à une contradiction. Soit l le plus petit entier

de $\{1, \dots, \lfloor \frac{d_2}{2} \rfloor\}$ tel que $a_l^{(1)} \neq a_l^{(2)}$. L'existence de l provient de l'inégalité $d_1 \geq d_2$. Soit T la matrice de taille $d_1 \times d_2$ définie par la relation suivante :

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (2l)^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \ddots & & 1 \\ & & & & \ddots & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

On considère l'application linéaire r de V_2 dans V_1 dont la matrice dans les bases \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_1 est, T si V_1 et V_2 sont de type I, $\begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}$ si V_1 est de type II et V_2 de type I, $\begin{bmatrix} T & 0 \end{bmatrix}$ si V_1 est de type I et V_2 de type II et, $\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ si V_1 et V_2 sont de type II.

De la définition de l'entier l , il résulte que l'on a, $(P_1 - P_2)(e_1) = (a_l^{(1)} - a_l^{(2)})e_1^{2l-1} + \sum_{k>l} (a_k^{(1)} - a_k^{(2)})e_1^{2k-1}$, avec $(a_l^{(1)} - a_l^{(2)})$ non nul. On vérifie alors sans difficulté, compte tenu de l'expression des matrices de e_1 et e_2 dans les bases \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 respectivement, la relation : $(P_1 - P_2)(e_1)r \neq 0$. Par ailleurs, on montre sans peine que r satisfait à la relation $e_1r - re_2 = 0$, d'où il vient la relation, $P_1(e_1)r - P_2(e_1)r = 0$, d'après ce qui précède. On obtient ainsi la contradiction.

Supposons enfin b alternée. Pour $d = 2s$ dans \mathbb{N} , on pose $J_d = \begin{bmatrix} 0 & I_s \\ -I_s & 0 \end{bmatrix}$. Les éléments qui commutent à E sont de la forme

$$X = \begin{bmatrix} P_1(E_1) & A \\ -J_{\varepsilon_2 d_2} A^t J_{\varepsilon_1 d_1} & P_2(E_2) \end{bmatrix},$$

avec P_1 et P_2 deux polynômes impairs et A une matrice de taille $\varepsilon_1 d_1 \times \varepsilon_2 d_2$ vérifiant la relation $E_1 A - A E_2 = 0$. On raisonne alors exactement comme dans le cas symétrique.

On suppose le lemme démontré pour tout sous-espace régulier V' de V et tout élément nilpotent de $\mathfrak{g}(V')$ tel que le nombre de sous-espaces intervenant dans la décomposition (1) est strictement inférieur ou égal à m et on suppose $m \geq 3$. Soit x un élément dans l'intersection de \mathfrak{a} et de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. D'après le cas $m =$

1, la matrice de x dans la base \mathcal{B} est de la forme,
$$\begin{bmatrix} P_1(E_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_m(E_m) \end{bmatrix},$$

où P_1, \dots, P_m sont des polynômes impairs. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la restriction de e au sous-espace $V_2 \oplus \dots \oplus V_m$, on peut supposer $P_2 = \dots = P_m$. L'hypothèse de récurrence appliquée à la restriction de e à $V_1 \oplus V_2$ permet en outre de supposer $P_1 = P_2$. Par suite $x = P_1(e)$ et x appartient au sous-espace $\tilde{\mathfrak{z}}$. \square

On suppose que b est symétrique et que $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*). Alors V_1 et V_2 sont de type I. Soit S une matrice non nulle de taille $d_1 \times d_2$ satisfaisant aux relations, $E_1 S = 0$ et $S E_2 = 0$. On note z l'élément de \mathfrak{g} dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & S & 0 & \dots & 0 \\ -S^t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice de la restriction de z à $V_1 \oplus V_2$ dans la base $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ est, à un

scalaire non nul près, la matrice
$$\begin{bmatrix} & & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & \end{bmatrix}.$$
 Compte tenu de

l'expression de la matrice de la restriction de h à $V_1 \oplus V_2$ dans la base $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, on en déduit que z appartient au sous-espace $\mathfrak{g}_{d_1+d_2-2}$.

Lemme 1.1.7. — *Si b est symétrique et si $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*), alors z appartient à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. De plus, z est un vecteur propre pour adh associée à la valeur propre $d_1 + d_2 - 2$.*

Démonstration. — La dernière assertion du lemme est déjà connue. Prouvons la première assertion par récurrence sur m . Si $m = 2$, V_1 et V_2 sont de type I. Le centralisateur \mathfrak{g}^e de e dans \mathfrak{g} est décrit dans la démonstration du lemme précédent. Il est immédiat que la matrice Z commute avec les puissances de

E_1 et de E_2 . Il reste à montrer que Z commute avec les matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & R \\ -R^t & 0 \end{bmatrix},$$

où R est une matrice de taille $d_1 \times d_2$ vérifiant la relation $E_1R - RE_2 = 0$. Soit X une telle matrice. Prouvons que le crochet $[Z, X] = ZX - XZ$ est nul. Il s'agit de montrer que les deux relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} SR^t = RS^t \\ S^tR = R^tS \end{cases}$$

Montrons d'abord la première égalité. Ceci revient à montrer que la matrice carrée SR^t d'ordre d_1 est symétrique. Si cette matrice est nulle, le résultat est clair. On suppose que la matrice SR^t n'est pas nulle, alors il en est de même de sa transposée RS^t . De la relation $E_1S = 0$, on tire la relation : $E_1(SR^t) = 0$ et des relations $E_1R = RE_2$ et $E_2S^t = 0$, on tire la relation : $E_1(RS^t) = RE_2S^t = 0$. Les images des deux matrices SR^t et RS^t sont donc contenues dans le noyau de la matrice E_1 , qui est de dimension 1. Par suite, les deux matrices SR^t et RS^t sont de rang 1 et ont la même image. On note u l'endomorphisme de \mathfrak{gl}_{d_1} dont la matrice dans la base \mathcal{B}_1 est SR^t . Comme RS^t est la transposée de SR^t , la matrice RS^t représente l'endomorphisme adjoint u^* de u dans la base orthonormée \mathcal{B}_1 . De ce qui précède, il résulte que les endomorphismes u et u^* s'écrivent sous la forme $u = \varphi v$ et $u^* = \psi v$, avec v un vecteur non nul de V_1 et φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur V_1 . Pour tout x dans V_1 , on a l'égalité : $b(u(x), x) = b(\varphi(x)v, x) = \varphi(x)b(v, x)$. Or, par définition de l'adjoint, on a la relation : $b(u(x), x) = b(x, u^*(x)) = \psi(x)b(v, x)$. Ainsi, pour tout x non orthogonal à v , on a $\varphi(x) = \psi(x)$. Comme l'ensemble des vecteurs x de V_1 vérifiant la relation $b(x, v) \neq 0$ est un ouvert non vide de V_1 , les formes linéaires φ et ψ sont égales. On a obtenu l'égalité souhaitée : $SR^t = RS^t$. Un raisonnement similaire permet d'obtenir la deuxième relation.

On suppose le lemme démontré pour tout sous-espace régulier V' de V et tout élément nilpotent de $\mathfrak{g}(V')$ dont la partition associée a la propriété (*) et tel que le nombre de sous-espaces intervenant dans la décomposition (1) est strictement inférieur à m . On suppose $m \geq 3$. D'après l'hypothèse de récurrence, il suffit de prouver que Z commute avec les matrices de la forme,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{m-1} \\ -B_1^t & -B_2^t & \cdots & -B_{m-1}^t & A_m \end{bmatrix},$$

avec $E_i B_i = B_i E_m$, pour tout $1 \leq i \leq m-1$, et $[A_m, E_m] = 0$. Il est clair que

Z commute avec la matrice
$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{bmatrix},$$
 car m est supérieur ou égal

à 3. Il reste à prouver que Z commute avec les matrices

$$X_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & B_i \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -B_i^t & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

où B_i est une matrice de taille $\varepsilon_i d_i \times \varepsilon_m d_m$ satisfaisant à la relation $E_i B_i - B_i E_m = 0$. Le crochet $[Z, X_i]$ est nul pour $i \geq 3$. On note x_1 et x_2 les éléments de \mathfrak{g} dont les matrices dans la base \mathcal{B} sont X_1 et X_2 respectivement. On vérifie sans difficulté que la restriction à $V_2 \oplus V_m$ de l'élément $[z, x_1]$ est contenu dans le sous-espace $\mathfrak{m}(V_2 \oplus V_m)$. Par suite, $[z, x_1]$ est contenu dans le sous-espace $\mathfrak{m}(V_2 \oplus V_m)^{e|_{V_2 \oplus V_m}}$, qui est contenu dans le sous-espace $\sum_{0 \leq i \leq d_2 + d_m - 2} \mathfrak{g}_i$.

Or $[z, x_1]$ est contenu dans le sous-espace $\sum_{i \geq d_1 + d_2 - 2} \mathfrak{g}_i$, car z est un vecteur propre pour adh de valeur propre associée $d_1 + d_2 - 2$. On en déduit la relation, $[Z, X_1] = 0$, car $d_2 + d_m - 2 < d_1 + d_2 - 2$, puisque $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*). De même, la restriction à $V_1 \oplus V_m$ de l'élément $[z, x_2]$ appartient au sous-espace $\mathfrak{m}(V_1 \oplus V_m)^{e|_{V_1 \oplus V_m}}$. On déduit alors comme précédemment de l'inégalité $d_1 + d_m - 2 < d_1 + d_2 - 2$, la relation $[Z, X_2] = 0$. \square

Théorème 1.1.8. — *Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ ou \mathfrak{so}_n . Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ et si la partition $\mathbf{d}(e)$ associée à e a la propriété (*), alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) = \tilde{\mathfrak{z}} \oplus \mathbb{C}z$. Dans tous les autres cas, on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) = \tilde{\mathfrak{z}}$.*

Démonstration. — L'inclusion $\tilde{\mathfrak{z}} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ a toujours lieu et l'inclusion $\tilde{\mathfrak{z}} \oplus \mathbb{C}z \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, pour b symétrique et e tel que $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*), résulte du lemme 1.1.7. On prouve les autres inclusions par récurrence sur le nombre m de sous-espaces intervenant dans la décomposition (1).

Le cas $m = 1$ résulte du lemme 1.1.6 car alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

$m = 2$: il y a deux cas :

1^{er} cas : V_1 ou V_2 est de type II. Alors $\mathbf{d}(e)$ n'a pas la propriété (*) si b est symétrique. Supposons par exemple V_2 de type II. Puisque l'élément

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & -I_{d_2} \end{bmatrix}$ centralise E , on en déduit que les éléments de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ sont contenus dans \mathfrak{a} . On déduit alors le résultat du lemme 1.1.6.

2^{ème} cas : V_1 et V_2 sont de type I. Supposons d'abord b symétrique. Alors $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*). Le centralisateur de E est décrit dans la démonstration du lemme 1.1.6. Si la matrice $\begin{bmatrix} 0 & R \\ -R^t & 0 \end{bmatrix}$ commute à $\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$, alors R satisfait aux relations $E_1 R = 0$ et $R E_2 = 0$. L'inclusion $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \subset \widetilde{\mathfrak{z}} \oplus \mathbb{C}z$ est alors une conséquence du lemme 1.1.6.

Supposons enfin b est alternée. Le centralisateur de E est décrit dans la démonstration du lemme 1.1.6. Soit x un élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cap \mathfrak{m}$ de matrice dans la base \mathcal{B} , $X = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -J_{\varepsilon_2 d_2} A^t J_{\varepsilon_1 d_1} & 0 \end{bmatrix}$. Puisque X commute à $\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$, alors A satisfait aux relations $E_1 A = 0$ et $A E_2 = 0$. On en déduit que A est une matrice de rang inférieur ou égal à 1. Par ailleurs, puisque X commute à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & B \\ -J_{\varepsilon_2 d_2} B^t J_{\varepsilon_1 d_1} & 0 \end{bmatrix}$, où B est de la forme $\begin{bmatrix} I_{\varepsilon_2 d_2} \\ 0 \end{bmatrix}$, on en déduit que A est de la forme $\begin{bmatrix} A' \\ 0 \end{bmatrix}$, avec A' dans $\mathfrak{sp}(\varepsilon_2 d_2)$. Le rang de A' et donc celui de A est alors pair. Par suite $A = 0$, d'où le résultat.

On suppose le théorème démontré pour tout sous-espace régulier V' de V et tout élément nilpotent de $\mathfrak{g}(V')$ tel que le nombre de sous-espaces intervenant dans la décomposition (1) est strictement inférieur ou égal à m et on suppose $m \geq 3$.

On suppose tout d'abord que b est symétrique. D'après le lemme 1.1.6, il suffit de prouver l'inclusion $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cap \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}z$, si $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*), et l'inclusion $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cap \mathfrak{m} \subset \{0\}$ sinon. Posons $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_{m-1}$ et notons \mathcal{B}_W la base de W obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{m-1}$. Soit x un élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cap \mathfrak{m}$ et soit $X = \begin{bmatrix} X_W & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_m$. L'endomorphisme x_W dont la matrice dans la base \mathcal{B}_W est X_W est un élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(W)^{e|_W}) \cap \mathfrak{m}(W)$. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence que $x_W = \lambda z|_W$, avec λ dans \mathbb{C} , si $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*), et que x_W est nul sinon. Quitte à remplacer x par $x - \lambda z$, si $\mathbf{d}(e)$ a la propriété (*), on peut donc supposer que x est un élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cap \mathfrak{m}$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est de

la forme,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_3 \\ \vdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{m-1} \\ -B_1^t & -B_2^t & -B_3^t & \cdots & -B_{m-1}^t & 0 \end{bmatrix}.$$

En posant $W' = V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ et en notant $\mathcal{B}_{W'}$ la base de W' obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_m$, alors l'endomorphisme $x_{W'}$ de matrice dans la base $\mathcal{B}_{W'}$,

$$X_{W'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_3 \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{m-1} \\ -B_2^t & -B_3^t & \cdots & -B_{m-1}^t & 0 \end{bmatrix}$$

est un élément du centre du centralisateur dans $\mathfrak{g}(W')$ de $e|_{W'}$. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence les relations $B_3 = \cdots = B_{m-1} = 0$.

Si $m = 3$, on a : $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \\ -B_1^t & -B_2^t & 0 \end{bmatrix}$, d'après ce qui précède. Si V_3

est de type II, il résulte du cas $m = 2$ appliqué à la restriction de e à $V_1 \oplus V_3$ (resp. $V_2 \oplus V_3$), la relation $B_1 = 0$ (resp. $B_2 = 0$). On peut donc supposer que V_3 est de type I. On note u et v les endomorphismes dont les matrices

dans la base \mathcal{B} sont $\begin{bmatrix} 0 & U & 0 \\ -U^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 & V \\ 0 & 0 & 0 \\ -V^t & 0 & 0 \end{bmatrix}$ respectivement, où

U est une matrice équivalente à $\begin{bmatrix} I_{d_2} \\ 0 \end{bmatrix}$ et où V est une matrice équivalente

à $\begin{bmatrix} I_{d_3} \\ 0 \end{bmatrix}$. Puisque u et v centralisent e , on en déduit que x commute avec u et v . Un calcul élémentaire permet alors d'en déduire les relations, $B_1 = 0$ et $B_2 = 0$. Ceci termine le cas $m = 3$.

On suppose enfin $m > 3$. L'endomorphisme de $V_1 \oplus V_2 \oplus V_m$ de matrice dans la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_m$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \\ -B_1^t & -B_2^t & 0 \end{bmatrix}$, est un élément du centre du centralisateur dans $\mathfrak{g}(V_1 \oplus V_2 \oplus V_m)$ de $e|_{V_1 \oplus V_2 \oplus V_m}$. On déduit du cas $m = 3$,

$B_1 = B_2 = 0$. Par récurrence le théorème est démontré pour b symétrique, c'est-à-dire pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ ou \mathfrak{so}_{2n} .

Si b est alternée, on raisonne comme dans le cas symétrique, la démonstration étant dans ce cas beaucoup plus simple, compte tenu du cas $m = 2$. \square

1.2. Premières réductions

Soit \mathfrak{q} une algèbre de Lie complexe et φ une forme linéaire sur \mathfrak{q} . On désigne par \mathfrak{q}_φ l'ensemble des s de \mathfrak{q} tels que $\varphi([q, s]) = 0$. Autrement dit $\mathfrak{q}_\varphi = \{s \in \mathfrak{q} \mid (\text{ad}^* s) \cdot \varphi = 0\}$, où $\text{ad}^* : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{q}^*)$ est la représentation co-adjointe de \mathfrak{q} . On rappelle que l'*indice de* \mathfrak{q} , noté $\text{ind } \mathfrak{q}$, est défini par :

$$\text{ind } \mathfrak{q} = \min_{\varphi \in \mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}_\varphi .$$

L'indice d'une algèbre de Lie \mathfrak{q} est un entier lié à la représentation adjointe de \mathfrak{q} . Une méthode similaire, appliquée à une représentation quelconque de \mathfrak{q} , permet de définir l'*indice d'une représentation*. Soit $\rho : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de \mathfrak{q} . On note, de manière abusive, $s \cdot v$ à la place de $\rho(s)v$, pour s dans \mathfrak{q} et v dans V . De même, pour φ dans le dual V^* de V et pour s dans \mathfrak{q} , on note $s \cdot \varphi$ au lieu de $\rho^*(s)\varphi$ où ρ^* est la représentation contragrédiente à ρ . L'entier $\dim V - \max_{\varphi \in V^*} (\dim \mathfrak{q} \cdot \varphi)$ est appelé l'*indice de* V ou l'*indice du* \mathfrak{q} -module V . On le note $\text{ind } (\rho, V)$ ou $\text{ind } (\mathfrak{q}, V)$ et il est clair que $\text{ind } (\text{ad}, \mathfrak{q}) = \text{ind } \mathfrak{q}$ au sens précédent.

On considère la forme bilinéaire à valeurs dans V :

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V) : \mathfrak{q} \times V \rightarrow V ; (s, v) \mapsto s \cdot v .$$

En composant cette application avec un élément φ de V^* , on obtient une forme bilinéaire à valeurs dans \mathbb{C} :

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)_\varphi : \mathfrak{q} \times V \rightarrow V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} .$$

L'application $\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)_\varphi$ peut être vue comme un élément de $L(\mathfrak{q}, V^*)$ et on vérifie facilement l'égalité :

$$\text{ind } (\mathfrak{q}, V) = \dim V - \max_{\varphi \in V^*} (\text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)_\varphi).$$

Soit $n = \dim \mathfrak{q}$ et $m = \dim V$. En choisissant une base sur \mathfrak{q} et V , on peut considérer $\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)$ comme une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans V , où V est identifié à la composante de degré 1 de l'algèbre symétrique $S(V)$. Ainsi $\text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V) = \max_{\varphi \in V^*} (\text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)_\varphi)$ et l'on obtient l'égalité :

$$(2) \quad \text{ind } (\mathfrak{q}, V) = \dim V - \text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V).$$

Pour $V = \mathfrak{q}$, on note $\mathcal{K}(\mathfrak{q})$ au lieu de $\mathcal{K}(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ et il vient :

$$(3) \quad \text{ind } \mathfrak{q} = \dim \mathfrak{q} - \text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{q}).$$

On s'intéresse maintenant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ et on commence par examiner l'identité du théorème 4. On choisit une base e_1, \dots, e_n de \mathfrak{g}^e telle que e_1, \dots, e_m est une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, avec $m \leq n$. Alors la famille $\{e_1, \dots, e_n, [f, e_1], \dots, [f, e_m]\}$ est une base de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$, d'après la proposition 1.1.2. Dans cette base, la matrice $\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e))$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathfrak{D} \\ 0 & \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{D}^t & -\mathfrak{C}^t & \mathfrak{F} \end{bmatrix},$$

où les matrices carrées \mathfrak{D} et \mathfrak{C} sont respectivement d'ordre m et $n - m$. On reconnaît certains blocs de cette matrice. Ainsi $\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathfrak{D} \\ 0 & \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \end{bmatrix}$ et

$\mathcal{K}(\mathfrak{g}^e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} \end{bmatrix}$. D'après (3), on a la relation

$$\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) - \text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)).$$

Or la structure de la matrice $\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e))$ montre que l'on a l'inégalité

$$\text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)) \leq \text{rang } \mathfrak{C} + 2 \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Par ailleurs, puisque $\mathcal{K}(\mathfrak{g}^e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} \end{bmatrix}$, on a l'égalité :

$$\text{rang } \mathfrak{C} = \text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e - \text{ind } \mathfrak{g}^e.$$

Par suite, il vient :

$$\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \geq \dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) - \dim \mathfrak{g}^e + \text{ind } \mathfrak{g}^e - 2 \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

D'après [4], Théorème 5.5, on a la relation $\text{ind } \mathfrak{g}^e = \text{rg } \mathfrak{g}$. Par ailleurs, la proposition 1.1.2, 2) donne $\dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. On obtient finalement l'inégalité :

$$\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \geq \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Voyons maintenant pourquoi le théorème 5 implique le théorème 4. Il s'agit de prouver la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. — *Si l'égalité $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est satisfaite, alors l'égalité $\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est satisfaite.*

Démonstration. — On suppose le théorème 5 démontré. D'après ce qui précède, il suffit d'obtenir l'inégalité :

$$\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \leq \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Rappelons le résultat suivant, démontré dans [22], Théorème 1.4 :

Lemme 1.2.2. — Soit \mathfrak{q} un idéal d'une algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$. Alors

$$\text{ind } \mathfrak{q} + \text{ind } \tilde{\mathfrak{q}} \leq \dim(\tilde{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}) + 2 \text{ind}(\tilde{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}).$$

En appliquant ce lemme à l'idéal \mathfrak{g}^e de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$, on obtient :

$$\text{ind } \mathfrak{g}^e + \text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \leq \dim(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)/\mathfrak{g}^e) + 2 \text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e),$$

ce qui donne, en utilisant de nouveau les égalités $\dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\text{ind } \mathfrak{g}^e = \text{rg } \mathfrak{g}$,

$$\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \leq 2 \text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) - (\text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)).$$

Le théorème 5 entraîne alors l'inégalité souhaitée. \square

On s'intéresse désormais à l'identité du théorème 5. On a la proposition suivante :

Proposition 1.2.3. — Le théorème 5 est équivalent à l'assertion suivante : la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [[f, e_1], e_1] & \cdots & [[f, e_m], e_1] \\ \vdots & & \vdots \\ [[f, e_1], e_m] & \cdots & [[f, e_m], e_m] \\ \vdots & & \vdots \\ [[f, e_1], e_n] & \cdots & [[f, e_m], e_n] \end{bmatrix}$$

de taille $n \times m$, à coefficients dans $S(\mathfrak{g}^e)$, est de rang maximal égal à $m = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Avant de démontrer la proposition, on étend encore un peu la définition de l'indice. Ceci permettra d'interpréter géométriquement la matrice $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix}$.

Soit \mathfrak{q} une algèbre de Lie complexe, V et V' deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{C} et soit $\rho : \mathfrak{q} \rightarrow L(V, V')$ une application linéaire de \mathfrak{q} dans l'espace des applications linéaires de V dans V' . Pour φ dans $(V')^*$, on note $\mathfrak{q}_\varphi = \{s \in \mathfrak{q} \mid \varphi(\rho(s)v) = 0, \forall v \in V\}$ le «stabilisateur de φ » et on note $\mathfrak{q} \cdot_\rho \varphi$ l'image dans V^* de l'application qui à s dans \mathfrak{q} associe la forme linéaire $v \mapsto -\varphi(\rho(s)v)$ définie sur V . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on omet l'indice ρ . On pose, par analogie avec l'indice,

$$r(\mathfrak{q}, V, V') = \dim V - \max_{\varphi \in (V')^*} (\dim \mathfrak{q} \cdot_\rho \varphi).$$

Notons que ρ n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie en général; l'espace $L(V, V')$ n'est même pas une algèbre de Lie. En revanche, si $V = V'$ et si ρ est une représentation de \mathfrak{q} dans V , on retrouve l'indice $\text{ind}(\mathfrak{q}, V)$ du \mathfrak{q} -module V .

On considère, toujours par analogie avec l'indice, la forme bilinéaire à valeurs dans V' :

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V') : \mathfrak{q} \times V \rightarrow V' ; (s, v) \mapsto -\rho(s)v .$$

En composant cette application avec un élément φ de $(V')^*$, on obtient une forme bilinéaire à valeurs dans \mathbb{C} :

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V')_\varphi : \mathfrak{q} \times V \rightarrow V' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} .$$

On vérifie facilement l'égalité :

$$r(\mathfrak{q}, V, V') = \dim V - \max_{\varphi \in (V')^*} (\text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V')_\varphi) .$$

Cette écriture permet de voir que l'ensemble des formes linéaires φ de $(V')^*$ telles que $\dim \mathfrak{q} \cdot_\rho \varphi = \dim V - r(\mathfrak{q}, V, V')$ est un ouvert dense de $(V')^*$. En choisissant des bases sur \mathfrak{q} et V , on peut considérer $\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V')$ comme une matrice de taille $\dim V \times \dim \mathfrak{q}$ à coefficients dans V' , où V' est identifié à la composante de degré 1 de l'algèbre symétrique $S(V')$. Ainsi, on obtient l'égalité :

$$r(\mathfrak{q}, V, V') = \dim V - \text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V') .$$

Prouvons maintenant la proposition 1.2.3 :

Démonstration de la proposition 1.2.3. — D'après la relation (2), on a :

$$\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e - \text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) .$$

Or la structure de la matrice $\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e)$ montre que l'on a l'inégalité :

$$\text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) \leq \text{rang } \mathfrak{C} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) .$$

En utilisant la relation, déjà vue, $\text{rang } \mathfrak{C} = \dim \mathfrak{g}^e - \text{ind } \mathfrak{g}^e = \dim \mathfrak{g}^e - \text{rg } \mathfrak{g}$, on obtient l'inégalité :

$$\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) \geq \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) .$$

Il y a égalité dans la relation précédente si, et seulement si, la condition $\text{rang } \mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \text{rang } \mathfrak{C} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est satisfaite, autrement dit si, et seulement si, le rang de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \end{bmatrix}$, à coefficients dans $S(\mathfrak{g}^e)$, est égal à $\text{rang } \mathfrak{C} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Par suite, si l'égalité du théorème 5 est satisfaite, nécessairement la matrice $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{C} \end{bmatrix}$ est de rang maximal égal à $m = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Réciproquement, supposons que le rang de la matrice $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{C} \end{bmatrix}$ soit maximal, égal à $m = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, et montrons la relation du théorème 5. Soit ρ l'application linéaire de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ dans $L([f, \mathfrak{g}^e], \mathfrak{g}^e)$ donnée par la relation :

$$\rho(s)v = [s, v] \in \mathfrak{g}^e ,$$

pour s dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et v dans $[f, \mathfrak{g}^e]$. Puisque $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et \mathfrak{g}^f ont une intersection nulle, il existe un supplémentaire \mathfrak{r} de $\mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}^e$ dans \mathfrak{g}^e contenant $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Posons $r = \dim \mathfrak{r}$; on a $m \leq r \leq n$. On peut supposer que les éléments e_1, \dots, e_r forment une base de \mathfrak{r} et que les éléments e_{r+1}, \dots, e_n forment une base de $\mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}^e$. La famille $\{[f, e_1], \dots, [f, e_r]\}$ est libre dans $[f, \mathfrak{g}^e]$ et de cardinal $r = \dim \mathfrak{g}^e - \dim \mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}^e = \dim([f, \mathfrak{g}^e])$; c'est donc une base de $[f, \mathfrak{g}^e]$. Dans les bases $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\{[f, e_1], \dots, [f, e_r]\}$ de $[f, \mathfrak{g}^e]$, la matrice $\mathcal{K}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e), [f, \mathfrak{g}^e], \mathfrak{g}^e)$ à coefficients dans $S(\mathfrak{g}^e)$ est donnée par

$$\mathcal{K}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e), [f, \mathfrak{g}^e], \mathfrak{g}^e) = \begin{bmatrix} [e_1, [f, e_1]] & \cdots & [e_m, [f, e_1]] \\ \vdots & & \vdots \\ [e_1, [f, e_m]] & \cdots & [e_m, [f, e_m]] \\ [e_1, [f, e_{m+1}]] & \cdots & [e_m, [f, e_{m+1}]] \\ \vdots & & \vdots \\ [e_1, [f, e_r]] & \cdots & [e_m, [f, e_r]] \end{bmatrix}.$$

On dispose des relations :

$$[[f, e_j], e_i] = [[f, e_i], e_j] = -[e_j, [f, e_i]],$$

pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$. Puisque les vecteurs e_{r+1}, \dots, e_n sont dans le centralisateur \mathfrak{g}^f de f , les crochets $[[f, e_j], e_i]$ sont nuls, pour $i = r+1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$, et la matrice $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix}$ de la proposition est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [[f, e_1], e_1] & \cdots & [[f, e_m], e_1] \\ \vdots & & \vdots \\ [[f, e_1], e_m] & \cdots & [[f, e_m], e_m] \\ [[f, e_1], e_{m+1}] & \cdots & [[f, e_m], e_{m+1}] \\ \vdots & & \vdots \\ [[f, e_1], e_r] & \cdots & [[f, e_m], e_r] \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite les deux matrices $\mathcal{K}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e), [f, \mathfrak{g}^e], \mathfrak{g}^e)$ et $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix}$ ont le même rang.

D'après l'hypothèse sur le rang de la matrice $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix}$, on en déduit que l'entier

$\max_{\varphi \in (\mathfrak{g}^e)^*} \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cdot_{\rho} \varphi$ est égal à $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. L'ensemble

$$\Omega' = \{\varphi \in (\mathfrak{g}^e)^* \mid \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cdot_{\rho} \varphi = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\}$$

est donc un ouvert dense de $(\mathfrak{g}^e)^*$. Par ailleurs, de l'égalité $\text{ind } \mathfrak{g}^e = \text{rg } \mathfrak{g}$, il résulte que l'ensemble

$$\Omega = \{\varphi \in (\mathfrak{g}^e)^* \mid \dim \mathfrak{g}^e \cdot \varphi = \dim \mathfrak{g}^e - \text{rg } \mathfrak{g}\}$$

est un ouvert dense de $(\mathfrak{g}^e)^*$, où $\mathfrak{g}^e \cdot \varphi$ désigne l'orbite coadjointe de φ . L'intersection $\Omega \cap \Omega'$ est donc un ouvert non vide de $(\mathfrak{g}^e)^*$. Soit λ une forme linéaire sur \mathfrak{g}^e appartenant à cette intersection. On considère l'orbite $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \cdot \lambda$ de λ sous l'action naturelle de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ dans $(\mathfrak{g}^e)^*$. Autrement dit,

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \cdot \lambda = \{v \in \mathfrak{g}^e \mapsto -\lambda([s, v]) \mid s \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\}.$$

Les sous-espaces \mathfrak{g}^e et $[f, \mathfrak{g}^e]$ ont une intersection nulle d'après la proposition 1.1.1 et on pose $E = \mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}^e]$. En identifiant $(\mathfrak{g}^e)^*$, respectivement $([f, \mathfrak{g}^e])^*$, au sous-espace de E^* formé des formes linéaires nulles sur $[f, \mathfrak{g}^e]$, respectivement \mathfrak{g}^e , on obtient la décomposition suivante :

$$E^* = (\mathfrak{g}^e)^* \oplus ([f, \mathfrak{g}^e])^*.$$

Par suite, les ensembles $\mathfrak{g}^e \cdot \lambda$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cdot_{\rho} \lambda$ peuvent être vus comme deux sous-espaces de E^* dont l'intersection est nulle. En effet le premier est contenu dans $(\mathfrak{g}^e)^*$ et le deuxième dans $([f, \mathfrak{g}^e])^*$. On va montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \cdot \lambda$ et $\mathfrak{g}^e \cdot \lambda \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cdot_{\rho} \lambda$. Soit s un élément de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$. Selon la décomposition 2) de la proposition 1.1.2, il s'écrit de manière unique $s = s_1 + [f, s_2]$, avec s_1 dans \mathfrak{g}^e et s_2 dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. On pose

$$\Phi(s \cdot \lambda) = s_1 \cdot \lambda + s_2 \cdot_{\rho} \lambda.$$

L'application Φ définit ainsi une application linéaire de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \cdot \lambda$ dans $\mathfrak{g}^e \cdot \lambda \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cdot_{\rho} \lambda$. C'est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels, dont l'inverse est donné par :

$$s_1 \cdot \lambda + s_2 \cdot_{\rho} \lambda \longmapsto (s_1 + [f, s_2]) \cdot \lambda.$$

De cet isomorphisme, on déduit une égalité sur les dimensions,

$$\dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \cdot \lambda = \dim \mathfrak{g}^e \cdot \lambda + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cdot_{\rho} \lambda,$$

car les deux sous-espaces $\mathfrak{g}^e \cdot \lambda$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \cdot_{\rho} \lambda$ ont une intersection nulle. D'où, puisque λ appartient à l'intersection $\Omega \cap \Omega'$,

$$\dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \cdot \lambda = (\dim \mathfrak{g}^e - \text{rg } \mathfrak{g}) + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Par suite, on obtient l'inégalité

$$\max_{\varphi \in (\mathfrak{g}^e)^*} (\dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \cdot \varphi) \geq \dim \mathfrak{g}^e - \text{rg } \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),$$

ce qui donne encore

$$\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) \leq \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

L'autre inégalité étant déjà connue, on en déduit le théorème 5. La proposition est ainsi démontrée. \square

Notons que la condition de la proposition précédente est en particulier vérifiée si la matrice \mathfrak{D} est non singulière. Dire que la matrice \mathfrak{D} est non singulière signifie que l'indice $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$ du $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ -module $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est nul, ce qui se traduit encore en disant que le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ a une orbite ouverte dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$. On retrouve ainsi la condition de D. Panyushev vue en introduction qui lui permet de conclure dans un certain nombre de cas. Notons que ces conclusions reposent sur les résultats de [15] qui sont, comme on l'a déjà signalé, légèrement erronnés. Il obtient en fait dans [22] que la matrice \mathfrak{D} est non singulière dans les cas suivants :

- 1) si \mathfrak{g} est isomorphe à l'une des algèbres de Lie \mathfrak{sl}_n ou \mathfrak{sp}_n (Théorème 4.7 (i)),
- 2) pour certains éléments nilpotents de \mathfrak{g} , si \mathfrak{g} est isomorphe à \mathfrak{so}_{2n+1} ou \mathfrak{so}_{2n} (Théorème 4.7 (ii)),
- 3) si $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \leq 2$ (Théorème 4.7 (iii)),
- 4) si e est un élément nilpotent régulier de \mathfrak{g} (Corollaire 5.6).

Notons que dans les trois premiers cas, D. Panyushev montre une propriété plus forte que celle de l'orbite ouverte, à savoir : le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ a un nombre fini d'orbites dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Remarquons enfin qu'il existe des cas où la matrice \mathfrak{D} est singulière ; par exemple, si e est un élément nilpotent sous-régulier de \mathfrak{so}_8 , on peut montrer ([22], partie 4) que le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ n'a pas d'orbite ouverte dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$.

Soit e un élément nilpotent non distingué de \mathfrak{g} . En raisonnant comme dans [29], preuve de la proposition 35.3.9, on montre qu'il existe une sous-algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{t} de \mathfrak{g} , contenant e , et telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- 1) \mathfrak{t} est l'algèbre dérivée du centralisateur d'un élément semi-simple de \mathfrak{g} ,
- 2) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e) \subset \mathfrak{t}^e \subset \mathfrak{g}^e$,
- 3) e est distingué dans \mathfrak{t} .

Proposition 1.2.4. — *On suppose que la relation*

$$\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{t}^e), \mathfrak{t}^e) = \text{rg } \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e)$$

est satisfaite. Alors la relation

$$\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$$

est satisfaite.

Démonstration. — Soit $\{e, h', f'\}$ un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans \mathfrak{t} contenant e . On construit une base e_1, \dots, e_n de \mathfrak{g}^e telle que e_1, \dots, e_m soit une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, $e_1, \dots, e_{m'}$ une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e)$ et $e_1, \dots, e_{n'}$ une base de \mathfrak{t}^e , avec $m \leq m' \leq n' \leq n$. Comme la relation $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{t}^e), \mathfrak{t}^e) = \text{rg } \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e)$ est satisfaite, la proposition 1.2.3 assure qu'il existe un vecteur v de \mathfrak{t}' tel

que la matrice $(\langle v, [[f', e_i], e_j] \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n' \\ 1 \leq j \leq m'}}$ soit de rang maximal, car \mathfrak{t}^f s'identifie au dual de \mathfrak{t}^e via la forme de Killing. On suppose par l'absurde que la matrice $(\langle v, [[f', e_i], e_j] \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ n'est pas de rang maximal. Alors il existe des complexes a_1, \dots, a_m non tous nuls qui satisfont l'égalité :

$$\langle v, [[f', e_i], \sum_{j=1}^m a_j e_j] \rangle = 0,$$

pour $i = 1, \dots, n$. On a donc aussi la relation :

$$\langle v, [[f', e_i], \sum_{j=1}^m a_j e_j] \rangle = 0,$$

pour $i = 1, \dots, n'$, car $n' \leq n$. En posant $a_j = 0$ pour $j = m + 1, \dots, m'$, on obtient encore :

$$\langle v, [[f', e_i], \sum_{j=1}^{m'} a_j e_j] \rangle = 0,$$

pour $i = 1, \dots, n'$. Ceci contredit le fait que la matrice $(\langle v, [[f', e_i], e_j] \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n' \\ 1 \leq j \leq m'}}$ est de rang maximal. Par suite, la proposition 1.2.3 donne la relation $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, car cette dernière ne dépend pas du choix d'un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{e, h, f\}$ dans \mathfrak{g} contenant e . \square

Effectuons enfin une dernière réduction. Une algèbre de Lie complexe semi-simple est somme directe d'idéaux simples et il est clair qu'il suffit de démontrer les théorèmes 4 et 5 pour chaque composante simple de \mathfrak{g} . On peut supposer désormais que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie complexe simple.

1.3. Démonstration du théorème principal dans le cas classique

On suppose que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple classique, c'est-à-dire $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, \mathfrak{so}_{2n+1} , \mathfrak{sp}_{2n} ou \mathfrak{so}_{2n} . Soit e un élément nilpotent de \mathfrak{g} et soit $\{e, h, f\}$ un \mathfrak{sl}_2 -triplet contenant e . On reprend les notations du paragraphe 1.1.2. On va montrer «directement», à l'aide de calculs explicites, que la matrice $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix}$ introduite dans la partie précédente est de rang maximal. Dans le cas où $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, la proposition 1.3.1 donne un résultat plus fort. Commençons par quelques calculs préliminaires. On dispose des relations suivantes :

$$(4) \quad [e^k, f] = e^k f - f e^k = \sum_{\alpha+\beta=k-1} e^\alpha h e^\beta \text{ et } [h, e^i] = 2i \cdot e^i,$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad \left[\left[e^k, f \right], e^i \right] &= \sum_{\alpha+\beta=k-1} e^\alpha h e^{\beta+i} - \sum_{\alpha+\beta=k-1} e^{\alpha+i} h e^\beta \\
(6) \quad &= \sum_{\alpha+\beta=k-1} e^\alpha [h, e^i] e^\beta = 2ki \cdot e^{k+i-1}.
\end{aligned}$$

L'algèbre $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ agit sur le sous-espace $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ par la représentation adjointe et l'on dispose de la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. — *On suppose $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Alors l'indice, $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$ est nul. En particulier, la relation*

$$\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$$

est satisfaite.

Démonstration. — Notons d le degré du polynôme minimal de e . On suppose tout d'abord $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Posons $v_i = e^i$, pour $i = 1, \dots, d-1$, alors les éléments v_1, \dots, v_{d-1} forment une base de $\tilde{\mathfrak{z}}$. Notons $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{ij})_{1 \leq i, j \leq d-1}$ la matrice carrée d'ordre $d-1$ donnée par :

$$\mathfrak{D}_{ij} = [[f, v_j], v_i],$$

pour i et j dans $\{1, \dots, d-1\}$. D'après la relation (6), on a

$$\mathfrak{D}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j > d, \\ -2ij e^{i+j-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier on connaît \mathfrak{D} sur l'anti-diagonale. On a $\mathfrak{D}_{ij} = -2ij e^{d-1}$ si $i+j = d$. Soit φ une forme linéaire sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. De ce qui précède, il résulte que le déterminant de la matrice \mathfrak{D} évalué en φ vaut, au signe près :

$$2^{d-1} \times (d-1)!^2 \times (\varphi(e^{d-1}))^{d-1}.$$

C'est donc un élément non nul de $S(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$; il suffit en effet de l'évaluer en une forme linéaire qui ne s'annule pas en e^{d-1} . Par suite, la matrice \mathfrak{D} est non singulière.

On suppose maintenant $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, \mathfrak{so}_{2n+1} ou \mathfrak{so}_{2n} . Posons $r = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière. On procède de la même façon; on pose $v_i = e^{2i-1}$, pour $i = 1, \dots, r$. Les éléments v_1, \dots, v_r forment une base de $\tilde{\mathfrak{z}}$. Notons $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ la matrice carrée d'ordre r donnée par :

$$\mathfrak{D}_{ij} = [[f, v_j], v_i],$$

pour i et j dans $\{1, \dots, r\}$. D'après la relation (6), on a

$$\mathfrak{D}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j > r+1, \\ -2(2i-1)(2j-1)e^{2i+2j-3} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, on connaît \mathfrak{D} sur l'anti-diagonale. On a $\mathfrak{D}_{ij} = -2(2i-1)(2j-1)e^{2r-1}$ si $i+j = r+1$. Soit φ une forme linéaire sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. De ce qui précède, il résulte que le déterminant de la matrice \mathfrak{D} évalué en φ vaut, au signe près :

$$2^r \times ((2r-1) \times (2r-3) \times \cdots \times 1)^2 \times (\varphi(e^{2r-1}))^r.$$

C'est donc un élément non nul de $S(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$; il suffit en effet de l'évaluer en une forme linéaire qui ne s'annule pas en e^{2r-1} . Par suite, la matrice \mathfrak{D} est non singulière.

Dans tous les cas, on obtient que la matrice \mathfrak{D} est non singulière. Notons que l'on n'a pas encore utilisé l'hypothèse $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Puisque $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, on pose $m = \dim \tilde{\mathfrak{z}} = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, d'où $m = d-1$ dans le cas \mathfrak{sl}_n , et $m = r$ sinon. On complète la base $\{v_1, \dots, v_m\}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ en une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathfrak{g}^e . Alors, dans les bases $\{v_1, \dots, v_n, [f, v_1], \dots, [f, v_m]\}$ de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ et $\{v_1, \dots, v_m\}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, on a :

$$\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathfrak{D} \end{bmatrix}.$$

Puisque \mathfrak{D} est non singulière, la rang de la matrice précédente est égal à $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et l'indice $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$ est nul. L'autre assertion résulte des remarques qui suivent la démonstration de la proposition 1.2.3. \square

Remarque 1.3.2. — *La preuve précédente permet de voir que les formes linéaires régulières de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$ pour l'action naturelle de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ sont exactement celles qui ne s'annulent pas sur le vecteur de plus haut poids pour l'action de adh .*

On déduit de cette proposition le théorème 5 pour tous les éléments de \mathfrak{sl}_n , \mathfrak{sp}_{2n} et pour les éléments nilpotents de \mathfrak{so}_n dont la partition n'a pas la propriété (*). En effet dans chacune de ces situations les sous-espaces $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\tilde{\mathfrak{z}}$ coïncident d'après le théorème 1.1.8.

On consacre la fin de cette partie à la preuve du théorème 5 dans le cas général. Le lemme suivant, tiré de [5], Théorème 8.2.14, décrit les partitions des orbites distinguées de \mathfrak{g} .

Lemme 1.3.3. — (i) *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, alors la seule orbite nilpotente distinguée est l'orbite régulière.*

(ii) *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ ou \mathfrak{sp}_{2n} , alors une orbite nilpotente est distinguée si, et seulement si, la partition correspondante n'a pas de répétition. Ainsi, les partitions des orbites distinguées de \mathfrak{so}_n n'ont que des parties impaires deux à deux distinctes et les partitions des orbites distinguées de \mathfrak{sp}_{2n} n'ont que des parties paires deux à deux distinctes.*

Proposition 1.3.4. — *On suppose que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple classique. Alors on a la relation :*

$$\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le rang n de \mathfrak{g} . Pour $n = 1$, \mathfrak{g} est isomorphe à \mathfrak{sl}_2 et le résultat est connu. Soit $n \geq 2$. On suppose la proposition démontrée pour toute algèbre de Lie simple classique de rang strictement inférieur à n . Il résulte de l'hypothèse de récurrence que la relation $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{t}^e), \mathfrak{t}^e) = \text{rg } \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e)$ est satisfaite pour \mathfrak{t} et e satisfaisant les conditions 1), 2) et 3) qui précèdent la proposition 1.2.4 et pour \mathfrak{t} strictement contenu dans \mathfrak{g} , car alors \mathfrak{t} est produit direct d'algèbres de Lie simples classiques de rang strictement inférieur à celui de \mathfrak{g} . D'après la proposition 1.2.4, il suffit donc de prouver le résultat pour les éléments nilpotents distingués de \mathfrak{g} . On peut supposer en outre que e n'est pas un élément nilpotent régulier de \mathfrak{g} , d'après les remarques qui précèdent la proposition 1.2.4. On suppose désormais que e est un élément nilpotent distingué non régulier de \mathfrak{g} .

D'après le lemme 1.3.3, le théorème 1.1.8 et la proposition 1.3.1, on peut supposer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ ou \mathfrak{so}_{2n+1} . La partition $\mathbf{d}(e) = [d_1, \dots, d_m]$ associée à l'élément e possède alors la propriété (*), d'après le lemme 1.3.3, et puisque ses parties sont impaires, on pose, $d_i = 2s_i + 1$, pour $1 \leq i \leq m$. Soit λ la valeur propre associée à z ; on a $\lambda = d_1 + d_2 - 2$, d'après le lemme 1.1.7.

Lemme 1.3.5. — (i) On a : $[[f, z], e^{2i-1}] = \begin{cases} -\lambda z & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i = 2, \dots, s_1. \end{cases}$

(ii) L'élément $[[f, z], e_2]$ est non nul dans \mathfrak{g}^e . On note z' cet élément.

(iii) Le crochet $[[f, e^{2s_1-1}], e_2]$ est nul.

Démonstration. — (i) Si $i = 1$, on a $[[f, z], e^{2i-1}] = [[f, e], z] = -[h, z] = -\lambda z$. On suppose $i > 1$. En utilisant la relation (4), on montre sans peine que le crochet $[[f, z], e^{2i-1}]$ est donné par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & T & 0 & \cdots & 0 \\ -T^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

où T est la matrice, $-\sum_{\alpha+\beta=2i-2} E_1^\alpha H_1 E_1^\beta S + S \sum_{\alpha+\beta=2i-2} E_2^\alpha H_2 E_2^\beta$. Dans la somme $\sum_{\alpha+\beta=2i-2} E_1^\alpha H_1 E_1^\beta S$, les termes pour lesquels β est strictement positif sont nuls, puisqu'on a la relation $E_1 S = 0$. Il reste le terme $E_1^{2i-2} H_1 S$.

Comme z est un vecteur propre de $\text{ad}h$ relativement à la valeur propre λ , on a la relation $H_1S = SH_2 + \lambda S$. D'où :

$$E_1^{2i-2}H_1S = E_1^{2i-2}SH_2 + \lambda E_1^{2i-2}S = 0,$$

car $E_1S = 0$ et $i > 1$. Par suite, on a : $\sum_{\alpha+\beta=2i-2} E_1^\alpha H_1 E_1^\beta S = 0$. De même, la relation $SE_2 = 0$ entraîne la relation $S \sum_{\alpha+\beta=2i-2} E_2^\alpha H_2 E_2^\beta = 0$. Par suite la matrice T est nulle et le crochet $[[f, z], e^{2i-1}]$ est nul pour $i > 1$, d'où (i).

(ii) On a la relation $z' = [[f, z], e_2] = [[f, e_2], z] = -[h_2, z]$. On suppose par l'absurde que $[h_2, z]$ est nul. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. De la relation $SE_2 = 0$, on tire la relation $[e_2, z] = 0$. Comme le triplet $\{e_2, h_2, f_2\}$ forme un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans \mathfrak{g} , on déduit des égalités $[h_2, z] = 0$ et $[e_2, z] = 0$ la relation $[f_2, z] = 0$, d'où il vient $SF_2 = 0$. Ainsi, on a : $E_2S^t = 0$ et $F_2S^t = 0$, donc l'image de la matrice S^t est contenue dans l'intersection des noyaux de E_2 et F_2 . Comme E_2 est une matrice nilpotente régulière, cette intersection est nulle d'après la théorie des représentations de \mathfrak{sl}_2 . D'où la contradiction car S n'est pas nulle.

(iii) Puisque e est un élément distingué, s_1 est strictement plus grand que s_2 d'après le lemme 1.3.3, donc l'élément $e_2^{2s_1-1}$ est nul et le crochet $[f, e^{2s_1-1}]$ est donné par la matrice

$$\begin{bmatrix} - \sum_{\alpha+\beta=2s_1-2} E_1^\alpha H_1 E_2^\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite le crochet $[[f, e^{2s_1-1}], e_2]$ est nul. \square

On pose $v_i = e^{2i-1}$, pour $i = 1, \dots, s_1$, $v_{s_1+1} = z$ et $v_{s_1+2} = e_2$. Comme e_1 n'appartient pas au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, la famille $\{v_1, \dots, v_{s_1+2}\}$ est libre dans \mathfrak{g}^e . On la complète en une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathfrak{g}^e et on note $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s_1+1}}$ la matrice de taille $n \times (s_1 + 1)$, à coefficients dans $S(\mathfrak{g}^e)$, donnée par :

$$\mathfrak{M}_{ij} = [[f, v_j], v_i],$$

pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, s_1 + 1$. On considère la sous-matrice carrée \mathfrak{M}' de \mathfrak{M} d'ordre $s_1 + 1$ dont les lignes correspondent aux éléments v_1, \dots, v_{s_1} et v_{s_1+2} et dont les colonnes correspondent aux éléments v_1, \dots, v_{s_1+1} de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Grâce au lemme 1.3.5 et aux calculs effectués dans la preuve de la proposition 1.3.1, on obtient la structure de la matrice \mathfrak{M}' :

$$\mathfrak{M}' = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & \lambda_1 e^{2s_1-1} & -\lambda z \\ * & \cdots & \lambda_2 e^{2s_1-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s_1} e^{2s_1-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & z' \end{bmatrix},$$

où $\lambda_i = -2 \times (2s_1 - (2i - 1)) \times (2i - 1)$, pour $i = 1, \dots, s_1$. Soit φ une forme linéaire sur \mathfrak{g}^e . D'après la structure de la matrice \mathfrak{M}' , l'évaluation en φ du déterminant de \mathfrak{M}' vaut, au signe près :

$$2^{s_1} \times ((2s_1 - 1) \times (2s_1 - 3) \times \cdots \times 1)^2 \times \varphi(z') \times (\varphi(e^{2s_1-1}))^{s_1}.$$

Si φ ne s'annule ni en z' , ni en e^{2s_1-1} , ce déterminant est non nul. Donc la matrice \mathfrak{M}' est non singulière. Avec les notations de la proposition 1.2.3, la matrice \mathfrak{M} est la matrice $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix}$. Cette dernière est donc de rang maximal égal à $s_1 + 1 = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, car la sous-matrice carrée \mathfrak{M}' d'ordre $s_1 + 1$ est non singulière. La proposition résulte alors de la proposition 1.2.3. \square

Remarque 1.3.6. — *Les calculs de la preuve précédente permettent de donner la structure de la matrice \mathfrak{D} pour e un élément distingué non régulier de \mathfrak{so}_{2n+1} ou \mathfrak{so}_{2n} . On a :*

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & \lambda_1 e^{2s_1-1} & -\lambda z \\ * & \cdots & \lambda_2 e^{2s_1-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s_1} e^{2s_1-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda z & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice \mathfrak{D} est donc singulière dans ce cas et la relation $\text{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)) = 0$ n'a pas lieu.

1.4. Démonstration du théorème principal lorsque e vérifie (P_1) , pour e nilpotent non régulier de \mathfrak{g}

On suppose que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie complexe simple et que e est un élément nilpotent non régulier de \mathfrak{g} . On fixe un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{e, h, f\}$ dans \mathfrak{g} contenant e . On note \mathfrak{z}_{\max} le sous-espace propre de la restriction de adh à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ associé à la plus grande valeur propre. Le but de cette partie est d'obtenir le corollaire 1.4.5 qui servira au cas exceptionnel dans la partie suivante.

On va utiliser un certain nombre de notations et de résultats de [4]. On note π_e l'application $(g, x) \mapsto g(x)$ de $G \times (e + \mathfrak{g}^f)$ dans \mathfrak{g} . D'après [4], Corollaire 5.7, il existe un voisinage ouvert W de e dans $e + \mathfrak{g}^f$ tel que la restriction de π_e à $G \times W$ soit un morphisme lisse de $G \times W$ sur un ouvert G -invariant de \mathfrak{g} qui contient e . On note X l'éclatement en e de W et σ le morphisme d'éclatement. Ce qui précède montre que l'ouvert non vide $\pi_e(G \times W)$ rencontre l'ouvert dense de \mathfrak{g} des éléments réguliers de \mathfrak{g} . Par suite, le sous-ensemble de X des points x de X pour lesquels $\sigma(x)$ est un élément régulier de \mathfrak{g} est un ouvert non vide de X . On note X_r cet ouvert. En particulier, $\sigma^{-1}(\{e\})$ est une hypersurface de X , contenue dans $X \setminus X_r$, car l'élément e n'est pas un élément régulier de \mathfrak{g} . On note enfin X_* le plus grand ouvert de X sur lequel l'application $x \mapsto \mathfrak{g}^{\sigma(x)}$ de X_r dans $\text{Gr}_{\text{reg}}(\mathfrak{g})$ a un prolongement régulier noté α . D'après [4], Lemme 2.3, il existe un ouvert affine Y de X qui rencontre $\sigma^{-1}(\{e\})$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

- 1) Y est contenu dans X_* ,
- 2) $Y \setminus X_r$ est une hypersurface lisse, irréductible, contenue dans $\sigma^{-1}(\{e\})$ et dont l'idéal de définition dans $\mathbb{C}[Y]$ est engendré par un élément q ,
- 3) il existe un sous-espace \mathfrak{m} de \mathfrak{g} qui est un supplémentaire de $\alpha(x)$ dans \mathfrak{g} pour tout x dans Y et qui contient un supplémentaire \mathfrak{p} de \mathfrak{g}^e dans \mathfrak{g} .

Par définition de α , on a l'inclusion $\alpha(x) \subset \mathfrak{g}^{\sigma(x)}$, pour tout x dans Y . En particulier, on a l'inclusion $\alpha(x) \subset \mathfrak{g}^e$, pour tout x dans $Y \setminus X_r$, car $Y \setminus X_r$ est contenu dans $\sigma^{-1}(\{e\})$. On dispose alors du lemme suivant :

Lemme 1.4.1. — *Soit x_0 un point de $Y \setminus X_r$ et soit $\{v_1, \dots, v_s\}$ une base d'un supplémentaire \mathfrak{n} de $\alpha(x_0)$ dans \mathfrak{g}^e . Alors l'élément $\det([v_i, v_j])_{1 \leq i, j \leq s}$ est un élément non nul de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.1.1, $[f, \mathfrak{g}]$ est un supplémentaire de \mathfrak{g}^e dans \mathfrak{g} . Par suite, on a les décompositions suivantes :

$$\alpha(x_0) \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}^e \text{ et } \alpha(x_0) \oplus \mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}.$$

On en déduit qu'il existe un ouvert non vide Y' de Y contenant x_0 tel que, pour tout x' dans Y' , on ait la décomposition :

$$\alpha(x') \oplus \mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}.$$

Puisque $\alpha(x')$ est contenu dans \mathfrak{g}^e pour tout x' dans $Y' \setminus X_r$, on obtient de plus

$$\alpha(x') \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}^e,$$

pour tout x' dans $Y' \setminus X_r$.

Soit w_1, \dots, w_t une base de $[f, \mathfrak{g}]$. Il suffit de montrer que l'élément

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} [v_1, v_1] & \cdots & [v_1, v_s] & & & \\ \vdots & & \vdots & & & 0 \\ [v_s, v_1] & \cdots & [v_s, v_s] & & & \\ [w_1, v_1] & \cdots & [w_1, v_s] & [w_1, w_1] & \cdots & [w_1, w_t] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [w_t, v_1] & \cdots & [w_t, v_s] & [w_t, w_1] & \cdots & [w_t, w_t] \end{bmatrix}$$

de $S(\mathfrak{g})$ est non nul pour obtenir le lemme.

Soit i dans $\{1, \dots, s\}$. L'application qui à x dans Y associe $[\sigma(x), v_i]$ est nulle en tout point de $Y \setminus X_r$ car $Y \setminus X_r$ est inclus dans $\sigma^{-1}(\{e\})$ et \mathfrak{g}^e contient v_i . Puisque q engendre l'idéal de définition de $Y \setminus X_r$, on en déduit qu'il existe une application régulière μ_i de Y dans \mathfrak{g} non identiquement nulle sur $Y \setminus X_r$ et un entier $m_i \geq 1$ qui satisfont l'égalité $[\sigma(x), v_i] = q(x)^{m_i} \mu_i(x)$, pour tout x de Y . Montrons que l'entier m_i est égal à 1 pour tout i dans $\{1, \dots, s\}$. On suppose par l'absurde que $m_i > 1$ pour un certain i dans $\{1, \dots, s\}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction.

Soit T une indéterminée, τ et τ_0 les images respectives de T par les applications canoniques de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[T]$ dans les quotients de $\mathbb{C}[T]$ par les idéaux $T^{m_i+1}\mathbb{C}[T]$ et $T^2\mathbb{C}[T]$. Pour ν un $\mathbb{C}[\tau]$ -point de X , on note γ_ν l'évaluation en ν de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ où x est l'image de ν par la projection canonique de l'ensemble des $\mathbb{C}[\tau]$ -points de X sur l'ensemble des \mathbb{C} -points de X . Alors γ_ν est un morphisme de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ dans l'anneau $\mathbb{C}[\tau]$. Soit γ'_ν le morphisme :

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}[\tau] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}, \varphi \otimes u \mapsto \gamma_\nu(\varphi) \otimes u,$$

Puisque σ est le morphisme d'éclatement de W centré en e , les fibres de σ sont irréductibles et l'espace tangent à W en un point z de W est la réunion des images des applications linéaires tangentes à σ en les points de la fibre de σ en z . En particulier, puisque $Y \setminus X_r$ est un ouvert de la fibre $\sigma^{-1}(e)$ de σ en e , la réunion des images des applications linéaires tangentes à σ en les points de $Y \setminus X_r$ contient un ouvert non vide de \mathfrak{g}^f .

Soit v un vecteur de \mathfrak{g}^f appartenant à cet ouvert. Soit alors x dans $Y \setminus X_r$ et v' un vecteur tangent à Y en x tels que l'image de v' par l'application linéaire tangente $\sigma'(x)$ à σ en x soit égale à v . Soit enfin ν un $\mathbb{C}[\tau]$ -point de Y au dessus du $\mathbb{C}[\tau_0]$ -point de X défini par v' . On note $q'(x)$ la différentielle de q en x . Puisque l'image de $q^{m_i} \mu_i$ par γ'_ν est égale à $\tau^{m_i} q'(x)(v') \mu_i(x)$, de l'égalité :

$$[\sigma(x), v_i] = q(x)^{m_i} \mu_i(x),$$

on tire l'égalité :

$$\tau[v, v_i] + \cdots = \tau^{m_i} q'(x)(v') \mu_i(x),$$

car le terme de degré 1 en τ de $\gamma'_\nu(\sigma)$ est τv . Puisque $m_i > 1$, on obtient que $[v, v_i]$ est nul. Il en résulte que pour tout v dans un ouvert non vide de \mathfrak{g}^f , $[v, v_i]$ est nul. Par suite, $[v, v_i]$ est nul pour tout v dans \mathfrak{g}^f . On en déduit que v_i appartient au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^f)$ de \mathfrak{g}^f . Ceci est impossible car $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^f)$ et \mathfrak{g}^e ont une intersection nulle. On a finalement obtenu la relation $[\sigma(x), v_i] = q(x)\mu_i(x)$, pour tout x dans Y .

Pour x dans Y , la valeur de Δ en la forme linéaire $v \mapsto \langle \sigma(x), v \rangle$ est :

$$\det \begin{bmatrix} \langle \sigma(x), [v_1, v_1] \rangle & \cdots & \langle \sigma(x), [v_1, v_s] \rangle & & & \\ \vdots & & \vdots & & & 0 \\ \langle \sigma(x), [v_s, v_1] \rangle & \cdots & \langle \sigma(x), [v_s, v_s] \rangle & & & \\ \langle \sigma(x), [w_1, v_1] \rangle & \cdots & \langle \sigma(x), [w_1, v_s] \rangle & \langle \sigma(x), [w_1, w_1] \rangle & \cdots & \langle \sigma(x), [w_1, w_t] \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \sigma(x), [w_t, v_1] \rangle & \cdots & \langle \sigma(x), [w_t, v_s] \rangle & \langle \sigma(x), [w_t, w_1] \rangle & \cdots & \langle \sigma(x), [w_t, w_t] \rangle \end{bmatrix}$$

$$= (-q(x))^s \times$$

$$\det \begin{bmatrix} \langle \mu_1(x), v_1 \rangle & \cdots & \langle \mu_s(x), v_1 \rangle & & & \\ \vdots & & \vdots & & & 0 \\ \langle \mu_1(x), v_s \rangle & \cdots & \langle \mu_s(x), v_s \rangle & & & \\ \langle \mu_1(x), w_1 \rangle & \cdots & \langle \mu_s(x), w_1 \rangle & \langle \sigma(x), [w_1, w_1] \rangle & \cdots & \langle \sigma(x), [w_1, w_t] \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mu_1(x), w_t \rangle & \cdots & \langle \mu_s(x), w_t \rangle & \langle \sigma(x), [w_t, w_1] \rangle & \cdots & \langle \sigma(x), [w_t, w_t] \rangle \end{bmatrix}.$$

Soit ζ la fonction régulière définie sur Y qui à x dans Y associe le déterminant du membre de droite dans l'expression précédente. On suppose par l'absurde que ζ est identiquement nulle sur $Y \setminus X_r$. Alors il existe des fonctions régulières non toutes identiquement nulles, $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t$ sur $Y \setminus X_r$, qui satisfont aux égalités :

$$\begin{cases} \langle \sum_{j=1}^s a_j(x) \mu_j(x), v_i \rangle = 0, \quad \forall i = 1, \dots, s \\ \langle \sum_{j=1}^s a_j(x) \mu_j(x) + \sum_{k=1}^t b_k(x) [\sigma(x), w_k], w_i \rangle = 0, \quad \forall i = 1, \dots, t, \end{cases}$$

pour tout x de $Y \setminus X_r$. En utilisant les inclusions $Y \setminus X_r \subset \sigma^{-1}(\{e\})$ et $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^e$, on trouve la relation $\langle [\sigma(x), w_k], w \rangle = 0$, pour tout w, x et k dans $\mathfrak{n}, Y \setminus X_r$ et $\{1, \dots, t\}$ respectivement, d'où l'égalité :

$$(7) \quad \langle \sum_{j=1}^s a_j(x) \mu_j(x) + \sum_{k=1}^t b_k(x) [\sigma(x), w_k], w \rangle = 0,$$

pour tout w dans $\mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}]$ et tout x dans $Y \setminus X_r$.

On fixe une base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de \mathfrak{g}^f et on note $\{x_1, \dots, x_n\}$ la base duale. Pour $i = 1, \dots, n$, on désigne aussi par x_i la forme affine sur $e + \mathfrak{g}^f$ dont la valeur au point $e + x$ de $e + \mathfrak{g}^f$ est la valeur de x_i en x . Soit x un point de $Y \setminus X_r$. Quitte à changer de base u_1, \dots, u_n , on peut supposer que l'ensemble des fonctions

$$y_1 = x_1, y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_1}$$

est un système de coordonnées de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x . Puisque x_1 engendre l'idéal de définition de $\sigma^{-1}(\{e\})$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$, la fonction q/x_1 est un élément inversible de $\mathcal{O}_{X,x}$. L'égalité (1) revient à dire qu'il existe des polynômes $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_t$ en $n-1$ indéterminées, non tous nuls, qui satisfont l'égalité :

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{j=1}^s p_j(y_2, \dots, y_n)[e + u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n, v_j] \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^t q_k(y_2, \dots, y_n)[e + u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n, w_k], w \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

pour tout w dans $\mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}]$. L'égalité précédente reste valable pour tout w qui centralise $e + u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$. Or pour tout v dans un ouvert non vide de \mathfrak{g}^f , on a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{e+v} \oplus \mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}]$, car $\alpha(x) = \mathfrak{g}^{\sigma(x)}$, pour tout x dans l'intersection $Y' \cap X_r$. On en déduit que l'élément

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^s p_j(y_2, \dots, y_n)[e + u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n, v_j] \\ & + \sum_{k=1}^t q_k(y_2, \dots, y_n)[e + u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n, w_k] \end{aligned}$$

est orthogonal à \mathfrak{g} , donc est nul. Désignons par d le plus grand des degrés des polynômes $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_t$ et par η la fonction polynomiale sur \mathfrak{g}^f à valeurs dans $\mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}]$:

$$x_1^d \sum_{j=1}^s p_j \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right) v_j + x_1^d \sum_{k=1}^t q_k \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right) w_k .$$

Alors $\eta(z)$ centralise $e + x_1^{-1}z$ pour tout $z = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ dans \mathfrak{g}^f , avec x_1 non nul. Or pour tout v dans un ouvert non vide de \mathfrak{g}^f , les sous-espaces \mathfrak{g}^{e+v} et $\mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}]$ de \mathfrak{g} ont une intersection nulle. Par suite η est nulle. Ceci est absurde car les polynômes $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_t$ ne sont pas tous nuls.

L'application ζ n'est donc pas identiquement nulle sur $Y \setminus X_r$ et par conséquent Δ n'est pas un élément nul de $S(\mathfrak{g})$. Ceci termine la preuve du lemme. \square

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 1.4.2. — *On a les inclusions :*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \subset \alpha(x) \subset \mathfrak{g}^e, \text{ pour tout } x \text{ dans } Y \setminus X_r.$$

Démonstration. — La deuxième inclusion est connue. On s'intéresse à la première. On fixe un point x_0 dans $Y \setminus X_r$ et il s'agit de montrer l'inclusion :

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \subset \alpha(x_0).$$

On suppose par l'absurde que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ n'est pas contenu dans $\alpha(x_0)$. Il existe alors un vecteur v' de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ qui n'appartient pas à $\alpha(x_0)$ et on construit un supplémentaire \mathfrak{n}' de $\alpha(x_0)$ dans \mathfrak{g}^e admettant une base $\{v'_1, \dots, v'_s\}$ telle que $v'_1 = v'$. La matrice $([v'_i, v'_j])_{1 \leq i, j \leq s}$ a une première colonne nulle car $v'_1 = v'$ appartient au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ de \mathfrak{g}^e . Ceci contredit le lemme 1.4.1 appliqué au supplémentaire $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$ de $\alpha(x_0)$ dans \mathfrak{g}^e . \square

Soit e_1, \dots, e_m une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. D'après la proposition précédente, on a l'inclusion $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \subset \alpha(x)$, pour tout x dans $Y \setminus X_r$. Ceci permet de construire une base $\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{\text{rg } \mathfrak{g}}(x)$ de $\alpha(x)$ pour x dans Y qui vérifie

$$\varepsilon_i(x) = e_i, \text{ pour tout } x \text{ dans } Y \setminus X_r \text{ et } i = 1, \dots, m.$$

Il existe donc des applications régulières $\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_m$ sur Y , non identiquement nulles sur $Y \setminus X_r$, qui vérifient les relations :

$$\varepsilon_i(x) = e_i + q(x)^{m_i} \tilde{\varepsilon}_i(x), \text{ pour tout } x \text{ dans } Y \text{ et } i = 1, \dots, m,$$

où m_i est un entier strictement positif.

Lemme 1.4.3. — *Pour tout i de $\{1, \dots, m\}$, l'entier m_i est égal à 1.*

Démonstration. — On suppose par l'absurde $m_i > 1$ pour un i dans $\{1, \dots, m\}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. On raisonne comme dans la démonstration du lemme 1.4.1 et on reprend les mêmes notations. Soit x dans $Y \setminus X_r$. Puisque l'image en x de $\varepsilon_i = e_i + q^{m_i} \tilde{\varepsilon}_i$ par γ'_ν est égale à $e_i + \tau^{m_i} q'(x)(v') \tilde{\varepsilon}_i(x)$, de l'égalité

$$[\sigma(x), \varepsilon_i(x)] = 0,$$

on tire l'égalité

$$[e + \tau v + \dots, e_i + \tau^{m_i} q'(x)(v') \tilde{\varepsilon}_i(x)] = 0,$$

car l'image de σ par γ'_ν est égale à $e + \tau v \pmod{\tau^2}$. Le terme de degré 1 en τ du membre de gauche de cette égalité est nul; donc $[v, e_i]$ est nul, car $m_i > 1$. Il en résulte que pour tout v dans un ouvert non vide de \mathfrak{g}^f , $[v, e_i]$ est nul. Par

suite, $[v, e_i]$ est nul pour tout v dans \mathfrak{g}^f . Ceci est absurde car e_i est un élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^f)$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ ont une intersection nulle. \square

Du lemme précédent, on déduit la relation $\varepsilon_i(x) = e_i + q(x)\widetilde{\varepsilon}_i(x)$, pour tout x dans Y et tout i dans $\{1, \dots, m\}$. D'après la proposition 1.1.1, on a la décomposition : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{e\perp} \oplus \mathfrak{g}^f$. On note, pour x dans Y et i dans $\{1, \dots, m\}$, $\widetilde{\varepsilon}_{i,1}(x)$ et $\widetilde{\varepsilon}_{i,2}(x)$ les composantes de $\widetilde{\varepsilon}_i(x)$ sur $\mathfrak{g}^{e\perp}$ et \mathfrak{g}^f respectivement.

On suppose désormais que e a la propriété (P_1) de la définition 1.1.4.

Proposition 1.4.4. — *Pour tout x dans un ouvert non vide de $Y \setminus X_r$, l'ensemble des éléments $\widetilde{\varepsilon}_{1,2}(x), \dots, \widetilde{\varepsilon}_{m,2}(x)$ est une partie libre de \mathfrak{g} .*

Démonstration. — Supposons l'assertion fautive. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Il existe des fonctions régulières a_1, \dots, a_m sur Y , non toutes identiquement nulles sur $Y \setminus X_r$, qui satisfont l'égalité :

$$a_1(x)\widetilde{\varepsilon}_{1,2}(x) + \dots + a_m(x)\widetilde{\varepsilon}_{m,2}(x) = 0,$$

pour tout x dans $Y \setminus X_r$. Soit μ l'application régulière sur Y à valeurs dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ qui à x dans Y associe $a_1(x)e_1 + \dots + a_m(x)e_m$.

On reprend les notations de la démonstration du lemme 1.4.1 avec $m_i = 1$, autrement dit $\tau = \tau_0$. Pour v dans \mathfrak{g}^f non nul, on note $[v]$ l'image de v dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^f)$. L'ensemble des points v de \mathfrak{g}^f pour lesquels le point $e \times [v]$ de $(e + \mathfrak{g}^f) \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}^f)$ appartient à $Y \setminus X_r$ est un ouvert non vide de \mathfrak{g}^f . Soit v dans \mathfrak{g}^f appartenant à cet ouvert et posons $x = e \times [v] \in Y \setminus X_r$. Alors il existe un vecteur v' tangent à Y en x tel que l'image de v' par l'application linéaire tangente à σ en x soit égale à v . En effet, on considère la courbe γ qui au complexe t associe le point $(e + tv) \times [v]$ de $(e + \mathfrak{g}^f) \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}^f)$. Pour t dans un voisinage ouvert de 0, la courbe γ est à valeurs dans Y et l'on a $\gamma(0) = x$; par suite la dérivée $\gamma'(0)$ de γ en 0 est un vecteur de l'espace tangent à Y en x . Or on vérifie aisément que $\sigma'(x)(\gamma'(0)) = v$, d'où l'existence du vecteur v' .

Puisque l'image de $\sum_{j=1}^m a_j \varepsilon_j = \sum_{j=1}^m a_j e_j + q \sum_{j=1}^m a_j \widetilde{\varepsilon}_j$ par γ'_v est égale à $\sum_{j=1}^m a_j(x)e_j + \tau \sum_{j=1}^m a'_j(x)(v')e_j + \tau q'(x)(v') \sum_{j=1}^m a_j(x)\widetilde{\varepsilon}_j(x)$, de l'égalité

$$[\sigma(x), \sum_{j=1}^m a_j(x)\varepsilon_j(x)] = 0,$$

on tire l'égalité

$$[e + \tau v, \sum_{j=1}^m a_j(x)e_j + \tau \sum_{j=1}^m a'_j(x)(v')e_j + \tau q'(x)(v') \sum_{j=1}^m a_j(x)\widetilde{\varepsilon}_{j,1}(x)] = 0.$$

Cela provient des deux égalités suivantes :

$$\gamma'_\nu(\sigma) = e + \tau v \text{ et } \sum_{j=1}^m a_j(x) \widetilde{\varepsilon}_{j,2}(x) = 0.$$

Le terme de degré 1 en τ du membre de gauche de l'égalité précédente est nul, d'où l'égalité

$$[e, q'(x)(v')] \sum_{j=1}^m a_j(x) \widetilde{\varepsilon}_{i,1}(x) = -[v, \sum_{j=1}^m a_j(x) e_j].$$

Les applications $\widetilde{\varepsilon}_{i,1}$ sont à valeurs dans $\mathfrak{g}^{e^\perp} = [e, \mathfrak{g}]$ et ce qui précède donne la relation :

$$[v, \sum_{j=1}^m a_j(x) e_j] \in [e, [e, \mathfrak{g}]] = (\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}^e])^\perp,$$

d'après la proposition 1.1.3, ce qui signifie encore, par définition de l'application μ ,

$$\langle v, [[f, \mathfrak{g}^e], \mu(x)] \rangle = \{0\}.$$

En résumé, on a montré : pour tout $e \times [v]$ dans $Y \setminus X_r$, on a la relation

$$(8) \quad v \in [[f, \mathfrak{g}^e], \mu(e \times [v])]^\perp.$$

On note

$$Y' = \{x \in Y \setminus X_r \mid \mu(x) \neq 0\}.$$

L'ensemble Y' est un ouvert non vide de $Y \setminus X_r$ et comme e vérifie la propriété (P_1) , on a l'inclusion :

$$[[f, \mathfrak{g}^e], \mu(x)]^\perp \subset \mathfrak{z}_{\max}^\perp,$$

pour tout x dans Y' . Comme le sous-espace \mathfrak{z}_{\max} est contenu dans \mathfrak{g}^e , son orthogonal $\mathfrak{z}_{\max}^\perp$ ne contient pas \mathfrak{g}^f ; sinon, ce dernier contiendrait la somme $\mathfrak{g}^f \oplus \mathfrak{g}^{e^\perp} = \mathfrak{g}$ et \mathfrak{z}_{\max} serait nul. L'ensemble

$$X^\circ = \{e \times [v] \in Y \setminus X_r \mid v \notin \mathfrak{z}_{\max}^\perp\}$$

est donc un ouvert non vide de $Y \setminus X_r$ et l'intersection $Y' \cap X^\circ$ est non vide. Il en résulte que pour tout $x = e \times [v]$ dans l'intersection $Y' \cap X^\circ$, le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], \mu(x)]^\perp$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{z}_{\max}^\perp$, d'après la relation (8). Ceci contredit le fait que x appartient à Y' . \square

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.5. — *On suppose que e est un élément nilpotent distingué non régulier de \mathfrak{g} . On note e_1, \dots, e_n une base de \mathfrak{g}^e telle que e_1, \dots, e_m soit*

une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. On suppose que e vérifie la propriété (P_1) . Alors la matrice $(\langle [f, e_i], e_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ à coefficients dans $S(\mathfrak{g}^e)$ est de rang maximal égal à $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Démonstration. — On évalue la matrice $(\langle [f, e_i], e_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ en la forme linéaire $\langle \sigma(x), \cdot \rangle$ sur \mathfrak{g}^e , pour x dans Y :

$$\begin{aligned} \langle \sigma(x), \langle [f, e_i], e_j \rangle \rangle_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} &= \langle \langle [\sigma(x), e_j], [f, e_i] \rangle \rangle_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \\ &= -q(x) \langle \langle [\sigma(x), \tilde{\varepsilon}_j(x)], [f, e_i] \rangle \rangle_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}. \end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que, pour tout x dans $Y \setminus X_r$, la matrice $(\langle [\sigma(x), \tilde{\varepsilon}_j(x)], [f, e_i] \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ n'est pas de rang maximal; autrement dit on suppose que, pour tout x dans $Y \setminus X_r$, les vecteurs à coefficients complexes

$$\begin{bmatrix} \langle [\sigma(x), \tilde{\varepsilon}_1(x)], [f, e_1] \rangle \\ \vdots \\ \langle [\sigma(x), \tilde{\varepsilon}_1(x)], [f, e_n] \rangle \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \langle [\sigma(x), \tilde{\varepsilon}_m(x)], [f, e_1] \rangle \\ \vdots \\ \langle [\sigma(x), \tilde{\varepsilon}_m(x)], [f, e_n] \rangle \end{bmatrix},$$

sont liés. Il existe donc des fonctions régulières a_1, \dots, a_m sur $Y \setminus X_r$, non toutes identiquement nulles, qui satisfont l'égalité :

$$\langle [\sigma(x), \sum_{j=1}^m a_j(x) \tilde{\varepsilon}_j(x)], [f, e_i] \rangle = 0,$$

pour $i = 1, \dots, n$ et x dans $Y \setminus X_r$. Notons χ l'application $\chi(x) = \sum_{j=1}^m a_j(x) \tilde{\varepsilon}_j(x)$. L'inclusion $Y \setminus X_r \subset \sigma^{-1}(\{e\})$ donne la relation

$$\langle \chi(x), [e, [f, \mathfrak{g}^e]] \rangle = \{0\},$$

pour tout x dans $Y \setminus X_r$. Puisque e est distingué, on a les relations, $[e, [f, \mathfrak{g}^e]] = \mathfrak{g}^e \cap [e, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^e$. Par suite, $\chi(x)$ appartient à $\mathfrak{g}^{e\perp}$, pour tout x dans $Y \setminus X_r$. Comme $\chi(x)$ s'écrit $\chi(x) = \sum_{i=1}^m a_i(x) \tilde{\varepsilon}_{i,1}(x) + \sum_{i=1}^m a_i(x) \tilde{\varepsilon}_{i,2}(x)$, avec $\sum_{i=1}^m a_i(x) \tilde{\varepsilon}_{i,1}(x)$ dans $\mathfrak{g}^{e\perp}$, l'élément $\sum_{i=1}^m a_i(x) \tilde{\varepsilon}_{i,2}(x)$ appartient à l'intersection $\mathfrak{g}^{e\perp} \cap \mathfrak{g}^f$, donc est nul. D'après la proposition 1.4.4, les éléments $\tilde{\varepsilon}_{i,2}(x)$ sont linéairement indépendants pour tout x dans un ouvert non vide de $Y \setminus X_r$. On en déduit que les fonctions a_i sont toutes identiquement nulles sur $Y \setminus X_r$, ce qui contredit les hypothèses.

Par conséquent la matrice $(\langle [\sigma(x), \tilde{\varepsilon}_j], [f, e_i] \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ à coefficients dans $S(\mathfrak{g}^e)$ est de rang maximal, pour tout x dans un ouvert non vide de $Y \setminus X_r$. \square

On en déduit le théorème 5 lorsque e vérifie la propriété (P_1) de la définition 1.1.4. En effet, avec les notations de la proposition 1.2.3, la matrice du corollaire précédent est la matrice $\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix}$. Cela résulte des relations, déjà vues, $[[f, e_j], e_i] = [[f, e_i], e_j]$, pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$. En outre le théorème 5 est connu pour les éléments nilpotents réguliers de \mathfrak{g} .

Remarque 1.4.6. — *Sous les hypothèses et avec les notations de la partie 1.3, il n'est pas difficile de montrer que les éléments nilpotents de \mathfrak{g} vérifient la propriété (P_1) lorsque $\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. En revanche, les éléments nilpotents de \mathfrak{so}_n ne vérifient pas la propriété (P_1) en général.*

1.5. Étude de la propriété (P_1) — Fin de la démonstration

Pour terminer la preuve des théorèmes 4 et 5, il reste à prouver que toutes les orbites nilpotentes distinguées non régulières dans une algèbre de Lie simple exceptionnelle vérifient la propriété (P_1) . Cela résulte des propositions 1.2.3 et 1.2.4 et du corollaire 1.4.5. Notons ici l'importance d'avoir démontré le théorème 5 dans le cas classique avant le cas exceptionnel pour appliquer la proposition 1.2.4. En effet, les sous-algèbres de Lie semi-simples d'une algèbre de Lie exceptionnelle sont isomorphes à des produits finis d'idéaux simples et ces composantes simples peuvent être isomorphes à des algèbres de Lie classiques.

On suppose dans cette partie que \mathfrak{g} est isomorphe à l'une des cinq algèbres de Lie simples exceptionnelles E_6 , E_7 , E_8 , F_4 ou G_2 et on suppose que e est un élément nilpotent distingué non régulier de \mathfrak{g} . Il s'agit de montrer que l'élément e vérifie la propriété (P_1) . On note m_1, \dots, m_r les valeurs propres de la restriction de adh au sous-espace \mathfrak{g}^e . Les entiers m_1, \dots, m_r sont pairs et on a

$$2 = m_1 < m_2 < \dots < m_r.$$

On note $\mathfrak{g}_{m_l}^e$ le sous-espace propre correspondant à la valeur propre m_l , pour $l = 1, \dots, r$. Avec les notations de la définition 1.1.4, on a :

$$\mathfrak{z}_{\max} = \mathfrak{g}_{m_r}^e.$$

On choisit une base

$$\mathcal{B} = e_{m_1}^1, \dots, e_{m_1}^{d_1}, e_{m_2}^1, \dots, e_{m_2}^{d_2}, \dots, e_{m_r}^1, \dots, e_{m_r}^{d_r}$$

de \mathfrak{g}^e de vecteurs propres telle que $e_{m_l}^1, \dots, e_{m_l}^{d_l}$ forme une base de $\mathfrak{g}_{m_l}^e$, pour $l = 1, \dots, r$, et telle qu'il existe une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ formée de vecteurs de \mathcal{B} . On peut supposer que $e_{m_1}^1 = e_2^1 = e$. On fixe un élément non nul v de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$

et on souhaite montrer que le sous-espace $\mathfrak{g}_{m_r}^e$ est contenu dans le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], v]$. Commençons par prouver le lemme suivant :

Lemme 1.5.1. — *Soit v un élément non nul de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Si la coordonnée de v en $e_{m_1}^1 = e$ est non nulle, alors le sous-espace $\mathfrak{g}_{m_r}^e$ est contenu dans le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], v]$.*

Démonstration. — Soit v un élément non nul de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ dont la coordonnée λ de v en $e_{m_1}^1 = e$ est non nulle. Soit p dans $\{1, \dots, d_r\}$. L'élément $e_{m_r}^p$ de $\mathfrak{g}_{m_r}^e$ s'écrit

$$e_{m_r}^p = [[f, -\frac{1}{m_r} e_{m_r}^p], e].$$

D'après [22], Théorème 2.3, ou [2], Théorème 7.1, e est le seul élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ de poids 2. Comme m_r est la plus grande valeur propre, on en déduit que l'élément $e_{m_r}^p$ s'écrit sous la forme :

$$e_{m_r}^p = [[f, -\frac{1}{m_r \times \lambda} e_{m_r}^p], v].$$

Ceci étant vrai pour tout p de $\{1, \dots, d_r\}$, on en déduit l'inclusion :

$$\mathfrak{g}_{m_r}^e \subseteq [[f, \mathfrak{g}^e], v],$$

et le lemme. □

Soit $i_1 < \dots < i_s$ dans $\{1, \dots, r\}$ et $k_{(1,1)}, \dots, k_{(1,\delta_1)}, \dots, k_{(s,1)}, \dots, k_{(s,\delta_s)}$ des indices tels que les éléments

$$e_{m_{i_1}}^{k_{(1,1)}}, \dots, e_{m_{i_1}}^{k_{(1,\delta_1)}}, \dots, e_{m_{i_s}}^{k_{(s,1)}}, \dots, e_{m_{i_s}}^{k_{(s,\delta_s)}}$$

forment une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. En particulier, on a les relations : $m_{i_1} = 2$ et $\delta_1 = 1$, $m_{i_s} = m_r$, $\delta_s = d_r$ et $k_{(s,l)} = l$, pour $l = 1, \dots, \delta_s$. L'élément v s'écrit sous la forme

$$v = \alpha_1^1 e_{m_{i_1}}^{k_{(1,1)}} + \dots + \alpha_1^{\delta_1} e_{m_{i_1}}^{k_{(1,\delta_1)}} + \dots + \alpha_s^1 e_{m_{i_s}}^{k_{(s,1)}} + \dots + \alpha_s^{\delta_s} e_{m_{i_s}}^{k_{(s,\delta_s)}},$$

avec $(\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^{\delta_1}, \dots, \alpha_s^1, \dots, \alpha_s^{\delta_s})$ non nul dans \mathbb{C}^K où $K = \delta_1 + \dots + \delta_s$. Soit l_0 le plus petit entier de $\{1, \dots, s\}$ tel que le δ_{l_0} -uplet $\underline{\alpha}_{l_0} = (\alpha_{l_0}^1, \dots, \alpha_{l_0}^{\delta_{l_0}})$ soit non nul.

Pour i, j et k dans $\{1, \dots, r\}$ et t, p et q dans $\{1, \dots, d_i\}$, $\{1, \dots, d_j\}$ et $\{1, \dots, d_k\}$ respectivement, on note $\lambda_{(m_k, q), (m_i, t), (m_j, p)}$ la coordonnée de l'élément $[[f, e_{m_k}^q], e_{m_i}^t]$ en $e_{m_j}^p$. Notons que si $\lambda_{(m_k, q), (m_i, t), (m_j, p)}$ est non nul, on a la relation $m_k = m_j - m_i + 2$.

On suppose que $m_r - m_{i_{l_0}} + 2$ est une valeur propre de la restriction de adh à \mathfrak{g}^e . On note alors $k(l_0)$ l'élément de $\{1, \dots, r\}$ tel que $m_{k(l_0)} = m_r - m_{i_{l_0}} + 2$.

Soit $w = \sum_{p=1}^{d_r} b_p e_{m_r}^p$ un élément de $\mathfrak{g}_{m_r}^e$. On cherche u dans \mathfrak{g}^e vérifiant

$$[[f, u], v] = w$$

sous la forme $u = \sum_{q=1}^{d_{k(l_0)}} a_q e_{m_{k(l_0)}}^q$. Ce problème revient à résoudre un système

linéaire d'inconnue le vecteur $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{d_{k(l_0)}} \end{bmatrix}$, de second membre $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{d_r} \end{bmatrix}$ et de

matrice associée la matrice $M(l_0, \underline{\alpha}_{l_0})$ de taille $d_r \times d_{k(l_0)}$ dont les coefficients $(M(l_0, \underline{\alpha}_{l_0}))_{p,q}$ sont donnés par :

$$(M(l_0, \underline{\alpha}_{l_0}))_{p,q} = \sum_{t=1}^{\delta_{l_0}} \alpha_{l_0}^t \lambda_{(m_{k(l_0)}, q), (m_{i_{l_0}}, t), (m_r, p)},$$

pour p dans $\{1, \dots, d_r\}$ et q dans $\{1, \dots, d_{k(l_0)}\}$. La matrice $M(l_0, \underline{\alpha}_{l_0})$ s'écrit aussi, de manière plus agréable, comme une somme de matrices :

$$(9) \quad M(l_0, \underline{\alpha}_{l_0}) = \sum_{t=1}^{\delta_{l_0}} \alpha_{l_0}^t M(l_0, \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\text{avec 1 en } t^{\text{ième}} \text{ position}}).$$

Si $m_r - m_{i_{l_0}} + 2$ n'est pas une valeur propre de la restriction de adh à \mathfrak{g}^e , on pose :

$$M(l_0, \underline{\alpha}_{l_0}) = 0_{d_r, 1},$$

où $0_{d_r, 1}$ est la matrice colonne nulle de taille d_r . Il est clair que si la matrice $M(l_0, \underline{\alpha}_{l_0})$ est surjective, le sous-espace $\mathfrak{g}_{m_r}^e$ est contenu dans le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], v]$ puisque le problème précédent à une solution pour tout w dans $\mathfrak{g}_{m_r}^e$. Remarquons que cette condition ne dépend que des termes de plus bas poids $m_{i_{l_0}}$ intervenant dans l'écriture de v . Cette discussion se résume en la proposition suivante :

Proposition 1.5.2. — *On reprend les notations précédentes et on suppose que la matrice $M(l, \underline{\alpha}_l)$ est surjective pour tout l de $\{1, \dots, s\}$ et tout δ_l -uplet $\underline{\alpha}_l$ non nul. Alors l'élément e vérifie la propriété (P_1) .*

Remarque 1.5.3. — *D'après le lemme 1.5.1, il suffit de vérifier la surjectivité des matrices $M(l, \underline{\alpha}_l)$, pour $l \geq 2$ et $\underline{\alpha}_l$ non nul. Cela laisse $s - 1$ matrices, dépendant d'un paramètre $\underline{\alpha}_l$, à étudier. Lorsque $\delta_s = d_r = 1$, la matrice $M(s, \underline{\alpha}_s) = \alpha_s^1 M(s, (1))$ est toujours surjective, pour α_s^1 non nul. En effet, la matrice $M(s, (1))$ est une matrice ligne dont le premier coefficient,*

$\lambda_{(2,1),(m_r,1),(m_r,1)} = -m_r$, est non nul. Dans ce cas, on réduit à $s-2$ le nombre de matrices à étudier.

On est en mesure de prouver la proposition suivante qui achève la démonstration des théorèmes 4 et 5.

Proposition 1.5.4. — *On suppose que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple de type E_6, E_7, E_8, F_4 ou G_2 . Alors les orbites nilpotentes distinguées non régulières de \mathfrak{g} vérifient la propriété (P_1) .*

Démonstration. — Voyons tout d'abord le cas de G_2 . Dans G_2 , il n'y a qu'une seule orbite nilpotente distinguée non régulière et pour cette orbite le centre est de dimension 2. D'après la remarque 1.5.3, cette orbite vérifie (P_1) .

On suppose désormais que \mathfrak{g} est de type E_6, E_7, E_8 ou F_4 et on veut montrer que les orbites nilpotentes distinguées non régulières de \mathfrak{g} vérifient les hypothèses de la proposition 1.5.2.

On trouve dans [9] une liste de \mathfrak{sl}_2 -triplets correspondant aux orbites nilpotentes. Le logiciel GAP4 permet en outre d'effectuer des calculs dans les algèbres de Lie. Il permet notamment de calculer le centralisateur d'un élément, le centre d'une sous-algèbre, etc. Pour une orbite nilpotente distinguée non régulière de \mathfrak{g} donnée, on considère l'élément e du \mathfrak{sl}_2 -triplet fournit par [9] correspondant à la caractéristique de l'orbite. Grâce au logiciel GAP4, on exhibe une base \mathcal{B} vérifiant les conditions qui précèdent le lemme 1.5.1 et on reprend les notations précédentes. On vérifie dans un premier temps que pour tout l de $\{1, \dots, s\}$, il existe un entier $k(l)$ dans $\{1, \dots, r\}$ tel que $m_{k(l)} = m_r - m_{i_l} + 2$. On calcule ensuite, à l'aide de GAP4 toujours, la matrice $M(l, \underline{\alpha}_l)$, pour $\underline{\alpha}_l = (\alpha_l^1, \dots, \alpha_l^{\delta_l})$ un δ_l -uplet non nul, et on vérifie la surjectivité de cette matrice. D'après la remarque 1.5.3, on peut supposer $l \geq 2$ et lorsque $d_r = 1$, on peut supposer de plus $l \leq s - 1$. Enfin, dans la plupart des cas, on s'aperçoit que la somme de la relation (1) n'a qu'un seul terme. L'étude de la surjectivité de $M(l, \underline{\alpha}_l)$ ne dépend alors d'aucun paramètre, ce qui facilite le travail.

Les calculs faits à partir de GAP4 permettent de vérifier les hypothèses de la proposition 1.5.2 pour E_6, E_7, E_8 et F_4 . Ceci termine la preuve de la proposition. On trouve dans le chapitre 3 la liste complète de tous les calculs pour E_6, E_7, E_8 et F_4 . \square

CHAPITRE 2

INDICE ET DÉCOMPOSITION DE CARTAN

Introduction

Soit \mathfrak{g}_0 une algèbre de Lie semi-simple réelle et soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ une décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 . On note θ l'involution de Cartan correspondante. Soit $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ un sous-espace abélien maximal de \mathfrak{p}_0 . Le sous-espace $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ est formé d'éléments semi-simples dans \mathfrak{g}_0 et, pour λ dans $\widehat{\mathfrak{a}}_0^*$, on pose

$$\mathfrak{g}_0^\lambda = \{X \in \mathfrak{g}_0 \mid [H, X] = \lambda(H)X, \forall H \in \widehat{\mathfrak{a}}_0\}.$$

L'ensemble Σ constitué des formes linéaires non nulles λ sur $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ pour lesquelles le sous-espace \mathfrak{g}_0^λ est non nul est un système de racines dans $\widehat{\mathfrak{a}}_0^*$. Soit Σ_+ un système de racines positives de Σ . On pose

$$\mathfrak{n}_0 = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{g}_0^\lambda,$$

de sorte qu'on obtient la décomposition d'Iwasawa de \mathfrak{g}_0 suivante :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0.$$

En posant $\mathfrak{b}_0 = \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$, on obtient la décomposition :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0.$$

Dans tout ce qui suit, on note sans indice 0 les complexifiés des algèbres de Lie réelles notées, elles, avec un indice 0. Ainsi, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^\mathbb{C}$, $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k}_0)^\mathbb{C}$, $\widehat{\mathfrak{a}} = (\widehat{\mathfrak{a}}_0)^\mathbb{C}$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_0)^\mathbb{C}$, $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_0)^\mathbb{C}$, etc. L'indice d'une algèbre de Lie \mathfrak{q} , noté $\text{ind } \mathfrak{q}$, est la dimension minimale des stabilisateurs pour l'action coadjointe des éléments de \mathfrak{q}^* . Si \mathfrak{q} est le complexifié d'une algèbre de Lie réelle \mathfrak{q}_0 , alors on a : $\text{ind } \mathfrak{q} = \text{ind } \mathfrak{q}_0$. Le but de ce chapitre est de donner une formule explicite de l'indice de \mathfrak{b} . Précisément, on montre la relation suivante :

$$(1) \quad \text{ind } \mathfrak{b} = \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k}.$$

Dans [23], M. Raïs s'intéresse à des exemples d'additivité de l'indice. En particulier, à propos de la décomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$, il se demande si la relation

$$(2) \quad \text{ind } \mathfrak{g}_0 = \text{ind } \mathfrak{k}_0 + \text{ind } \mathfrak{b}_0$$

est vraie. Puisque les algèbres de Lie \mathfrak{g} et \mathfrak{k} sont réductives, leur indice est égal à leur rang. Ainsi, la relation (2) est satisfaite si, et seulement si, la relation (1) est vérifiée. On répond ici de façon positive à sa question.

On donne dans la première partie des précisions concernant la structure de \mathfrak{g}_0 . On rappelle dans la deuxième partie la construction «en cascade» de Kostant. Cette construction intervient dans [30] pour la recherche de formes linéaires stables dans une sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. Notons qu'ici \mathfrak{b} n'est pas en général une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} . On prouve dans la partie 4 les relations (1) et (2). La construction de Kostant intervient dans la démonstration pour définir une forme régulière sur \mathfrak{b} et pour définir une forme stable sur une certaine sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} qui contient \mathfrak{b} . Parmi les algèbres de Lie réelles semi-simples \mathfrak{g}_0 , on caractérise de plus dans cette partie, celles pour lesquelles la sous-algèbre \mathfrak{b} possède une forme stable. La dernière partie repose sur la classification des algèbres de Lie simples réelles. Pour chaque type d'algèbres de Lie simples réelles, on calcule explicitement l'indice de \mathfrak{b} et on précise si la sous-algèbre \mathfrak{b} possède ou non une forme stable. Les groupes de Lie quasi-réductifs et les algèbres de Lie quasi-réductives ont été introduits par M. Duflo car ils possèdent des propriétés remarquables pour l'analyse. Une algèbre de Lie quasi-réductive possède en particulier une forme linéaire stable. Il apparaît que la caractérisation précédente coïncide avec la caractérisation des algèbres de Lie \mathfrak{g} pour lesquelles la sous-algèbre \mathfrak{b} est quasi-réductive. On poursuit dans cette direction dans la dernière partie en donnant une caractérisation des sous-algèbres seaweed minimales de \mathfrak{g} quasi-réductives.

2.1. Quelques précisions sur la structure de \mathfrak{g}_0

On regroupe dans cette partie quelques résultats concernant la structure de \mathfrak{g}_0 . On trouve les preuves de ces résultats dans [7] et [13]. Soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 , stable par θ . Puisque \mathfrak{h}_0 est stable, elle s'écrit sous la forme

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{t}_0,$$

avec \mathfrak{a}_0 dans \mathfrak{p}_0 et \mathfrak{t}_0 dans \mathfrak{k}_0 . La sous-algèbre \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} et on note Δ le système de racines associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Les éléments de Δ sont à valeurs réelles sur $\mathfrak{a}_0 \oplus i\mathfrak{t}_0$. On choisit un système de racines positives Δ_+ dans Δ en prenant \mathfrak{a}_0 avant $i\mathfrak{t}_0$ pour former l'ordre lexicographique sur $(\mathfrak{a}_0 \oplus i\mathfrak{t}_0)^*$. Ainsi, pour α une racine de Δ non nulle sur \mathfrak{a}_0 ,

la positivité de α ne dépend que de sa restriction à \mathfrak{a}_0 . On note Π la base de Δ_+ .

On note encore θ l'extension \mathbb{C} -linéaire de θ à \mathfrak{g} . La transposée de θ est également notée θ . On note Δ' (respectivement Δ'') l'ensemble des racines de Δ qui s'annulent sur \mathfrak{a} (respectivement qui ne s'annulent pas sur \mathfrak{a}). On a $\theta(\Delta) = \Delta$ et Δ' est l'ensemble des éléments de Δ invariants par θ . On pose $\Delta''_+ = \Delta'' \cap \Delta_+$, $\Delta''_- = \Delta'' \cap (-\Delta_+)$. On a $\theta(\Delta''_+) = \Delta''_-$ et $(\Delta''_+ + \Delta''_-) \cap \Delta \subset \Delta''_+$.

Pour chaque élément α de Δ , on fixe X_α un élément non nul de \mathfrak{g}^α et on note H_α l'unique élément de $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$. Une racine est dite *réelle* si elle prend des valeurs réelles sur \mathfrak{h}_0 (i.e. si elle s'annule sur \mathfrak{t}_0), *imaginaire* si elle prend des valeurs imaginaires sur \mathfrak{h}_0 (i.e. si elle s'annule sur \mathfrak{a}_0), et *complexe* sinon. Le lemme suivant est connu et ne présente pas de difficulté :

Lemme 2.1.1. — (i) : Pour α dans Δ , on a : $\theta X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\theta\alpha}$,
(ii) : Pour α dans Δ , on a : $\theta H_\alpha = H_{\theta\alpha}$,
(iii) : Soit α une racine de Δ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est réelle} &\iff \theta\alpha = -\alpha \iff H_\alpha \in \mathfrak{a}, \\ \alpha \text{ est imaginaire} &\iff \theta\alpha = \alpha \iff H_\alpha \in \mathfrak{t}. \end{aligned}$$

La *dimension compacte* est par définition la dimension, $\dim \mathfrak{t}_0$, de l'intersection de \mathfrak{h}_0 avec \mathfrak{k}_0 et la *dimension non-compacte* est par définition la dimension, $\dim \mathfrak{a}_0$, de l'intersection de \mathfrak{h}_0 avec \mathfrak{p}_0 . On dit que \mathfrak{h}_0 est *maximalement compacte* si la dimension compacte est la plus grande possible et on dit que \mathfrak{h}_0 est *maximalement non-compacte* si la dimension non-compacte est la plus grande possible.

Remarque 2.1.2. — Il se peut que \mathfrak{h}_0 soit à la fois maximalement compacte et maximalement non-compacte. C'est le cas si \mathfrak{g}_0 est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie simple complexe, ou si \mathfrak{g}_0 est isomorphe à $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ ou à l'algèbre de Lie simple exceptionnelle EIV, comme on peut le voir à l'aide de la table 2 présentée à la fin de ce chapitre.

Si α est une racine imaginaire de Δ , alors $\theta\alpha = \alpha$ donc \mathfrak{g}^α est stable par θ , et on a $\mathfrak{g}^\alpha = (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{p})$. Puisque \mathfrak{g}^α est de dimension 1, on a $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{k}$ ou $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. On dit que la racine imaginaire α est *compacte* si $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{k}$ et *non-compacte* si $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. Le résultat suivant est démontré en [13], proposition 6.70.

Lemme 2.1.3. — *Soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 stable par θ . Alors, il n'existe pas de racine imaginaire non-compacte si, et seulement si, \mathfrak{h}_0 est maximale non-compact et, il n'existe pas de racine réelle si, et seulement si, \mathfrak{h}_0 est maximale compact.*

Soit $\widehat{\mathfrak{t}}_0$ un sous-espace abélien maximal du centralisateur $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}_0}(\widehat{\mathfrak{a}}_0)$ de $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ dans \mathfrak{k}_0 . Le sous-espace $\widehat{\mathfrak{t}}_0$ est formé d'éléments semi-simples dans \mathfrak{g}_0 et $\widehat{\mathfrak{h}}_0 = \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{t}}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} stable par θ qui est maximale non-compacte. On surmonte d'un chapeau les ensembles définis précédemment relatifs à $\widehat{\mathfrak{h}}$. On a :

$$(\mathfrak{g}_0)^\lambda = \mathfrak{g}_0 \cap \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+ \\ \alpha|_{\widehat{\mathfrak{a}}} = \lambda}} \mathfrak{g}^\alpha \right)$$

et

$$\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_0)^\mathbb{C} = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+} \mathfrak{g}^\alpha.$$

D'où

$$\mathfrak{b} = \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+} \mathfrak{g}^\alpha \right).$$

On termine par un lemme :

Lemme 2.1.4. — *L'ensemble $\widehat{\Delta}'_{\widehat{\mathfrak{t}}}$ est le système de racines associé au couple $(\mathfrak{m}, \widehat{\mathfrak{t}})$. Si α appartient à $\widehat{\Delta}'$, on a $\mathfrak{m}^{\alpha|_{\widehat{\mathfrak{t}}}} = \mathfrak{g}^\alpha$. Enfin, on a :*

$$\mathfrak{m} = \widehat{\mathfrak{t}} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}'} \mathfrak{g}^\alpha \right).$$

2.2. Construction «en cascade» de Kostant

Soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 stable par θ . On reprend les notations de la partie précédente. On utilise en outre les notations introduites dans [30] et [31]. Si λ appartient à \mathfrak{h}^* , on écrit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ pour $\lambda(H_\alpha)$. Pour toute partie S de Π , on note Δ^S le système de racines engendré par S , et Δ^S_+ le système de racines positives correspondant. Si S est une partie connexe de Π , le système de racines Δ^S est irréductible et on note ε_S la plus grande racine de Δ^S_+ .

Supposons que S est une partie connexe de Π . Les résultats qui suivent vont être utilisés à plusieurs reprises dans la suite; ils sont démontrés dans [1] et rappelés dans [29], [30] et [31]. Pour toute racine α de $\Delta_+^S \setminus \{\varepsilon_S\}$, on a : $\langle \alpha, \varepsilon_S^\vee \rangle \in \{0, 1\}$. Si T est l'ensemble des racines α de Δ^S qui vérifient $\langle \alpha, \varepsilon_S^\vee \rangle = 0$, alors T est un système de racines dans le sous-espace de \mathfrak{h}^* qu'il engendre et l'ensemble $\{\alpha \in S \mid \langle \alpha, \varepsilon_S^\vee \rangle = 0\}$ forme une base de T . De plus, si α appartient à $T \cap \Delta_+^S$, alors on a : $\alpha \pm \varepsilon_S \notin \Delta$. Ainsi, pour α dans T , les racines α et ε_S sont fortement orthogonales.

On rappelle la construction et quelques propriétés d'un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales dans Δ . Par récurrence sur le cardinal de S , on définit un sous-ensemble $\mathcal{K}(S)$ de l'ensemble des parties de Π de la manière suivante :

- a) : $\mathcal{K}(\emptyset) = \emptyset$,
- b) : Si S_1, \dots, S_r sont les composantes connexes de S , on a :

$$\mathcal{K}(S) = \mathcal{K}(S_1) \cup \dots \cup \mathcal{K}(S_r),$$

- c) : Si S est connexe, alors :

$$\mathcal{K}(S) = \{S\} \cup \mathcal{K}(\{\alpha \in S \mid \langle \alpha, \varepsilon_S^\vee \rangle = 0\}).$$

Les deux lemmes suivants regroupent des propriétés de cette construction utiles pour la suite. Ils sont énoncés dans [29], [30] ou [31].

Lemme 2.2.1. — (i) : *Tout élément K de $\mathcal{K}(S)$ est une partie connexe de Π .*

(ii) : *Si K, K' appartiennent à $\mathcal{K}(S)$, alors ou bien $K \subset K'$, ou bien $K' \subset K$, ou bien K et K' sont des parties disjointes de S telles que $\alpha + \beta$ n'appartient pas à Δ , pour α dans Δ^K et β dans $\Delta^{K'}$.*

(iii) : *Si K et K' sont des éléments distincts de $\mathcal{K}(S)$, alors ε_K et $\varepsilon_{K'}$ sont fortement orthogonales.*

Si $K \in \mathcal{K}(\Pi)$, on pose :

$$\Gamma^K = \{\alpha \in \Delta^K \mid \langle \alpha, \varepsilon_K^\vee \rangle > 0\}, \quad \Gamma_0^K = \Gamma^K \setminus \{\varepsilon_K\}, \quad \mathcal{H}_K = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma^K} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Lemme 2.2.2. — *Soit K, K' dans $\mathcal{K}(\Pi)$, α, β dans Γ^K et γ dans $\Gamma^{K'}$.*

- (i) : On a $\Gamma^K = \Delta_+^K \setminus \{\delta \in \Delta_+^K \mid \langle \delta, \varepsilon_S^\vee \rangle = 0\}$.
- (ii) : L'ensemble Δ_+ est la réunion disjointe des $\Gamma^{K''}$ pour K'' dans $\mathcal{K}(\Pi)$, et \mathcal{H}_K est une algèbre de Heisenberg de centre $\mathfrak{g}^{\varepsilon_K}$.
- (iii) : Si $\alpha + \beta$ appartient à Δ , alors $\alpha + \beta = \varepsilon_K$.
- (iv) : Si $\alpha + \gamma$ appartient à Δ , alors ou bien $K \subset K'$ et $\alpha + \gamma$ appartient à $\Gamma^{K'}$, ou bien $K' \subset K$ et $\alpha + \gamma$ appartient à Γ^K .

Remarque 2.2.3. — Notons que si K est un élément de $\mathcal{K}(\Pi)$, alors pour toute racine α de Γ_0^K , il existe une unique racine β de Γ_0^K telle que $\alpha + \beta = \varepsilon_K$ et on a :

$$\langle \alpha, \varepsilon_K^\vee \rangle = \langle \beta, \varepsilon_K^\vee \rangle = 1.$$

Cela résulte du point (ii) du lemme 2.2.2 et des résultats de [1] rappelés précédemment.

Le cardinal de $\mathcal{K}(\Pi)$ dépend de \mathfrak{g} mais pas de \mathfrak{h} ou de Π . On note $k_{\mathfrak{g}}$ cet entier. La table 1 donne la valeur de $k_{\mathfrak{g}}$ pour les différents types d'algèbres de Lie simples.

	$A_l, l \geq 1$	$B_l, l \geq 2$	$C_l, l \geq 3$	$D_l, l \geq 4$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$k_{\mathfrak{g}}$	$\left\lceil \frac{l+1}{2} \right\rceil$	l	l	$2 \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$	4	7	8	4	2

TABLE 1. $k_{\mathfrak{g}}$ pour les algèbres de Lie simples.

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{K}''(\Pi) &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_{K|_{\mathfrak{a}}} \neq 0\} \\ &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_K \in \Delta_+''\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(\Pi) &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_{K|_{\mathfrak{a}}} = 0\} \\ &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_K \in \Delta_+' \}. \end{aligned}$$

Si K appartient à $\mathcal{K}'(\Pi)$, alors $\theta\varepsilon_K = \varepsilon_K$. On cherche à étudier la façon dont l'involution θ agit sur l'ensemble $\mathcal{K}''(\Pi)$. On introduit pour cela la définition suivante :

Définition 2.2.4. — On dira que le couple (\mathfrak{h}_0, Π) a la propriété (P_2) si, pour tout K dans $\mathcal{K}''(\Pi)$, il existe un unique élément L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que, $-\theta\varepsilon_K = \varepsilon_L$.

On introduit les deux sous-ensembles suivants de $\mathcal{K}''(\Pi)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) &= \{K \in \mathcal{K}''(\Pi) \mid -\theta\varepsilon_K = \varepsilon_K\} \\ &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \varepsilon_K \text{ est réelle}\}\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi) = \{K \in \mathcal{K}''(\Pi) \mid -\theta\varepsilon_K \neq \varepsilon_K\}.$$

Si (\mathfrak{h}_0, Π) a la propriété (P_2) , alors θ induit une involution dans $\mathcal{K}''(\Pi)$, que l'on note encore θ . L'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ est alors l'ensemble des points fixes pour cette involution et, puisque θ est une involution, le cardinal de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi)$ est pair et l'on peut choisir un sous-ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\Pi)$ de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi)$ de sorte que,

$$\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi) = \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\Pi) \cup \theta\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\Pi).$$

Proposition 2.2.5. — Soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 stable par θ . Si \mathfrak{h}_0 est maximale non-compacte, alors (\mathfrak{h}_0, Π) a la propriété (P_2) .

Démonstration. — Il s'agit de prouver que, pour tout K dans $\mathcal{K}''(\Pi)$, il existe un unique élément L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que, $-\theta\varepsilon_K = \varepsilon_L$. On démontre cette assertion par induction sur l'inclusion dans $\mathcal{K}''(\Pi)$.

1) Soit K dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ qui est maximal pour l'inclusion et supposons par l'absurde l'assertion fautive. Alors il existe un élément L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que $-\theta\varepsilon_K$ appartienne à Γ_0^L . Soit α dans Γ_0^L tel que,

$$(3) \quad \alpha + (-\theta\varepsilon_K) = \varepsilon_L.$$

On a alors,

$$(4) \quad (\theta\alpha) + (-\theta\varepsilon_L) = \varepsilon_K.$$

Si $\theta\alpha$ est une racine positive, alors α appartient à Δ'_+ et $\theta\alpha = \alpha$. La relation (4) entraîne alors que α appartient à Γ_0^K , d'après le lemme 2.2.2, (iii) et (iv).

On en déduit que $K = L$, car l'intersection $\Gamma^L \cap \Gamma^K$ est non vide, puis que $\varepsilon_K + \theta\varepsilon_K$ est une racine. C'est une racine imaginaire non-compacte. En effet, c'est clairement une racine imaginaire et, d'après le lemme 2.1.1 (i), le crochet $[X_{\varepsilon_K}, \theta X_{\varepsilon_K}]$ est un élément non nul de $\mathfrak{g}^{\varepsilon_K + \theta\varepsilon_K}$, qui est contenu dans \mathfrak{p} , donc la racine imaginaire $\varepsilon_K + \theta\varepsilon_K$ est non-compacte. Ceci est alors en contradiction avec le lemme 2.1.3, car \mathfrak{h}_0 est maximale non-compacte.

Par suite, $-\theta\alpha$ est une racine positive et la relation (4) donne :

$$\varepsilon_K + (-\theta\alpha) = -\theta\varepsilon_L.$$

Puisque K est maximal, il résulte du lemme 2.2.2 (iv), que les racines $-\theta\alpha$ et $-\theta\varepsilon_L$ appartiennent à Δ_+^K . La relation précédente contredit alors que ε_K est la plus grande racine de Δ_+^K .

2) Soit K dans $\mathcal{K}''(\Pi)$. Supposons l'assertion démontrée pour tout élément dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ contenant strictement K et supposons par l'absurde l'assertion fautive pour K . Alors il existe un élément L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que $-\theta\varepsilon_K$ appartienne à Γ_0^L . Soit α comme précédemment dans Γ_0^L tel que,

$$(5) \quad \alpha + (-\theta\varepsilon_K) = \varepsilon_L.$$

En raisonnant comme dans le cas (1), on obtient que $-\theta\alpha$ est une racine positive et on a,

$$(6) \quad \varepsilon_K + (-\theta\alpha) = -\theta\varepsilon_L.$$

Soit M dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que $-\theta\alpha$ appartienne à Γ_0^M . D'après le lemme 2.2.2 (iv), il y a deux cas : si $M \subseteq K$, on obtient une contradiction en raisonnant comme dans le cas (1). Sinon, alors $-\theta\varepsilon_L$ appartient à Γ^M et d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $-\theta\varepsilon_L = \varepsilon_M$. La relation (6) contredit alors que les racines ε_K et ε_M sont fortement orthogonales.

Par induction sur l'inclusion, la proposition est démontrée. \square

En particulier, puisque $\widehat{\mathfrak{h}}_0$ est maximale non-compacte, la proposition précédente assure que le couple $(\widehat{\mathfrak{h}}_0, \widehat{\Pi})$ a la propriété (P_2) .

Lemme 2.2.6. — *Si (\mathfrak{h}_0, Π) a la propriété (P_2) , alors pour tout K dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, on a l'inclusion $\Gamma^K \subset \Delta_+''$.*

Démonstration. — Soit K dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$. Il est clair que ε_K appartient à Δ_+'' . Soit α dans Γ_0^K . Puisque θ est une involution dans Δ'' et dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, on peut supposer que K est contenu dans θK . Supposons par l'absurde que α n'appartient pas à Δ_+'' , alors α appartient à Δ_+' , et on a $\theta\alpha = \alpha$. Il en résulte que,

$$(7) \quad \varepsilon_{\theta K} + \alpha = -\theta\beta,$$

où β est l'unique élément dans Γ_0^K tel que, $\alpha + \beta = \varepsilon_K$. Puisque K est contenu dans θK , on en déduit que α et $-\theta\beta$ appartiennent à $\Delta_+^{\theta K}$, d'après le lemme 2.2.2 (iv). Ceci est impossible d'après la relation (7), car $\varepsilon_{\theta K}$ est la plus grande racine de $\Delta_+^{\theta K}$. \square

Proposition 2.2.7. — *Soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 stable par θ . On suppose que (\mathfrak{h}_0, Π) a la propriété (P_2) et que \mathfrak{h}_0 n'est pas maximale compacte. Alors l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ n'est pas vide.*

Démonstration. — Puisque \mathfrak{h}_0 n'est pas maximale compacte, il résulte du lemme 2.1.3 qu'il existe un élément K dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que Γ^K possède une racine réelle α . Il suffit de montrer que ε_K est une racine réelle. On peut supposer que α appartient à Γ_0^K . Il existe β dans Γ_0^K tel que,

$$(8) \quad \alpha + \beta = \varepsilon_K.$$

Puisque (\mathfrak{h}_0, Π) a la propriété (P_2) , on en déduit la relation suivante :

$$(9) \quad \alpha + (-\theta\beta) = \varepsilon_{\theta K}.$$

D'après le lemme 2.2.6, $-\theta\beta$ est une racine positive et la relation (9) implique que α et $-\theta\beta$ appartiennent à $\Gamma_0^{\theta K}$. L'intersection $\Gamma_0^{\theta K} \cap \Gamma_0^K$ est alors non vide, d'où il vient $\theta K = K$. Par suite, ε_K est réelle. \square

2.3. Utilisation des transformations de Cayley

On utilise dans cette partie les transformations de Cayley afin d'obtenir la proposition 3.3. On trouve davantage de précisions concernant ces transformations dans [13]. Si \mathfrak{h}_0 et \mathfrak{h}'_0 sont deux sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g}_0 stables par θ , leurs complexifiées \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' sont conjuguées dans \mathfrak{g} . Les transformations de Cayley permettent de construire explicitement, et étapes par étapes, un automorphisme de \mathfrak{g} qui conjugue ces deux sous-algèbres. Il existe deux types de transformations de Cayley à partir d'une sous-algèbre de Cartan θ -stable :

- (i) : avec une racine imaginaire non-compacte β , on construit une nouvelle sous-algèbre de Cartan dont l'intersection avec \mathfrak{p}_0 augmente de 1 en dimension. On notera \mathbf{c}_β la transformation correspondante.
- (ii) : avec une racine réelle α , on construit une nouvelle sous-algèbre de Cartan dont l'intersection avec \mathfrak{p}_0 diminue de 1 en dimension. On notera \mathbf{d}_α la transformation correspondante.

Seules les transformations de type \mathbf{d}_α vont intervenir dans la suite. On donne ici les résultats nécessaires concernant ces transformations. Soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 stable par θ . Si α est une racine réelle de Δ , on pose :

$$\mathbf{d}_\alpha = \text{Ad}(\exp i\frac{\pi}{4}(\theta X_\alpha - X_\alpha)).$$

Pour β dans Δ , on note $\mathbf{d}_\alpha(\beta)$ la forme linéaire de $\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h})$ qui à H dans $\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h})$ associe $\beta(\mathbf{d}_\alpha^{-1}(H))$; c'est un élément du système de racines associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}))$. On a

$$\mathfrak{g}_0 \cap \mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}) = \ker(\alpha|_{\mathfrak{h}_0}) \oplus \mathbb{R}(X_\alpha + \theta X_\alpha),$$

d'où on tire la relation :

$$(10) \quad \dim(\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - 1.$$

On dispose en outre de la relation suivante :

$$(11) \quad \mathbf{d}_\alpha(H_\alpha) = i\mu(X_\alpha + \theta X_\alpha),$$

où μ est réel non nul. Enfin, compte tenu de l'expression de \mathbf{d}_α , il est clair que si β est une racine fortement orthogonale à α et différente de α , alors $\mathbf{d}_\alpha(H_\beta) = H_\beta$.

Lemme 2.3.1. — *Soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 stable par θ . Soit K dans $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$. Alors la sous-algèbre $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 qui est stable par θ et,*

$$\mathcal{K}''(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi)) = \{\varepsilon_L \mid L \in \mathcal{K}''(\Pi)\} \setminus \{\varepsilon_K\}.$$

De plus, $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_K)$ est un élément de $\mathcal{K}'(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$. En particulier, si (\mathfrak{h}_0, Π) a la propriété (P_2) , alors $(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0), \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ a encore la propriété (P_2) .

Démonstration. — La sous-algèbre $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 et l'expression de $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}$ montre qu'elle est stable par θ . Puisque les racines ε_K et ε_L sont fortement orthogonales, pour tout L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ différent de K , il est clair que $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_L) = \varepsilon_L$, pour tout L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ différent de K . Par ailleurs, d'après la relation (11), $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(H_{\varepsilon_K})$ appartient à $i\mathbb{R}(X_{\varepsilon_K} + \theta X_{\varepsilon_K})$, donc $H_{\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_K)} = \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(H_{\varepsilon_K})$ appartient à \mathfrak{k} . Par suite, $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\varepsilon_K)$ est une racine imaginaire de $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Delta)$, d'après le lemme 2.1.1 (iii). Le reste du lemme est alors clair. \square

Proposition 2.3.2. — *On a la relation :*

$$\dim(\widehat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \dim \widehat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k}.$$

Démonstration. — 1^{ère} étape : si \mathfrak{h}_0 est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 stable par θ et maximalement compacte, alors $\dim \mathfrak{t} = \text{rg } \mathfrak{k}$ et on a, $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) = \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k}$. D'après le lemme 2.1.3, l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ est vide et la relation,

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k},$$

est alors satisfaite.

2^{ème} étape : si \mathfrak{h}_0 est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 stable par θ telle que (\mathfrak{h}_0, Π) a la propriété (P_2) et qui n'est pas maximalement compacte, alors

il résulte alors de la proposition 2.2.7 que l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ n'est pas vide. Soit K dans $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$. D'après le lemme 2.3.1, la sous-algèbre $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan stable par θ et on a la relation,

$$\#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi)) = \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) - 1.$$

Par ailleurs, d'après la relation (10), on a :

$$\dim(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - 1.$$

On en déduit l'égalité,

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \dim(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi)).$$

De plus, $(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\mathfrak{h}_0), \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\Pi))$ a encore la propriété (P_2) , d'après le lemme 2.3.1.

Prouvons alors la proposition. Si $\widehat{\mathfrak{h}}_0$ est maximale compacte, la relation de la proposition est satisfaite d'après la première étape. Sinon, d'après la deuxième étape, il suffit de prouver la relation,

$$\dim(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\widehat{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\widehat{\Pi})) = \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k},$$

où K est un élément de $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$ dont l'existence est assurée par la proposition 2.2.7, car $(\widehat{\mathfrak{h}}_0, \widehat{\Pi})$ a la propriété (P_2) , d'après la proposition 2.2.5. Il y a alors deux cas. Ou bien $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\widehat{\mathfrak{h}}_0)$ est maximale compacte et la relation de la proposition résulte de la première étape. Ou bien $\mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\widehat{\mathfrak{h}}_0)$ n'est pas maximale compacte et on applique de nouveau la deuxième étape à $\mathfrak{h}_0 = \mathbf{d}_{\varepsilon_K}(\widehat{\mathfrak{h}}_0)$.

Après un nombre fini de transformations, on obtient une sous-algèbre de Cartan maximale compacte. On applique alors la première étape pour obtenir la relation de la proposition. \square

2.4. Formes linéaires stables et indice de \mathfrak{b}

Si \mathfrak{q} est une algèbre de Lie complexe et si φ est une forme linéaire sur \mathfrak{q} , on désigne par \mathfrak{q}_φ l'ensemble des s de \mathfrak{q} tels que $\varphi([q, s]) = 0$. Autrement dit $\mathfrak{q}_\varphi = \{s \in \mathfrak{q} \mid (\text{ad}^* s) \cdot \varphi = 0\}$, où $\text{ad}^* : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{q}^*)$ est la représentation coadjointe de \mathfrak{q} . On rappelle que l'*indice de \mathfrak{q}* , noté $\text{ind } \mathfrak{q}$, est défini par :

$$\text{ind } \mathfrak{q} = \min_{\varphi \in \mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}_\varphi.$$

On dit que l'élément φ de \mathfrak{q}^* est *régulier* si $\dim \mathfrak{q}_\varphi = \text{ind } \mathfrak{q}$. L'ensemble des éléments réguliers de \mathfrak{q}^* est un ouvert non vide de \mathfrak{q}^* .

La notion de formes linéaires stables est introduite dans [14]. Rappelons qu'un élément φ de \mathfrak{q}^* est dit *stable* s'il existe un voisinage V de φ dans \mathfrak{q}^* tel que, pour tout ψ de V , \mathfrak{q}_φ et \mathfrak{q}_ψ soient conjugués par un élément du groupe adjoint algébrique de \mathfrak{q} . En particulier, si φ est une forme linéaire stable, alors c'est un élément régulier de \mathfrak{q}^* . Lorsque \mathfrak{q} possède une forme linéaire stable,

l'indice de \mathfrak{q} est donné par la dimension du stabilisateur de cette forme. En général, \mathfrak{q} ne possède pas de forme linéaire stable; on trouve des exemples d'algèbres de Lie ne possédant pas de forme linéaire stable dans [14] ou dans [30]. La proposition qui suit est démontrée dans [30], Théorème 1.7.

Proposition 2.4.1. — *Soit \mathfrak{q} une algèbre de Lie, et soit φ un élément de \mathfrak{q}^* . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) : *On a la relation : $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_\varphi] \cap \mathfrak{q}_\varphi = \{0\}$,*
- (ii) : *La forme linéaire φ est stable.*

On reprend les notations des parties précédentes. Rappelons que le couple $(\widehat{\mathfrak{h}}_0, \widehat{\Pi})$ a la propriété (P_2) , d'après la proposition 2.2.5. On va construire une forme linéaire régulière sur \mathfrak{b} . Dans certains cas, on verra que cette forme est stable. Posons

$$\begin{aligned} u &= \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} X_{-\varepsilon_K} = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (X_{-\varepsilon_K} + X_{-\varepsilon_{\theta K}}), \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} X_{-\varepsilon_K} + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} (X_{-\varepsilon_K} + X_{-\varepsilon_{\theta K}}). \end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+''} \mathfrak{g}^{-\alpha}$, l'élément u appartient à \mathfrak{n}_- .

Lemme 2.4.2. — *Soit x un élément de \mathfrak{b} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) : *L'élément x s'écrit sous la forme*

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} a_K (X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}),$$

avec a_K dans \mathbb{C} et h dans $\widehat{\mathfrak{a}}$ tel que $\varepsilon_K(h) = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$.

- (ii) : *Le crochet $[x, u]$ appartient au sous-espace $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$.*

Remarque 2.4.3. — *Notons que si \mathfrak{m} est nul, \mathfrak{b} est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} et ce lemme n'est rien d'autre que le lemme 2.5 de [30]. La démonstration qui suit reprend d'ailleurs pour une large part celle de [30].*

Démonstration. — (i) \Rightarrow (ii). Si (i) est vérifié, x s'écrit $x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} a_K (X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}})$, avec $a_K \in \mathbb{C}$ et h dans $\widehat{\mathfrak{a}}$ tel que $\varepsilon_K(h) = 0$, pour tout $K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, et

on a

$$\begin{aligned}
[x, u] &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (-\varepsilon_K(h)X_{-\varepsilon_K} - \varepsilon_{\theta K}(h)X_{-\varepsilon_{\theta K}} + a_K(H_{\varepsilon_K} - H_{\varepsilon_{\theta K}})), \\
&= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (-\varepsilon_K(h)X_{-\varepsilon_K} + \theta\varepsilon_K(h)X_{-\varepsilon_{\theta K}} + a_K(H_{\varepsilon_K} + \theta H_{\varepsilon_K})), \\
&= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (-\varepsilon_K(h)X_{-\varepsilon_K} - \varepsilon_K(h)X_{-\varepsilon_{\theta K}} + a_K(H_{\varepsilon_K} + \theta H_{\varepsilon_K})), \\
&= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} (\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad + a_K(H_{\varepsilon_K} + \theta H_{\varepsilon_K})).
\end{aligned}$$

On en déduit que $[x, u]$ appartient à $\widehat{\mathfrak{t}}$, d'où (ii), car $\widehat{\mathfrak{t}}$ est contenu dans \mathfrak{m} .

(ii) \Rightarrow (i). L'élément x appartient à \mathfrak{b} . Puisque $\mathfrak{b} = \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \sum_{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+} \mathfrak{g}^\alpha = \widehat{\mathfrak{a}} \oplus (\sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \sum_{\alpha \in \Gamma^K} \mathfrak{g}^\alpha)$, l'élément x s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
x &= h + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K} X_{\varepsilon_K} \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} (a_{\varepsilon_K} X_{\varepsilon_K} + a_{\varepsilon_{\theta K}} X_{\varepsilon_{\theta K}}) + \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \sum_{\alpha \in \Gamma_0^K} a_\alpha X_\alpha,
\end{aligned}$$

avec h dans $\widehat{\mathfrak{a}}$ et a_α dans \mathbb{C} , pour tout α de Δ''_+ . On en déduit que le crochet $[x, u]$ s'écrit sous la forme :

$$[x, u] = \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K} H_{\varepsilon_K} + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} (a_{\varepsilon_K} H_{\varepsilon_K} + a_{\varepsilon_{\theta K}} H_{\varepsilon_{\theta K}}) + Y,$$

où Y est un élément du sous-espace $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}_-$. Pour K dans $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$, la racine ε_K est réelle donc l'élément H_{ε_K} appartient à $\widehat{\mathfrak{a}}$. Pour K dans $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$, la projection de H_{ε_K} sur $\widehat{\mathfrak{a}}$ selon la décomposition $\widehat{\mathfrak{a}} \oplus \widehat{\mathfrak{t}}$ est $\frac{H_{\varepsilon_K} - \theta H_{\varepsilon_K}}{2}$. Par suite, de la relation $[x, u] \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, on tire la relation :

$$\sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K} H_{\varepsilon_K} + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} (a_{\varepsilon_K} \frac{H_{\varepsilon_K} - \theta H_{\varepsilon_K}}{2} + a_{\varepsilon_{\theta K}} \frac{H_{\varepsilon_{\theta K}} - \theta H_{\varepsilon_{\theta K}}}{2}) = 0.$$

Puisque les racines ε_K sont deux à deux fortement orthogonales, on a $\varepsilon_K(H_{\varepsilon_L}) = 0$, pour $L \neq K$ et il vient $a_{\varepsilon_K} = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$. En utilisant de plus les relations $\theta H_{\varepsilon_K} = -H_{\varepsilon_{\theta K}}$ et $\theta H_{\varepsilon_{\theta K}} = -H_{\varepsilon_K}$, on obtient

$a_{\varepsilon_K} + a_{\varepsilon_{\theta K}} = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})$. On en déduit que x s'écrit :

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K} (X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}) + \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \sum_{\alpha \in \Gamma_0^K} a_{\alpha} X_{\alpha}.$$

Soit K un élément de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et soit α dans Γ_0^K . D'après la remarque 2.2.3, l'élément $\beta = \varepsilon_K - \alpha$ est une racine de Γ_0^K ; elle appartient donc à $\widehat{\Delta}_+''$, d'après le lemme 2.2.6. On a

$$\begin{aligned} [x, u] &= \frac{1}{2} (\lambda a_{\alpha} X_{-\beta} + a_{\alpha} \sum_{K' \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi}) \setminus \{K\}} [X_{\alpha}, X_{-\varepsilon_{K'}}]) \\ &+ \sum_{K' \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi}), \gamma \in \Delta_+'' \setminus \{\alpha\}} a_{\gamma} [X_{\gamma}, X_{-\varepsilon_{K'}}] - \sum_{K' \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \varepsilon_{K'}(h) X_{-\varepsilon_{K'}} \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} a_{\varepsilon_K} \left(\frac{H_{\varepsilon_K} + \theta H_{\varepsilon_K}}{2} \right), \end{aligned}$$

où λ est un scalaire non nul.

Supposons par l'absurde $a_{\alpha} \neq 0$. On a $\beta \neq \varepsilon_{K'}$, pour K' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, car $\langle \beta, \varepsilon_{K'}^{\vee} \rangle = 1$ et $\langle \varepsilon_{K'}, \varepsilon_{K'}^{\vee} \rangle \in \{0, 2\}$. Puisque la racine β appartient à $\widehat{\Delta}_+''$, l'élément $\frac{1}{2} \lambda a_{\alpha} X_{-\beta}$ qui intervient dans l'expression précédente de $[x, u]$ est un élément non nul de \mathfrak{n}_- . Comme $[x, u]$ appartient à $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$, il existe nécessairement K' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et γ dans $\Delta_+'' \setminus \{\alpha\}$ tels que $\beta = \varepsilon_{K'} - \gamma$. On a : $K \neq K'$, car $\gamma \neq \alpha$. Soit K'' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ tel que γ appartient à $\Gamma^{K''}$. Or d'après le lemme 2.2.2, (iii) et (iv), la relation $\beta + \gamma = \varepsilon_{K'}$ entraîne que $K = K''$, puis que $K' = K$, d'où la contradiction.

On en déduit que a_{α} est nul, pour tout K dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et tout α dans Γ_0^K . Il en résulte que x s'écrit sous la forme

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} a_K (X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}})$$

et de l'égalité

$$[x, u] = - \sum_{K' \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \varepsilon_{K'}(h) X_{-\varepsilon_{K'}} + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} a_K \left(\frac{H_{\varepsilon_K} + \theta H_{\varepsilon_K}}{2} \right),$$

on tire la relation $\varepsilon_{K'}(h) = 0$, pour tout K' de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, d'où (i). \square

On note κ la forme de Killing de \mathfrak{g} . Pour v un élément de \mathfrak{g} , on note φ_v la forme linéaire sur \mathfrak{g} définie par :

$$\varphi_v(y) = \kappa(v, y),$$

pour y dans \mathfrak{g} . Si \mathfrak{r} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} , \mathfrak{r}_{φ_v} désigne le stabilisateur dans \mathfrak{r} de la restriction de φ_v à \mathfrak{r} . La proposition suivante décrit le stabilisateur dans \mathfrak{b} de la forme linéaire φ_u .

Proposition 2.4.4. — *Le stabilisateur \mathfrak{b}_{φ_u} de la restriction de φ_u à \mathfrak{b} est donné par :*

$$\mathfrak{b}_{\varphi_u} = \left(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} \right) \oplus \left(\sum_{\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} \mathbb{C}(X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}) \right).$$

et on a :

$$\dim \mathfrak{b}_{\varphi_u} = \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k}.$$

Démonstration. — On a

$$\mathfrak{b}_{\varphi_u} = \{x \in \mathfrak{b} \mid \kappa(u, [x, y]) = 0, \forall y \in \mathfrak{b}\} = \{x \in \mathfrak{b} \mid [x, u] \in \mathfrak{b}^\perp\},$$

où \mathfrak{b}^\perp désigne l'orthogonal de \mathfrak{b} dans \mathfrak{g} pour la forme de Killing. La relation $\mathfrak{b}^\perp = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$ et le lemme 2.4.2 entraînent que l'élément x appartient à \mathfrak{b}_{φ_u} si, et seulement si, il s'écrit sous la forme

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} a_K (X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}),$$

avec a_K dans \mathbb{C} et h dans $\widehat{\mathfrak{a}}$ tel que $\varepsilon_K(h) = 0$, pour tout $K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$.

On dispose de l'égalité : $\bigcap_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \ker \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}}$. En effet, pour

K dans $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$, la racine ε_K est imaginaire donc s'annule sur $\widehat{\mathfrak{a}}$. La première assertion de la proposition est alors claire.

Montrons : $\dim \left(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} \right) = \dim \widehat{\mathfrak{a}} - (\#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) + \#\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi}))$. Il

suffit de montrer que la famille $\{\varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} \mid K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) \cup \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})\}$ forme une base du sous-espace de $\widehat{\mathfrak{a}}^*$ engendré par les éléments $\varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}}$, pour K dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$.

Si K appartient à $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$, la racine ε_K est imaginaire donc s'annule sur $\widehat{\mathfrak{a}}$. Si K appartient à $\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})$, alors pour tout H dans $\widehat{\mathfrak{a}}$, on a : $\varepsilon_{\theta K}(H) = -\theta \varepsilon_K(H) = \varepsilon_K(-\theta H) = \varepsilon_K(H)$, d'où $\varepsilon_{\theta K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} = \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}}$. On en déduit que la famille précédente est génératrice. Montrons qu'elle est libre : soit

$$\sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_K \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} a_K \varepsilon_{K|_{\widehat{\mathfrak{a}}}} = 0,$$

une combinaison linéaire nulle dans $\widehat{\mathfrak{a}}^*$. Puisque la famille $\{\varepsilon_K \mid K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})\}$ est un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales, l'évaluation du

membre de gauche dans l'expression précédente en l'élément $\frac{H_{\varepsilon_K} - \theta H_{\varepsilon_K}}{2} = \frac{H_{\varepsilon_K} + H_{\varepsilon_{\theta K}}}{2}$ de $\widehat{\mathfrak{a}}$, donne : $a_K = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$ et tout K de $\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})$. On a obtenu :

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{b}_{\varphi_u} &= (\dim \widehat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) - \#\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})) + \#\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi}) \\ &= \dim \widehat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) \\ &= \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la proposition 2.3.2. La proposition est ainsi démontrée. \square

Remarque 2.4.5. — L'expression de \mathfrak{b}_{φ_u} obtenue dans la proposition précédente permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de φ_u à \mathfrak{b} soit stable. Pour a et b dans \mathbb{C} et K dans $\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})$, on a :

$$(12) \quad [H, aX_{\varepsilon_K} + bX_{\varepsilon_{\theta K}}] = \varepsilon_K(H)(aX_{\varepsilon_K} + bX_{\varepsilon_{\theta K}}),$$

pour tout H dans $\widehat{\mathfrak{a}}$. En particulier, les éléments $X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}$, pour K dans $\mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})$, appartiennent à l'intersection $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\varphi_u}] \cap \mathfrak{b}_{\varphi_u}$. De l'expression de \mathfrak{b}_{φ_u} obtenue dans la proposition 2.4.4 et de la relation $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$, on tire alors l'égalité :

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\varphi_u}] \cap \mathfrak{b}_{\varphi_u} = \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{comp}}^+(\widehat{\Pi})} \mathbb{C}(X_{\varepsilon_K} - X_{\varepsilon_{\theta K}}).$$

Il résulte de la proposition 2.4.1 que la restriction de φ_u à \mathfrak{b} est stable si, et seulement si, l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide.

Posons

$$\mathfrak{r} = \sum_{\alpha \in \widehat{\Delta}'_+} \mathfrak{g}^{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathfrak{r}_- = \sum_{\alpha \in \widehat{\Delta}'_+} \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Ainsi on a : $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}_- \oplus \widehat{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{r}$. Posons aussi :

$$\widetilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b} \oplus \widehat{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{r},$$

de sorte que $\widetilde{\mathfrak{b}}$ est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} . Posons enfin

$$\widetilde{u} = u + \sum_{K \in \mathcal{K}'(\widehat{\Pi})} X_{-\varepsilon_K}.$$

D'après la partie 2 de [30] ou d'après la remarque 2.4.5 appliquée au cas $\mathfrak{m} = 0$ (remarque 2.4.3), la restriction de la forme $\varphi_{\widetilde{u}}$ à $\widetilde{\mathfrak{b}}$ est stable pour $\widetilde{\mathfrak{b}}$. Notons que φ_u n'est rien d'autre que la restriction à \mathfrak{b} de la forme linéaire $\varphi_{\widetilde{u}}$. On est désormais en mesure de démontrer les relations (1) et (2) annoncées

en introduction :

Théorème 2.4.6. — *On a les égalités :*

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} \mathfrak{b} &= \operatorname{rg} \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{k}, \\ \text{et } \operatorname{ind} \mathfrak{g}_0 &= \operatorname{ind} \mathfrak{k}_0 + \operatorname{ind} \mathfrak{b}_0. \end{aligned}$$

Démonstration. — La deuxième relation est une conséquence immédiate de la première. On s'intéresse désormais à celle-ci.

Soit \tilde{B} le groupe adjoint algébrique de $\tilde{\mathfrak{b}}$. Puisque \mathfrak{n} est un idéal de $\tilde{\mathfrak{b}}$ contenu dans le radical nilpotent $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{r}$ de $\tilde{\mathfrak{b}}$, il résulte de la proposition 40.6.3 de [29] que l'orbite de la forme linéaire $\varphi_{\tilde{u}|_{\mathfrak{n}}} = \varphi_{u|_{\mathfrak{n}}}$ de \mathfrak{n}^* sous l'action de \tilde{B} est ouverte dans \mathfrak{n}^* . Le dual de \mathfrak{n} s'identifie via la forme de Killing de \mathfrak{g} au sous-espace \mathfrak{n}_- . On en déduit que l'ensemble

$$\tilde{V} = \{v \in \hat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_- \mid (\varphi_{\operatorname{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v)})|_{\mathfrak{n}} \in \tilde{B} \cdot \varphi_{u|_{\mathfrak{n}}}\}$$

est un ouvert non vide de $\hat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$, où $\operatorname{pr}_{\mathfrak{n}_-}$ est la projection de $\hat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$ sur \mathfrak{n}_- parallèlement à $\hat{\mathfrak{a}}$. Par ailleurs, le dual de \mathfrak{b} s'identifie à $\hat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$ via la forme de Killing de \mathfrak{g} . On en déduit que l'ensemble

$$V = \{v \in \hat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_- \mid \varphi_v|_{\mathfrak{b}} \text{ est } \mathfrak{b}\text{-régulière}\}$$

est un ouvert non vide de $\hat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$. L'intersection $\tilde{V} \cap V$ est alors non vide. Soit v dans cette intersection. Puisque v appartient à \tilde{V} , il existe un élément ρ dans \tilde{B} tel que,

$$(\varphi_{\operatorname{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v)})|_{\mathfrak{n}} = \rho(\varphi_{u|_{\mathfrak{n}}}).$$

En particulier, pour tout x dans \mathfrak{n} , on a :

$$\langle \operatorname{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), \rho(x) \rangle = \langle u, x \rangle.$$

Comme v appartient à V , on dispose par ailleurs des relations suivantes,

$$\dim \mathfrak{b}_{\varphi_v} = \operatorname{ind} \mathfrak{b} \leq \dim \mathfrak{b}_{\varphi_u} = \operatorname{rg} \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{k}.$$

Il reste donc à prouver la relation, $\dim \mathfrak{b}_{\varphi_u} \leq \dim \mathfrak{b}_{\varphi_v}$. La sous-algèbre \mathfrak{b} est un idéal de $\tilde{\mathfrak{b}}$. Par suite, la sous-algèbre $\rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u})$ est contenue dans \mathfrak{b} . Prouvons alors l'inclusion,

$$\rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u}) \subset \mathfrak{b}_{\varphi_v}.$$

On en déduira le résultat, car $\dim \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u}) = \dim \mathfrak{b}_{\varphi_u}$. Cela revient à prouver la relation :

$$\langle [v, \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u})], \mathfrak{b} \rangle = \{0\}.$$

Puisque $[\hat{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}^\perp$, cela revient à prouver la relation :

$$\langle [\operatorname{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u})], \mathfrak{b} \rangle = \{0\}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\langle [\text{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u})], \mathfrak{b} \rangle &= \langle \text{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), [\rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u}), \mathfrak{b}] \rangle \\
&= \langle \text{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v), \rho([\mathfrak{b}_{\varphi_u}, \mathfrak{b}]) \rangle \\
&= \langle u, [\mathfrak{b}_{\varphi_u}, \mathfrak{b}] \rangle, \text{ car } [\mathfrak{b}_{\varphi_u}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{n} \\
&= \{0\}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration, d'après ce qui précède. \square

La proposition suivante précise la remarque 2.4.5 :

Proposition 2.4.7. — *La sous-algèbre \mathfrak{b} de \mathfrak{g} possède une forme linéaire stable si, et seulement si, l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide.*

Démonstration. — Si l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide, on a déjà noté (remarque 2.4.5) que la restriction de φ_u à \mathfrak{b} est stable. Réciproquement, supposons que \mathfrak{b} possède une forme linéaire stable et montrons que l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide. On reprend les notations de la démonstration du théorème 2.4.6 et on pose :

$$V' = \{v \in \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_- \mid \varphi_{v|_{\mathfrak{b}}} \text{ est } \mathfrak{b}\text{-stable}\}.$$

D'après l'hypothèse, l'ensemble V' est un ouvert non vide de $\widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}_-$ et l'intersection $V' \cap \widetilde{V}$ est alors non vide. Soit v dans cette intersection. Alors il existe un élément ρ dans \widetilde{B} tel que,

$$(\varphi_{\text{pr}_{\mathfrak{n}_-}(v)})|_{\mathfrak{n}} = \rho(\varphi_{u|_{\mathfrak{n}}}),$$

et il résulte de la démonstration du théorème 2.4.6 la relation,

$$\mathfrak{b}_{\varphi_v} = \rho(\mathfrak{b}_{\varphi_u}).$$

Par suite, $\varphi_{v|_{\mathfrak{b}}}$ est \mathfrak{b} -stable si, et seulement si, $\varphi_{u|_{\mathfrak{b}}}$ l'est, d'après la proposition 2.4.1. On déduit alors de la remarque 2.4.5, que l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est nécessairement vide. \square

2.5. Calculs explicites dans les algèbres de Lie simples réelles

On a obtenu à la fin de la partie précédente une caractérisation des algèbres de Lie semi-simples réelles \mathfrak{g}_0 pour lesquelles \mathfrak{b} possède une forme linéaire stable. Notons que jusqu'ici, on n'a encore donné aucun exemple d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 possédant cette propriété. Pour en donner, il faut être capable de savoir quand l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide; c'est ce qu'exprime la proposition 2.4.7. On suppose désormais que \mathfrak{g}_0 est une algèbre de Lie simple réelle. Le lemme 2.5.1 donne le cardinal de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ en fonction de quantités intrinsèques à \mathfrak{g}_0 . On détermine ensuite les algèbres de Lie simples réelles \mathfrak{g}_0 pour lesquelles

\mathfrak{b} possède une forme linéaire stable.

Lemme 2.5.1. — *Le cardinal de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est donné par :*

$$\#\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = k_{\mathfrak{g}} - k_{\mathfrak{m}} + \text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k} - \dim \widehat{\mathfrak{a}}.$$

Démonstration. — On a la relation :

$$\mathcal{K}(\widehat{\Pi}) = \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) \cup \mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) \cup \mathcal{K}'(\widehat{\Pi}),$$

d'où :

$$\#\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = k_{\mathfrak{g}} - \#\mathcal{K}'(\widehat{\Pi}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}).$$

D'après la proposition 2.3.2, on dispose de la relation

$$\#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \dim \widehat{\mathfrak{a}} - \text{rg } \mathfrak{g} + \text{rg } \mathfrak{k}.$$

Il suffit donc de prouver la relation : $\#\mathcal{K}'(\widehat{\Pi}) = k_{\mathfrak{m}}$. L'ensemble $\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}'$ forme une base du sous-système de racines $\widehat{\Delta}'$ de $\widehat{\Delta}$. Or $\widehat{\Delta}'_{\mathfrak{t}}$ est le système de racines associé à la sous-algèbre \mathfrak{m} , d'après le lemme 2.1.4. Puisque $\widehat{\Delta}'_{\mathfrak{t}}$ et $\widehat{\Delta}'$ ont clairement le même type, on a : $\#\mathcal{K}(\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}') = k_{\mathfrak{m}}$. Il reste à prouver la relation : $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi}) = \mathcal{K}(\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}')$. Soit S une composante connexe de $\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}'$ et soit ϖ la plus grande racine de $\widehat{\Delta}'_+$. Il existe alors K dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$ tel que ϖ appartienne à Γ^K et il résulte du lemme 2.2.6 que K appartient à $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$, car ϖ est une racine imaginaire. Par suite, $\varpi = \varepsilon_K$, car ϖ est la plus grande racine de $\widehat{\Delta}'_+$ or S est une composante connexe de la base $\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}'$ de $\widehat{\Delta}'_+$. On en déduit que S est un élément de $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$, d'où la relation $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi}) = \mathcal{K}(\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}')$. \square

D'après la classification des algèbres de Lie réelles simples obtenue par exemple dans [13], Théorème 6.105, l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 est isomorphe à l'une des algèbres de Lie simples réelles de la liste suivante :

- (a) : L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$, où \mathfrak{s} est simple complexe de type A_n , pour $n \geq 1$, B_n , pour $n \geq 2$, C_n , pour $n \geq 3$, D_n , pour $n \geq 4$, E_6 , E_7 , E_8 , F_4 ou G_2 ,
- (b) : La forme réelle compacte d'une algèbre de Lie \mathfrak{s} comme en (a),
- (c) : Les algèbres de matrices classiques :
 - $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, avec $n \geq 2$,
 - $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$, avec $n \geq 2$,
 - $\mathfrak{su}(p, q)$, avec $p \geq q > 0$, $p + q \geq 2$,
 - $\mathfrak{so}(p, q)$, avec $p > q > 0$, $p + q$ impair, $p + q \geq 5$, ou $p > q > 0$, $p + q$ pair, $p + q \geq 8$,
 - $\mathfrak{sp}(p, q)$, avec $p \geq q > 0$, $p + q \geq 3$,
 - $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, avec $n \geq 3$,
 - $\mathfrak{so}^*(2n)$, avec $n \geq 4$,

(d) : Les 12 algèbres de Lie simples exceptionnelles non complexes, non compactes $EI, EII, EIII, EIV, EV, EVI, EVII, EVIII, EIX, FI, FII$ et G .

On calcule pour chaque type d'algèbres de Lie simples réelles de la liste précédente, le cardinal de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ afin de décider si \mathfrak{b} possède ou non une forme linéaire stable. On calcule ce cardinal selon la formule du lemme 2.5.1.

2.5.1. Cas des formes réelles compactes d'algèbres de Lie simples complexes. — Si \mathfrak{g}_0 est la forme réelle compacte d'une algèbre de Lie simple complexe, alors $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0$ et la sous-algèbre \mathfrak{b} est nulle.

2.5.2. Cas des algèbres de Lie réelles sous-jacentes à une algèbre de Lie simple complexe. — Si \mathfrak{g}_0 est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie simple complexe, \mathfrak{g}_0 est de la forme $\mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$ avec \mathfrak{s} simple complexe. Soit \mathfrak{u}_0 une forme réelle compacte de \mathfrak{s} . La décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 s'écrit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0 \oplus i\mathfrak{u}_0$ et θ est la conjugaison complexe relative à \mathfrak{u}_0 . Ici, l'algèbre \mathfrak{k}_0 est la forme réelle compacte \mathfrak{u}_0 , d'où $\text{rg } \mathfrak{k}_0 = \text{rg } \mathfrak{u}_0 = \text{rg } \mathfrak{s}$. On a de plus, $\text{rg } \mathfrak{g}_0 = \text{rg } \mathfrak{g} = 2 \text{rg } \mathfrak{s}$. Soit \mathfrak{c}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{u}_0 . Alors on a : $\widehat{\mathfrak{a}}_0 = i\mathfrak{c}_0$ et $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{c}_0$. En particulier, \mathfrak{m}_0 est une sous-algèbre abélienne. Notons que la sous-algèbre de Cartan $\widehat{\mathfrak{h}}_0 = \widehat{\mathfrak{a}}_0 \oplus i\widehat{\mathfrak{a}}_0$ est à la fois maximalement compact et maximalement non-compact. Le lemme 2.5.1 donne : $\#\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = 2k_{\mathfrak{s}} - 0 + 2\text{rg } \mathfrak{s} - \text{rg } \mathfrak{s} - \text{rg } \mathfrak{s} = 2k_{\mathfrak{s}} \neq 0$. D'après la proposition 2.4.7 et le théorème 2.4.6, la sous-algèbre \mathfrak{b} ne possède pas de forme stable et son indice est égal à $\text{rg } \mathfrak{s}$.

2.5.3. Cas des algèbres de Lie simples réelles, non complexes, non compactes. — On suppose que l'algèbre de Lie réelle \mathfrak{g}_0 est l'une des algèbres de la liste (c) ou (d). On regroupe dans la table 2 les données nécessaires concernant \mathfrak{g}_0 qui permettent de calculer le cardinal de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ selon la formule du lemme 2.5.1. On trouve ces données dans [13], Appendice C. Pour chaque algèbre des listes (c) et (d), on donne le type du complexifié \mathfrak{g} et son rang, la sous-algèbre \mathfrak{k}_0 et son rang, la dimension de $\widehat{\mathfrak{a}}$, $k_{\mathfrak{g}}$, la sous-algèbre \mathfrak{m}_0 et $k_{\mathfrak{m}}$. Ce travail permet de distinguer deux cas :

- 1) Si $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{so}(2p+1, 2q+1)$, avec $1 \leq p \leq q$ et p et q de parité différente, alors la relation,

$$k_{\mathfrak{g}} - k_{\mathfrak{m}} = \dim \widehat{\mathfrak{a}} - (\text{rg } \mathfrak{g} - \text{rg } \mathfrak{k}),$$

est satisfaite. D'après le lemme 2.5.1, l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide et la proposition 2.4.7 assure que la sous-algèbre \mathfrak{b} possède une forme linéaire stable. L'indice de \mathfrak{b} est donné par la relation (1).

- 2) Si $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(2p+1, 2q+1)$, avec $1 \leq p \leq q$ et p et q de parité différente, alors l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ n'est pas vide. Précisément, la formule du lemme 2.5.1 donne : si p est impair et q pair, alors $\#\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = 4$ et, si p est pair et q impair, alors $\#\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = 2$. D'après la proposition 2.4.7, la sous-algèbre \mathfrak{b} ne possède pas de forme linéaire stable. L'indice de \mathfrak{b} est donné par la relation (1).

Ce dernier cas et le cas des algèbres de Lie réelles sous-jacentes à une algèbre de Lie simple complexe fournissent des exemples d'algèbres de Lie qui ne possèdent pas de formes linéaires stables.

2.6. Formes linéaires réductives et algèbres quasi-réductives

2.6.1. Soit \mathfrak{q} une algèbre de Lie algébrique de centre \mathfrak{z} . La notion d'algèbre de Lie quasi-réductive est introduite par M. Duflo pour son importance dans l'analyse sur les groupes de Lie. On en rappelle ici la définition.

Définition 2.6.1. — On dit qu'une forme linéaire f de \mathfrak{q}^* est réductive si l'image de la sous-algèbre $\mathfrak{q}_f/\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{q})$ par la représentation adjointe de \mathfrak{q} est une sous-algèbre de Lie réductive.

On dit que l'algèbre de Lie \mathfrak{q} est quasi-réductive si elle possède une forme linéaire réductive.

Il est clair que si \mathfrak{q} est réductive, alors \mathfrak{q} est quasi-réductive ; en effet la forme linéaire nulle est réductive pour \mathfrak{q} .

Lemme 2.6.2. — Une forme linéaire est régulière et réductive pour \mathfrak{q} si, et seulement si, la sous-algèbre $\mathfrak{q}_f/\mathfrak{z}$ est un tore de \mathfrak{q} .

Démonstration. — Si $\mathfrak{q}_f/\mathfrak{z}$ est un tore de \mathfrak{q} , alors f est \mathfrak{q} -stable donc f est \mathfrak{q} -régulière. De plus il est clair que f est réductive pour \mathfrak{q} .

Réciproquement, si f est \mathfrak{q} -régulière et \mathfrak{q} -réductive, alors \mathfrak{q}_f est une sous-algèbre de Lie commutative, d'après [28]. Il est alors bien connu (voir par exemple [29], Théorème 20.5.10) que l'image de $\mathfrak{q}_f/\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{q})$ par la représentation adjointe de \mathfrak{q} est une sous-algèbre de Lie réductive si, et seulement si, elle est formée d'éléments semi-simples. \square

On énonce sans démonstration le théorème suivant :

Théorème 2.6.3. — *On suppose que \mathfrak{q} est quasi-réductive. Alors l'ensemble des formes linéaires régulières et réductives pour \mathfrak{q} est un ouvert dense de \mathfrak{q}^* formé de formes linéaires \mathfrak{q} -stables.*

En particulier, une algèbre de Lie quasi-réductive possède une forme linéaire stable.

2.6.2. On reprend les notations des parties précédentes. La proposition suivante précise la proposition 2.4.7.

Proposition 2.6.4. — *La sous-algèbre \mathfrak{b} de \mathfrak{g} est quasi-réductive si, et seulement si, l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide.*

Démonstration. — Si $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ n'est pas vide, \mathfrak{b} ne possède pas de forme stable d'après la proposition 2.4.7. Il résulte donc du théorème 2.6.3 que \mathfrak{b} n'est pas quasi-réductive. Réciproquement, si $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide, la restriction à \mathfrak{b} de la forme φ_u est \mathfrak{b} -stable et son stabilisateur est une sous-algèbre commutative formée d'éléments semi-simples, d'après la proposition 2.4.4. La forme linéaire φ_u est donc réductive pour \mathfrak{b} d'après le lemme 2.6.2, d'où la proposition. \square

2.6.3. On fixe dans ce paragraphe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} et une base Π du système de racine Δ associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. La définition suivante est due à D. Panyushev :

Définition 2.6.5. — (i) *On dit que deux sous-algèbres paraboliques \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont faiblement opposées si $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{g}$.*
(ii) *On appelle sous-algèbre seaweed de \mathfrak{g} toute sous-algèbre de Lie \mathfrak{q} de \mathfrak{g} de la forme $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$, où \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont des sous-algèbres paraboliques faiblement opposées de \mathfrak{g} .*

Soit S et T deux parties de Π . On vérifie sans difficulté que la sous-algèbre,

$$\mathfrak{g}_{S,T} = \mathfrak{g}^{\Delta^S_+} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\Delta^T_-}$$

est une sous-algèbre seaweed de \mathfrak{g} et on dira que c'est une sous-algèbre *seaweed standard* (relativement à \mathfrak{h} et Π). Il est noté dans [21] et démontré dans [31] que toute sous-algèbre seaweed de \mathfrak{g} est conjuguée par un élément de G à une sous-algèbre seaweed standard de \mathfrak{g} .

L'indice des sous-algèbres seaweed est étudié dans certains cas particuliers dans [6], [21] et [31]. Dans [31], P. Tauvel et R. W. Yu formulent une conjecture pour l'indice des sous-algèbres seaweed dans le cas général. Cette conjecture est démontrée dans [11]. Dans [31], il est donné des exemples d'algèbres seaweed qui possèdent une forme stable. Dans tous ces exemples,

les algèbres seaweed sont en fait quasi-réductives. On cherche ici une caractérisation des sous-algèbres seaweed de \mathfrak{g} quasi-réductives. Le théorème 2.6.8 fournit une réponse partielle à ce problème. Ce théorème fournit en outre des exemples d'algèbres seaweed quasi-réductives qui ne sont pas étudiées dans [31].

Soit S est une partie de Π . Si α est un élément de Γ_0^K , pour K dans $\mathcal{K}(S)$, on note $\mathcal{L}(\alpha)$ l'ensemble des éléments L dans $\mathcal{K}(S)$ tels que $\varepsilon_L + \alpha$ soit une racine.

Lemme 2.6.6. — *Soit S une partie de Π et α dans Π . On suppose qu'il existe K dans $\mathcal{K}(S)$ tel que α appartienne à Γ_0^K .*

- (i) *Si L appartient à $\mathcal{L}(\alpha)$, alors L est strictement contenu dans K ,*
- (ii) *$\varepsilon_L - \alpha$ est une racine si, et seulement si, $L = K$.*

Démonstration. — (i) : L'assertion est claire, d'après les résultats rappelés au début de la partie 2.2.

(ii) : Si $\varepsilon_L - \alpha$ est une racine, pour L dans $\mathcal{K}(S)$, alors $\varepsilon_L - \alpha$ est une racine positive, car α appartient à la base Π , d'après l'hypothèse. Il résulte alors du lemme 2.2.2 que $L = K$. La réciproque est claire. \square

Si S est une partie de Π , on note E_S le sous-espace de \mathfrak{g}^* engendré par les éléments ε_K , pour K dans $\mathcal{K}(S)$, et on désigne par S' le sous-ensemble de S formé des racines α de la forme, $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_K - \frac{1}{2}\varepsilon_L$, avec K et L dans $\mathcal{K}(S)$, et telles que $\mathcal{L}(\alpha) = \{L\}$. Il est clair que si α est de la forme, $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_K - \frac{1}{2}\varepsilon_L$, alors L appartient à $\mathcal{L}(\alpha)$; précisément, $\varepsilon_L + \alpha = \varepsilon_K - \alpha$.

Le lemme suivant, présenté dans [31] (Lemme 4.5) et démontré dans [7] (Lemme 1.12.2), va intervenir dans la démonstration du théorème 2.6.8.

Lemme 2.6.7. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, V' un hyperplan de V , Φ une forme bilinéaire sur V , et Φ' sa restriction à V' . On note N et N' les noyaux de Φ et Φ' .*

- (i) *Si $N \subset N'$, alors N est un hyperplan de N' ,*
- (ii) *Si $N \not\subset N'$, on a $N' = N \cap V'$, et N' est un hyperplan de N .*

Théorème 2.6.8. — *Soit S et T deux parties de Π .*

- (i) *Si l'ensemble $\{\varepsilon_K \mid K \in \mathcal{K}(S) \cup \mathcal{K}(T)\}$ est formé d'éléments linéairement indépendants, alors la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{S,T}$ est quasi-réductive.*

(ii) On suppose $T = \{\alpha\}$, pour α dans Π . Alors, la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{S,T}$ est quasi-réductive si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- 1) : l'ensemble $\{\varepsilon_K \mid K \in \mathcal{K}(S)\} \cup \{\alpha\}$ est formé d'éléments linéairement indépendants,
- 2) : α appartient à S' .

Ce théorème fournit en particulier une caractérisation des sous-algèbres paraboliques minimales quasi-réductives de \mathfrak{g} .

Démonstration. — Il est démontré dans [31] que dans les conditions de (i), la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{S,T}$ possède une forme linéaire dont le stabilisateur est contenue dans la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} . L'assertion (i) est alors claire, d'après le lemme 2.6.2.

Sous les hypothèses de (ii), si S et T satisfont aux conditions (1), alors $\mathfrak{g}_{S,T}$ est quasi-réductive, d'après (i), car $\mathcal{K}(T) = \{\alpha\}$. On suppose que S et T satisfont à la condition (2). On peut supposer que α appartient à E_S , sinon la condition (1) est remplie. Puisque α appartient à E_S , la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{S,T}$ est une sous-algèbre parabolique de la sous-algèbre réductive,

$$\mathfrak{g}^{\Delta_S^-} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\Delta_S^+}.$$

On peut donc supposer, sans perte de généralité, $S = \Pi$. On note alors \mathfrak{q} la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{\Pi, \{\alpha\}}$ et $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^\perp$ son radical nilpotent. La sous-algèbre de Borel $\tilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\beta \in \Delta_+} \mathfrak{g}^\beta$ est un hyperplan de \mathfrak{q} . Soit $\tilde{u} = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} X_{-\varepsilon_K}$. Le stabilisateur de $\varphi_{\tilde{u}}$ dans $\tilde{\mathfrak{b}}$ est donné par la relation suivante :

$$\tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \varepsilon_K,$$

d'après le lemme 2.4.4. On en déduit que $\tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}}$ est contenu dans le stabilisateur $\mathfrak{q}_{\varphi_{\tilde{u}}}$ de $\varphi_{\tilde{u}}$, car $[\tilde{u}, \tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}}] = \{0\}$. Il résulte alors du lemme 2.6.7 que $\tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}}$ est un hyperplan de $\mathfrak{q}_{\varphi_{\tilde{u}}}$. Montrons que l'élément $X_{-\alpha} + bX_\alpha$ appartient à $\mathfrak{q}_{\varphi_{\tilde{u}}}$, pour b non nul à définir. Puisque la condition (2) est satisfaite, α appartient à S' donc il existe K et L dans $\mathcal{K}(\Pi)$ tels que $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_K - \frac{1}{2}\varepsilon_L$, avec $\mathcal{L}(\alpha) = \{L\}$. De plus, d'après le lemme 2.6.6, $\varepsilon_M - \alpha$ est une racine si, et seulement si, $M = K$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned} [\tilde{u}, X_{-\alpha} + bX_\alpha] &= \sum_{M \in \mathcal{K}(\Pi)} [X_{-\varepsilon_M}, X_{-\alpha}] + b \sum_{M \in \mathcal{K}(\Pi)} [X_{-\varepsilon_M}, X_\alpha] \\ &= \lambda X_{-(\varepsilon_L + \alpha)} + b\mu X_{-(\varepsilon_K - \alpha)}, \end{aligned}$$

où λ et μ sont des complexes non nuls. Puisque $\varepsilon_L + \alpha = \varepsilon_K - \alpha$, il est possible de choisir b non nul de sorte que $[\tilde{u}, X_{-\alpha} + bX_\alpha] = 0$. On en déduit la relation

$$\mathfrak{q}_{\varphi_{\tilde{u}}} = \mathbb{C}(X_{-\alpha} + bX_\alpha) \oplus \tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}},$$

car $\tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}}$ est un hyperplan de $\mathfrak{q}_{\varphi_{\tilde{u}}}$. Par suite, $\mathfrak{q}_{\varphi_{\tilde{u}}}$ est une sous-algèbre commutative — car α appartient à E_S — et formée d'éléments semi-simples. On en déduit que $\varphi_{\tilde{u}}$ est \mathfrak{q} -réductive d'après le lemme 2.6.2 puis que \mathfrak{q} est quasi-réductive.

Réciproquement, on suppose que S et T ne satisfont à aucune des conditions (1) ou (2). En particulier, α appartient à E_S et on peut supposer, comme précédemment, $S = \Pi$. On note alors comme précédemment \mathfrak{q} la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{\Pi, \{\alpha\}}$ et $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}$ son radical nilpotent.

On suppose par l'absurde que \mathfrak{q} est quasi-réductive. Le radical nilpotent $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}$ de \mathfrak{q} est un idéal de $\tilde{\mathfrak{b}}$ contenu dans le radical nilpotent $\tilde{\mathfrak{u}}$ de $\tilde{\mathfrak{b}}$. Soit \tilde{B} le groupe adjoint algébrique de $\tilde{\mathfrak{b}}$. Il résulte de la proposition 40.6.3 de [29] que l'orbite de la forme linéaire $\varphi_{\tilde{u}|_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}}}$ de $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}^*$ sous l'action de \tilde{B} est ouverte dans $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}^*$. Le dual de $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}$ s'identifie via la forme de Killing de \mathfrak{g} au sous-espace $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}-} = \sum_{\beta \in \Delta_+ \setminus \{\alpha\}} \mathfrak{g}^{-\beta}$.

On en déduit que l'ensemble

$$\tilde{W} = \{w \in \tilde{\mathfrak{b}}_- \oplus \mathfrak{g}^\alpha \mid (\varphi_{\text{pr}_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}-}}(w)})|_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}} \in \tilde{B} \cdot \varphi_{\tilde{u}|_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}}}\}$$

est un ouvert non vide de $\tilde{\mathfrak{b}}_- \oplus \mathfrak{g}^\alpha$, où $\text{pr}_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}-}}$ est la projection de $\tilde{\mathfrak{b}}_- \oplus \mathfrak{g}^\alpha$ sur $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}-}$ parallèlement à $\mathfrak{g}^{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^\alpha$, avec $\tilde{\mathfrak{b}}_- = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\beta \in \Delta_+} \mathfrak{g}^{-\beta}$.

Par ailleurs, le dual de \mathfrak{q} s'identifie, via la forme de Killing de \mathfrak{g} , au sous-espace $\tilde{\mathfrak{b}}_- \oplus \mathfrak{g}^\alpha$. Il en résulte que l'ensemble

$$W = \{w \in \tilde{\mathfrak{b}}_- \oplus \mathfrak{g}^\alpha \mid \varphi_w \text{ est } \mathfrak{q}\text{-régulière et } \mathfrak{q}\text{-réductive}\}$$

est un ouvert non vide de $\tilde{\mathfrak{b}}_- \oplus \mathfrak{g}^\alpha$, d'après l'hypothèse. L'intersection $W \cap \tilde{W}$ est alors non vide. Soit w dans cette intersection. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 2.4.6, on peut supposer que w s'écrit sous la forme :

$$w = \tilde{u} + aX_{-\alpha} + h + bX_{-\alpha},$$

avec a, b dans \mathbb{C} et h dans \mathfrak{h} . Comme α appartient à E_S , on a la relation, $[\tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}}, w] = \{0\}$, d'où l'inclusion, $\tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}} \subset \mathfrak{q}_{\varphi_w}$. On déduit alors du lemme 2.6.7 que $\tilde{\mathfrak{b}}_{\varphi_{\tilde{u}}}$ est un hyperplan de \mathfrak{q}_{φ_w} . Soit alors x dans \mathfrak{q} tel que l'on ait la décomposition :

$$\mathfrak{q}_{\varphi_w} = \mathbb{C}x \oplus \left(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \varepsilon_K \right).$$

Puisque w appartient à W , la sous-algèbre \mathfrak{q}_{φ_w} est commutative et formée d'éléments semi-simples. En particulier, pour tout y dans \mathfrak{q}_{φ_w} , la composante de y selon $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}$ dans la décomposition $\mathfrak{q} = (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha}) \oplus \mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}$ est nulle, et sa composante selon $\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha}$ est semi-simple. Par suite, x s'écrit sous la forme,

$$x = \lambda X_{-\alpha} + H + \mu X_{\alpha},$$

avec λ, μ dans \mathbb{C} et H dans \mathfrak{h} . Si λ est nul, alors μ est nul, car x est semi-simple, donc x appartient à \mathfrak{h} . La relation $[x, w] \in \mathfrak{q}^{\perp}$ entraîne alors que x appartient à $\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \varepsilon_K$, ce qui est impossible car $\mathbb{C}x$ et $\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \varepsilon_K$ sont en somme directe. De même, on obtient que μ n'est pas nul. On a :

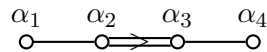
$$\begin{aligned} [x, w] &= -\lambda \sum_{L \in \mathcal{L}(\alpha)} [X_{-\varepsilon_L}, X_{-\alpha}] + \sum_{L \in \mathcal{K}(\Pi)} \varepsilon_L(H) X_{-\varepsilon_L} - \mu \sum_{L \in \mathcal{K}(\Pi)} [X_{-\varepsilon_L}, X_{\alpha}] \\ &\quad + (a\alpha(H) + \lambda\alpha(h))X_{-\alpha} + (a\mu - b\lambda)H_{\alpha} + (-b\alpha(H) - \mu\alpha(h))X_{\alpha}. \end{aligned}$$

La relation, $[x, w] \in \mathfrak{q}^{\perp}$, implique qu'il existe un élément L dans $\mathcal{L}(\alpha)$ tel que $\varepsilon_K - \alpha = \varepsilon_L + \alpha$, car K est l'unique élément de $\mathcal{K}(\Pi)$ tel que $\varepsilon_K - \alpha$ est une racine, d'après le lemme 2.6.6. Par suite, $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_K - \frac{1}{2}\varepsilon_L$. Puisque α n'appartient pas à S' , on en déduit qu'il existe un élément M dans $\mathcal{K}(\Pi)$, avec $M \neq L$, tel que $\varepsilon_M + \alpha$ est une racine. Ceci contredit la relation $[x, w] \in \mathfrak{q}^{\perp}$, car $\varepsilon_M + \alpha \neq \varepsilon_K - \alpha$, puisque $M \neq L$. On a ainsi obtenu la contradiction. \square

2.6.4. On termine cette partie par quelques exemples.

1) : Avec les notations des parties précédentes, la sous-algèbre $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \oplus \widehat{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ est une sous-algèbre parabolique standard relativement au couple $(\widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\Pi})$. Le sous-système de racines simples associé à cette sous-algèbre parabolique est $\widehat{\Pi}' = \{\alpha \in \widehat{\Pi} \mid \theta\alpha = \alpha\}$. Il est démontré au cours de la démonstration de la proposition 2.5.1 que l'on a l'inclusion $\mathcal{K}(\widehat{\Pi}') \subset \mathcal{K}(\widehat{\Pi})$. Il résulte alors du théorème 2.6.8, (i) que \mathfrak{q} est quasi-réductive.

2) : On étudie les sous-algèbres paraboliques standards minimales de F_4 relativement à la base $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, où l'on a adopté les conventions suivantes :



Un bref calcul donne :

$$\mathcal{K}(\Pi) = \{K_1\} \cup \{K_2\} \cup \{K_3\} \cup \{K_4\},$$

avec $K_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $K_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $K_3 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ et $K_4 = \{\alpha_2\}$ et on a :

$$\varepsilon_{K_1} = (2342), \quad \varepsilon_{K_2} = (0122), \quad \varepsilon_{K_3} = (0120) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{K_4} = (0100),$$

d'où il vient :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{K_1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{K_2} - \frac{1}{2}\varepsilon_{K_3} - \frac{1}{2}\varepsilon_{K_4}, \\ \alpha_2 &= \varepsilon_{K_4}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{K_3} - \frac{1}{2}\varepsilon_{K_4} \quad \text{et}, \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{K_2} - \frac{1}{2}\varepsilon_{K_3}. \end{aligned}$$

On vérifie que les racines α_3 et α_4 appartiennent à Π' en utilisant le lemme 2.6.6 : α_3 appartient à Π' , car K_4 est minimal pour l'inclusion et, α_4 appartient à Π' car $\alpha_4 + \varepsilon_{K_4}$ n'est pas une racine. Il résulte alors du théorème 2.6.8, (ii) que les sous-algèbres paraboliques minimales quasi-réductives standards de F_4 sont celles définies par α_2 , α_3 et α_4 .

$\mathfrak{g}_0 :$	$\text{rg } \mathfrak{g} :$	$\mathfrak{k}_0 :$	$\text{rg } \mathfrak{k} :$	$\dim \widehat{\mathfrak{a}} :$	$k_{\mathfrak{g}} :$	$\mathfrak{m}_0 :$	$k_{\mathfrak{m}} :$	$\text{ind } \mathfrak{b}$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), n \geq 2$	$n - 1$	$\mathfrak{so}(n)$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$n - 1$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	0	0	$n - 1$ $-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}), n \geq 2$	$2n - 1$	$\mathfrak{sp}(n)$	n	$n - 1$	n	$\mathfrak{su}(2)^n$	n	$n - 1$
$\mathfrak{su}(p, q), 1 \leq p < q$	$p + q - 1$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q))$	$p + q - 1$	p	$\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(q - p)$	$\lfloor \frac{q-p}{2} \rfloor$	0
$\mathfrak{su}(p, p), p \geq 1$	$2p - 1$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(p))$	$2p - 1$	p	p	\mathbb{R}^{p-1}	0	0
$\mathfrak{so}(2p, 2q + 1),$ $1 \leq p \leq q$	$p + q$	$\mathfrak{so}(2p) \oplus \mathfrak{so}(2q + 1)$	$p + q$	$2p$	$p + q$	$\mathfrak{so}(2q - 2p + 1)$	$q - p$	0
$\mathfrak{so}(2p, 2q + 1),$ $0 \leq q < p$	$p + q$	$\mathfrak{so}(2p) \oplus \mathfrak{so}(2q + 1)$	$p + q$	$2q + 1$	$p + q$	$\mathfrak{so}(2p - 2q - 1)$	$p - q$	0
$\mathfrak{sp}(p, q), 1 \leq p \leq q$	$p + q$	$\mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q)$	$p + q$	p	$p + q$	$\mathfrak{su}(2)^p \oplus \mathfrak{sp}(q - p)$	q	0
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), n \geq 1$	n	$\mathfrak{u}(n)$	n	n	n	0	0	0
$\mathfrak{so}(2p + 1, 2q + 1)$ $1 \leq p \leq q$	$p + q + 1$	$\mathfrak{so}(2p + 1) \oplus \mathfrak{so}(2q + 1)$	$p + q$	$2p + 1$	$2 \lfloor \frac{p+q+1}{2} \rfloor$	$\mathfrak{so}(2q - 2p)$	$2 \lfloor \frac{q-p}{2} \rfloor$	1
$\mathfrak{so}(2p, 2q), 1 < p \leq q$	$p + q$	$\mathfrak{so}(2p) \oplus \mathfrak{so}(2q)$	$p + q$	$2p$	$2 \lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor$	$\mathfrak{so}(2q - 2p)$	$2 \lfloor \frac{q-p}{2} \rfloor$	0
$\mathfrak{so}^*(2n),$ $n \geq 3$ paire	n	$\mathfrak{u}(n)$	n	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\mathfrak{su}(2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	0
$\mathfrak{so}^*(2n),$ $n \geq 3$ impaire	n	$\mathfrak{u}(n)$	n	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\mathfrak{su}(2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \oplus \mathbb{R}$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	0
<i>EI</i>	6	$\mathfrak{sp}(4)$	4	6	4	0	0	2
<i>EII</i>	6	$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$	6	4	4	\mathbb{R}^2	0	0
<i>EIII</i>	6	$\mathfrak{so}(10) \oplus \mathbb{R}$	6	2	4	$\mathfrak{su}(4) \oplus \mathbb{R}$	2	0
<i>EIV</i>	6	\mathfrak{f}_4	4	2	4	$\mathfrak{so}(8)$	4	2
<i>EV</i>	7	$\mathfrak{su}(8)$	7	7	7	0	0	0
<i>EVI</i>	7	$\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$	7	4	7	$\mathfrak{su}(2)^3$	3	0
<i>EVII</i>	7	$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{R}$	7	3	7	$\mathfrak{so}(8)$	4	0
<i>EVIII</i>	8	$\mathfrak{so}(16)$	8	8	8	0	0	0
<i>EIX</i>	8	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	8	4	8	$\mathfrak{so}(8)$	4	0
<i>FI</i>	4	$\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2)$	4	4	4	0	0	0
<i>FII</i>	4	$\mathfrak{so}(9)$	4	1	4	$\mathfrak{so}(7)$	3	0
<i>G</i>	2	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	2	2	2	0	0	0

TABLE 2. Données concernant les algèbres de Lie simples réelles, non complexes, non compactes.

2.6. FORMES LINÉAIRES RÉELLES RÉDUCTIBLES ET ALGÈBRES QUASI-RÉDUCTIBLES 77

CHAPITRE 3

CALCULS EXPLICITES EFFECTUÉS AVEC GAP4

3.1. Introduction

Dans [19] (Chapitre 1 de cette thèse), on prouve le résultat suivant, conjecturé par D. Panyushev en [22] :

Théorème 3.1.1. — *Soit e un élément nilpotent d'une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} . Alors on a :*

$$\text{ind } \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \text{rg } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),$$

où $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ sont respectivement le normalisateur et le centre du centralisateur \mathfrak{g}^e de l'élément e .

Ce résultat est d'abord prouvé dans [19] lorsque \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple classique (partie 3) et lorsque l'élément e vérifie une certaine propriété (P_1) (partie 4), dont on rappelle ici la définition :

Définition 3.1.2. — *Soit $\{e, h, f\}$ un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans \mathfrak{g} contenant e . On note \mathfrak{z}_{\max} le sous-espace propre de la restriction de adh à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ relativement à sa plus grande valeur propre. On dira que e vérifie la propriété (P_1) si, pour tout élément non nul v de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, le sous-espace \mathfrak{z}_{\max} est contenu dans le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], v]$.*

Il est clair que si e vérifie la propriété (P_1) , il en est de même de tous les éléments de l'orbite de e sous l'action du groupe adjoint. On dira qu'une orbite nilpotente de \mathfrak{g} vérifie la propriété (P_1) si l'un de ses représentants la vérifie.

En outre, il suffit de prouver le théorème 3.1.1 pour les éléments nilpotents distingués non réguliers de \mathfrak{g} . Ceci résulte essentiellement de la proposition 2.4 de [19] (Chapitre 1 de cette thèse, Proposition 1.2.4). Il reste à prouver dans [19], que toutes les orbites nilpotentes distinguées non régulières d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle vérifient la propriété (P_1) . Il s'avère qu'il suffit de tester la surjectivité d'un nombre fini de matrices, dépendant d'un

paramètre, pour vérifier la propriété (P_1) . On présente ici les calculs effectués à partir de GAP4 qui permettent de vérifier ces conditions. Ce travail achève la démonstration de la proposition 5.3 de [19].

On rappelle dans la partie 3.2 les résultats de [19] que l'on justifie par les calculs de GAP4. Dans la partie 3.3, on présente ces calculs explicites.

3.2. Rappels des résultats que l'on justifie avec GAP4

On suppose que \mathfrak{g} est isomorphe à l'une des cinq algèbres de Lie simples exceptionnelles E_6 , E_7 , E_8 , F_4 ou G_2 et on suppose que e est un élément nilpotent distingué non régulier de \mathfrak{g} . Il s'agit de montrer que l'élément e vérifie la propriété (P_1) . On note m_1, \dots, m_r les valeurs propres de la restriction de adh au sous-espace \mathfrak{g}^e . Les entiers m_1, \dots, m_r sont pairs et on a

$$2 = m_1 < m_2 < \dots < m_r.$$

On note $\mathfrak{g}_{m_l}^e$ le sous-espace propre correspondant à la valeur propre m_l , pour $l = 1, \dots, r$. Avec les notations de la définition 3.1.2, on a :

$$\mathfrak{z}_{\max} = \mathfrak{g}_{m_r}^e.$$

On choisit une base

$$\mathcal{B} = e_{m_1}^1, \dots, e_{m_1}^{d_1}, e_{m_2}^1, \dots, e_{m_2}^{d_2}, \dots, e_{m_r}^1, \dots, e_{m_r}^{d_r}$$

de \mathfrak{g}^e de vecteurs propres telle que $e_{m_l}^1, \dots, e_{m_l}^{d_l}$ forme une base de $\mathfrak{g}_{m_l}^e$, pour $l = 1, \dots, r$, et telle qu'il existe une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ formée de vecteurs de \mathcal{B} . On peut supposer que $e_{m_1}^1 = e_{m_2}^1 = e$.

Soit $i_1 < \dots < i_s$ dans $\{1, \dots, r\}$ et $k_{(1,1)}, \dots, k_{(1,\delta_1)}, \dots, k_{(s,1)}, \dots, k_{(s,\delta_s)}$ des indices tels que les éléments

$$e_{m_{i_1}}^{k_{(1,1)}}, \dots, e_{m_{i_1}}^{k_{(1,\delta_1)}}, \dots, e_{m_{i_s}}^{k_{(s,1)}}, \dots, e_{m_{i_s}}^{k_{(s,\delta_s)}}$$

forment une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. En particulier, on a les relations : $m_{i_1} = 2$ et $\delta_1 = 1$, $m_{i_s} = m_r$, $\delta_s = d_r$ et $k_{(s,l)} = l$, pour $l = 1, \dots, \delta_s$.

Pour i, j et k dans $\{1, \dots, r\}$ et t, p et q dans $\{1, \dots, d_i\}$, $\{1, \dots, d_j\}$ et $\{1, \dots, d_k\}$ respectivement, on note $\lambda_{(m_k, q), (m_i, t), (m_j, p)}$ la coordonnée de l'élément $[[f, e_{m_k}^q], e_{m_i}^t]$ en $e_{m_j}^p$. Notons que si $\lambda_{(m_k, q), (m_i, t), (m_j, p)}$ est non nul, on a la relation $m_k = m_j - m_i + 2$.

Soit l dans $\{1, \dots, s\}$ et $\underline{\alpha}_l$ un δ_l -uplet. On définit une matrice $M(l, \underline{\alpha}_l)$ de la façon suivante :

1) Si $m_r - m_{i_l} + 2$ est une valeur propre de la restriction de adh à \mathfrak{g}^e , on note $k(l)$ l'élément de $\{1, \dots, r\}$ tel que $m_{k(l)} = m_r - m_{i_l} + 2$. Alors $M(l, \underline{\alpha}_l)$ est la

matrice de taille $d_r \times d_{k(l_0)}$ dont les coefficients $(M(l, \underline{\alpha}_l))_{p,q}$ sont donnés par :

$$(M(l, \underline{\alpha}_l))_{p,q} = \sum_{t=1}^{\delta_l} \alpha_l^t \lambda_{(m_{k(l)}, q), (m_{i_l}, t), (m_r, p)},$$

pour p dans $\{1, \dots, d_r\}$ et q dans $\{1, \dots, d_{k(l)}\}$. La matrice $M(l, \underline{\alpha}_l)$ s'écrit aussi, de manière plus agréable, comme une somme de matrices :

$$(1) \quad M(l, \underline{\alpha}_l) = \sum_{t=1}^{\delta_l} \alpha_l^t M(l, \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\text{avec 1 en } t^{\text{ième}} \text{ position}}).$$

2) Sinon, $m_r - m_{i_{l_0}} + 2$ n'est pas une valeur propre de la restriction de adh à \mathfrak{g}^e , et on pose :

$$M(l_0, \underline{\alpha}_{l_0}) = 0_{d_r, 1}.$$

La proposition suivante est démontrée dans [19], Proposition 5.2 :

Proposition 3.2.1. — *On suppose que la matrice $M(l, \underline{\alpha}_l)$ est surjective pour tout l de $\{1, \dots, s\}$ et tout δ_l -uplet $\underline{\alpha}_l$ non nul. Alors l'élément e vérifie la propriété (P_1) .*

Remarque D'après [19], Lemme 5.1, il suffit de vérifier la surjectivité des matrices $M(l, \underline{\alpha}_l)$, pour $l \geq 2$ et $\underline{\alpha}_l$ non nul. Cela laisse $s - 1$ matrices, dépendant d'un paramètre $\underline{\alpha}_l$, à étudier. De plus, lorsque $\delta_s = d_r = 1$, la matrice $M(s, \underline{\alpha}_s) = \alpha_s^1 M(s, (1))$ est toujours surjective, pour α_s^1 non nul. Dans ce cas, on réduit à $s - 2$ le nombre de matrices à étudier.

Dans [9], on trouve une liste de \mathfrak{sl}_2 -triplets correspondant aux orbites nilpotentes. Le logiciel GAP4 permet en outre d'effectuer des calculs dans les algèbres de Lie. Il permet notamment de calculer le centralisateur d'un élément, le centre d'une sous-algèbre, etc. En vérifiant pour chaque orbite distinguée non régulière de E_6 , E_7 , E_8 et F_4 les hypothèses de la proposition précédente, on prouve la proposition suivante (Proposition 5.3 de [19]), puisque le cas de G_2 , particulièrement simple, est traité à part dans [19] :

Proposition 3.2.2. — *On suppose que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple de type E_6 , E_7 , E_8 , F_4 ou G_2 . Alors les orbites nilpotentes distinguées non régulières de \mathfrak{g} vérifient la propriété (P_1) .*

Cette proposition termine la preuve du théorème 4. Dans la partie suivante, on expose les calculs qui justifient cette proposition.

3.3. Présentation des calculs

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est de type E_6 , E_7 , E_8 ou F_4 . Pour une orbite nilpotente distinguée non régulière de \mathfrak{g} donnée, on considère l'élément e du \mathfrak{sl}_2 -triplet fourni par [9] correspondant à la caractéristique de l'orbite. Grâce à GAP4, on exhibe une base \mathcal{B} vérifiant les conditions précédentes. On vérifie dans un premier temps que pour tout l de $\{1, \dots, s\}$, il existe un entier $k(l)$ dans $\{1, \dots, r\}$ tel que $m_{k(l)} = m_r - m_{i_l} + 2$. On calcule ensuite, la matrice $M(l, \underline{\alpha}_l)$, pour $\underline{\alpha}_l = (\alpha_l^1, \dots, \alpha_l^{\delta_l})$ un δ_l -uplet non nul, et on vérifie la surjectivité de cette matrice. D'après la remarque qui suit la proposition 3.2.1, on peut supposer $l \geq 2$ et lorsque $d_r = 1$, on peut supposer de plus $l \leq s - 1$. Enfin, dans la plupart des cas, on s'aperçoit que la somme de la relation (1) n'a qu'un seul terme. L'étude de la surjectivité de $M(l, \underline{\alpha}_l)$ ne dépend alors d'aucun paramètre, ce qui facilite le travail.

La démarche générale est la suivante : on définit l'algèbre de Lie L dans laquelle on veut travailler grâce à la commande `SimpleLieAlgebra`, on définit un système de racines (`RootSystem`), un système de racines positives correspondant (`PositiveRoots`) puis des systèmes de vecteurs «positifs» et «négatifs» associés (`PositiveRootVectors` et `NegativeRootVectors`). La commande `CanonicalGenerators` donne une base de la sous-algèbre de Cartan. On peut désormais faire des calculs dans l'algèbre de Lie L . Il s'agit ensuite d'étudier les orbites nilpotentes distinguées non régulières. Pour chacune d'entre elles, on définit un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{e, h, f\}$ grâce aux données de [9]. On calcule ensuite le centralisateur \mathfrak{g} de l'élément positif e avec la commande `LieCentralizer` puis le centre \mathfrak{z} du centralisateur avec `LieCentre`. Pour chaque orbite, on précise la valeur du plus haut poids m_r et on donne le nombre de matrices à étudier. Pour chacune d'entre elles on donne les valeurs de m_{i_l} et de $m_{k(l)}$ et on effectue les calculs nécessaires. Les calculs de la première orbite de la première algèbre (il s'agit de l'orbite sous-régulière de E_6) sont détaillés ; les autres le sont un peu moins.

3.3.1. Calculs pour E_6 . — On commence par définir L et les générateurs de L :

```
> L:=SimpleLieAlgebra("E",6,Rationals);
<Lie algebra of dimension 78 over Rationals>
> R:=RootSystem(L);
<root system of rank 6>
> P:=PositiveRoots(R);;
> x:=PositiveRootVectors(R);
[ v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6,
v.7, v.8, v.9, v.10, v.11, v.12,
v.13, v.14, v.15, v.16, v.17, v.18,
```

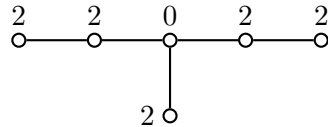
```

v.19, v.20, v.21, v.22, v.23, v.24,
v.25, v.26, v.27, v.28, v.29, v.30,
v.31, v.32, v.33, v.34, v.35, v.36 ]
> y:=NegativetiveRootVectors(R);
[ v.37, v.38, v.39, v.40, v.41, v.42,
v.43, v.44, v.45, v.46, v.47, v.48,
v.49, v.50, v.51, v.52, v.53, v.54,
v.55, v.56, v.57, v.58, v.59, v.60,
v.61, v.62, v.63, v.64, v.65, v.66,
v.67, v.68, v.69, v.70, v.71, v.72 ]
> CanonicalGenerators(R) [3]
[ v.73, v.74, v.75, v.76, v.77, v.78 ]

```

Dans E_6 , il y a deux orbites nilpotentes distinguées non régulières :

1. Caractéristique :



On définit les éléments e et f du \mathfrak{sl}_2 -triplet correspondant dans les données de [9] :

```

> e:=x[1]+x[2]+x[5]+x[6]+x[8]+x[9];
v.1+v.2+v.5+v.6+v.8+v.9
> f:=(12)*y[1]+(8)*y[2]+(-8)*y[3]+(22)*y[5]+(12)*y[6]+(8)*y[8]+
(22)*y[9]+(8)*y[10];;

```

On vérifie que le crochet $e*f$ est égal à l'élément neutre de la caractéristique et on pose $h := e*f$:

```

> e*f;
(12)*v.73+(16)*v.74+(22)*v.75+(30)*v.76+(22)*v.77+(12)*v.78
> h:=e*f;;

```

On calcule le centralisateur g de e et on en donne une base Bg . On calcule ensuite le centre z et on donne une base Bz de z :

```

> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 8 over Rationals>

```

Le centralisateur est de dimension 8.

```

> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 8 over Rationals>,

```

(dimension 5)>

Le centre est un idéal de dimension 5 dans \mathfrak{g} .

```
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.1+v.2+v.5+v.6+v.8+v.9, v.23+(-1)*v.25+v.26,
  v.27+(-1)*v.29+(-1)*v.30+(-1)*v.31, v.34+v.35, v.36 ]
```

On calcule les «poids» de z en évaluant $h*Bz[l]$ pour $l = 1, \dots, 5$. On sait déjà que $h*Bz[1]=(2)*Bz[1]$ car $Bz[1]=e$.

```
> h*Bz[2];
(8)*v.23+(-8)*v.25+(8)*v.26
> h*Bz[3];
(10)*v.27+(-10)*v.29+(-10)*v.30+(-10)*v.31
> h*Bz[4];
(14)*v.34+(14)*v.35
> h*Bz[5];
(16)*v.36
```

On obtient que les poids sont 2, 8, 10, 14, 16, d'où $m_r = 16$. Il y a trois matrices à étudier.

- (a) $m_{i_2} = 8, m_{k(2)} = 10$. On cherche une base de \mathfrak{g}_{10}^e parmi les éléments Bg en calculant $h*Bg[i]$, pour $i = 1, \dots, 8$ et on effectue le calcul correspondant :

```
> h*Bg[5];
(10)*v.27+(-10)*v.29
> h*Bg[6];
(10)*v.30+(10)*v.31
> ((f*Bg[5])*Bz[2]);
(-20)*v.36
> ((f*Bg[6])*Bz[2]);
(20)*v.36
```

Le sous-espace \mathfrak{g}_{10}^e est engendré par les vecteurs $Bg[5]$ et $Bg[6]$.

La matrice à considérer est $M(2, (1))$; elle est donnée par $\begin{bmatrix} & \\ -20 & 20 \end{bmatrix}$. C'est une matrice surjective.

Remarque Lorsque $d_r = 1$, il suffit de trouver un élément de $\mathfrak{g}_{m_k(l)}^e$ qui donne un crochet non nul; dans la suite on donnera seulement le calcul correspondant à cet élément.

- (b) $m_{i_3} = 10, m_{k(3)} = 8$.

```
> ((f*Bz[2])*Bz[3]);
(-40)*v.36
```
- (c) $m_{i_4} = 14, m_{k(4)} = 4$.

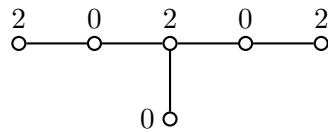
```
> h*Bg[2];
(4)*v.7+(2)*v.11+(2)*v.12+(2)*v.13+(-2)*v.14+(2)*v.15+(-4)*v.16
```

```
> ((f*Bg[2])*Bz[4]);
(14)*v.36
```

Ces trois calculs montrent que les hypothèses de la proposition 3.2.1 sont vérifiées.

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

2. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[7]+x[8]+x[9]+x[10]+x[11]+x[19];
v.7+v.8+v.9+v.10+v.11+v.19
> f:=(8)*y[7]+(9)*y[8]+(5)*y[9]+(5)*y[10]+(8)*y[11]+y[19];
(8)*v.43+(9)*v.44+(5)*v.45+(5)*v.46+(8)*v.47+v.55
> e*f;
(8)*v.73+(10)*v.74+(14)*v.75+(20)*v.76+(14)*v.77+(8)*v.78
> h:=e*f;;
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 12 over Rationals>
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 12 over Rationals>,
  (dimension 4)>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.7+v.8+v.9+v.10+v.11+v.19, v.32+(-1)*v.33, v.35, v.36 ]
> h*Bz[2];
(8)*v.32+(-8)*v.33
> h*Bz[3];
(10)*v.35
> h*Bz[4];
(10)*v.36
```

Les poids de z sont 2,8,10,10; d'où $m_r = 10$. Il y a deux matrices à étudier.

(a) $m_{i_2} = 8$, $m_{k(2)} = 4$

```

> h*Bg[4];
(4)*v.17+(-4)*v.18+(4)*v.20+(-4)*v.21
> h*Bg[5];
(4)*v.12+(4)*v.16+(-8)*v.22+(4)*v.24
> h*Bg[6];
(4)*v.22+(-4)*v.24+(-4)*v.25

> ((f*Bg[4])*Bz[2]);
(-16)*v.35
(b)  $m_{i_3} = 10, m_{k(3)} = 2$ 
> h*Bg[2];
(2)*v.1+(2)*v.4+(2)*v.6+(2)*v.13+(2)*v.14+(-6)*v.15
> h*Bg[3];
(2)*v.19

> ((f*Bg[1])*Bz[3]); ((f*Bg[2])*Bz[3]); ((f*Bg[3])*Bz[3]);
(-10)*v.35
(10)*v.36
0*v.1
> ((f*Bg[1])*Bz[4]); ((f*Bg[2])*Bz[4]); ((f*Bg[3])*Bz[4]);
(-9)*v.36
(6)*v.35
(-1)*v.36

```

La matrice à étudier est

$$\alpha \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -9 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\alpha & -\beta & 0 \\ -9\beta & 10\alpha & -\beta \end{bmatrix}.$$

On vérifie que c'est une matrice de rang 2 pour tout couple (α, β) non nul.

La proposition 3.2.1 entraîne que cette orbite vérifie (P_1) .

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

Conclusion pour E_6 : Toutes les orbites nilpotentes distinguées non régulières de E_6 vérifient la propriété (P_1) .

3.3.2. Calculs pour E_7 . — Définition de L :

```

> L:=SimpleLieAlgebra("E",7,Rationals);
<Lie algebra of dimension 133 over Rationals>
> R:=RootSystem(L);
<root system of rank 7>
> P:=PositiveRoots(R);;

```

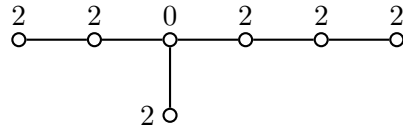
```

> x:=PositiveRootVectors(R);
[ v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.7,
v.8, v.9, v.10, v.11, v.12, v.13, v.14,
v.15, v.16, v.17, v.18, v.19, v.20, v.21,
v.22, v.23, v.24, v.25, v.26, v.27, v.28,
v.29, v.30, v.31, v.32, v.33, v.34, v.35,
v.36, v.37, v.38, v.39, v.40, v.41, v.42,
v.43, v.44, v.45, v.46, v.47, v.48, v.49,
v.50, v.51, v.52, v.53, v.54, v.55, v.56,
v.57, v.58, v.59, v.60, v.61, v.62, v.63 ]
> y:=NegativeRootVectors(R);
[ v.64, v.65, v.66, v.67, v.68, v.69, v.70,
v.71, v.72, v.73, v.74, v.75, v.76, v.77,
v.78, v.79, v.80, v.81, v.82, v.83, v.84,
v.85, v.86, v.87, v.88, v.89, v.90, v.91,
v.92, v.93, v.94, v.95, v.96, v.97, v.98,
v.99, v.100, v.101, v.102, v.103, v.104, v.105,
v.106, v.107, v.108, v.109, v.110, v.111, v.112,
v.113, v.114, v.115, v.116, v.117, v.118, v.119,
v.120, v.121, v.122, v.123, v.124, v.125, v.126 ]
> CanonicalGenerators(R)[3];
[ v.127, v.128, v.129, v.130, v.131, v.132, v.133 ]

```

Dans E_7 , il y a cinq orbites nilpotentes distinguées non régulières :

1. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```

> e:=x[1]+x[2]+x[3]+x[6]+x[7]+x[9]+x[11];
v.1+v.2+v.3+v.6+v.7+v.9+v.11
> f:=(26)*y[1]+(22)*y[2]+(50)*y[3]+(22)*y[5]+(40)*y[6]
(21)*y[7]+(15)*y[9]+(-15)*y[10]+(57)*y[11];
(26)*v.64+(22)*v.65+(50)*v.66+(22)*v.68+(40)*v.69
+(21)*v.70+(15)*v.72+(-15)*v.73+(57)*v.74
> e*f;
(26)*v.127+(37)*v.128+(50)*v.129+(72)*v.130
+(57)*v.131+(40)*v.132+(21)*v.133

```

```

> h:=e*f;;
Calcul de g, Bg, z et Bz :
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 9 over Rationals>
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 9 over Rationals>,
(dimension 6)>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.1+v.2+v.3+v.6+v.7+v.9+v.11,
v.33+(2)*v.34+(-1)*v.36+(-1)*v.37+(-1)*v.38+v.40+(-3)*v.41,
v.46+v.47+v.48+v.49+v.50, v.56+(-1)*v.57, v.60, v.63 ]
> h*Bz[2];
(10)*v.33+(20)*v.34+(-10)*v.36+(-10)*v.37
+(-10)*v.38+(10)*v.40+(-30)*v.41
> h*Bz[3];
(14)*v.46+(14)*v.47+(14)*v.48+(14)*v.49+(14)*v.50
> h*Bz[4];
(18)*v.56+(-18)*v.57
> h*Bz[5];
(22)*v.60
> h*Bz[6];
(26)*v.63

```

Les poids de z sont 2,10,14,18,22,26; d'où $m_r = 26$. Il y a quatre matrices à étudier.

- (a) $m_{i_2} = 10, m_{k(2)} = 18$
 > ((f*Bz[4])*Bz[2]);
 (90)*v.63
- (b) $m_{i_3} = 14, m_{k(3)} = 14$
 > ((f*Bz[3])*Bz[3]);
 (-98)*v.63
- (c) $m_{i_4} = 18, m_{k(4)} = 10$
 > h*Bg[3];
 (10)*v.33+(20)*v.34+(-10)*v.36+(20)*v.37+(20)*v.38+(10)*v.40
 > h*Bg[4];
 (10)*v.37+(10)*v.38+(10)*v.41

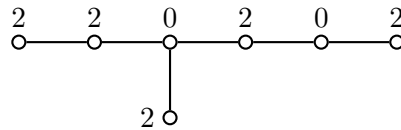
 > ((f*Bg[4])*Bz[4]);
 (-30)*v.63
- (d) $m_{i_5} = 22, m_{k(5)} = 6$
 > h*Bg[2];

$$(6)*v.19+(4)*v.20+(-2)*v.21+(2)*v.22 \\ + (4)*v.23+(-2)*v.24+(-2)*v.25+(-2)*v.28$$

$$> ((f*Bg[2])*Bz[5]); \\ (-22)*v.63$$

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1).

2. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

$$> e:=x[1]+x[2]+x[3]+x[5]+x[7]+x[9]+x[18]; \\ v.1+v.2+v.3+v.5+v.7+v.9+v.18 \\ > f:=(22)*y[1]+(3)*y[2]+(42)*y[3]+(15)*y[5]+(17)*y[7] \\ + (28)*y[9]+(-28)*y[10]+(3)*y[12]+(3)*y[13]+(32)*y[18]; \\ (22)*v.64+(3)*v.65+(42)*v.66+(15)*v.68+(17)*v.70 \\ + (28)*v.72+(-28)*v.73+(3)*v.75+(3)*v.76+(32)*v.81 \\ > e*f; \\ (22)*v.127+(31)*v.128+(42)*v.129+(60)*v.130 \\ + (47)*v.131+(32)*v.132+(17)*v.133 \\ > h:=e*f;;$$

Calcul de g , Bg , z et Bz :

$$> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e])); \\ <Lie algebra of dimension 11 over Rationals> \\ > z:=LieCentre(g); \\ <two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 11 over Rationals>, \\ (dimension 5)> \\ > Bg:=BasisVectors(Basis(g));; \\ > Bz:=BasisVectors(Basis(z)); \\ [v.1+v.2+v.3+v.5+v.7+v.9+v.18, v.39+(-1)*v.42+(-1)*v.43+(-1)*v.44 \\ + (-2)*v.45+v.49, v.51+v.53+v.55+v.57, v.60, v.63] \\ > h*Bz[2]; \\ (10)*v.39+(-10)*v.42+(-10)*v.43+(-10)*v.44+(-20)*v.45+(10)*v.49 \\ > h*Bz[3]; \\ (14)*v.51+(14)*v.53+(14)*v.55+(14)*v.57 \\ > h*Bz[4]; \\ (18)*v.60$$

```
> h*Bz[5];
(22)*v.63
```

Les poids de z sont 2,10,14,18,22; d'où $m_r = 22$. Il y a trois matrices à étudier.

(a) $m_{i_2} = 10, m_{k(2)} = 14$

```
> h*Bg[7];
(14)*v.53+(-14)*v.54
> h*Bg[8];
(14)*v.51+(14)*v.54+(14)*v.55+(14)*v.57
```

```
> ((f*Bg[7])*Bz[2]);
(-70)*v.63
```

(b) $m_{i_3} = 14, m_{k(3)} = 10$

```
> h*Bg[5];
(10)*v.42+(10)*v.43+(10)*v.44+(20)*v.45
> h*Bg[6];
(10)*v.39+(10)*v.49
```

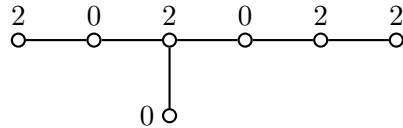
```
> ((f*Bg[5])*Bz[3]);
(70)*v.63
```

(c) $m_{i_4} = 18, m_{k(4)} = 4$

```
> h*Bg[3];
(6)*v.20+(9)*v.21+(-3)*v.22+(-3)*v.27+(-9)*v.28
+(3)*v.29+(6)*v.30+(-3)*v.31+(-3)*v.35
> ((f*Bg[3])*Bz[4]);
(18)*v.63
```

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

3. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[7]+x[8]+x[9]+x[10]+x[11]+x[12]+x[22];
v.7+v.8+v.9+v.10+v.11+v.12+v.22
> f:=(15)*y[7]+(18)*y[8]+(24)*y[9]+(15)*y[10]+(10)*y[11]+
(28)*y[12]+y[22];
(15)*v.70+(18)*v.71+(24)*v.72+(15)*v.73+(10)*v.74+(28)*v.75+v.85
```

```
> e*f;
(18)*v.127+(25)*v.128+(34)*v.129+(50)*v.130
+(39)*v.131+(28)*v.132+(15)*v.133
> h:=e*f;;
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

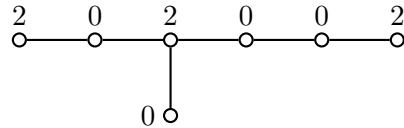
```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 13 over Rationals>
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 13 over Rationals>,
  (dimension 5)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.7+v.8+v.9+v.10+v.11+v.12+v.22, v.47+(-3)*v.48+(-1)*v.49+(-2)*v.50,
  v.58+v.59, v.62, v.63 ]
> h*Bz[2];
(10)*v.47+(-30)*v.48+(-10)*v.49+(-20)*v.50
> h*Bz[3];
(14)*v.58+(14)*v.59
> h*Bz[4];
(16)*v.62
> h*Bz[5];
(18)*v.63
```

Les poids de z sont 2,10,14,16,18; d'où $m_r = 18$. Il y a trois matrices à étudier.

- (a) $m_{i_2} = 10, m_{k(2)} = 10$
 > ((f*Bz[2])*Bz[2]);
 (-150)*v.63
- (b) $m_{i_3} = 14, m_{k(3)} = 6$
 > h*Bg[4];
 (6)*v.30+(-12)*v.31+(6)*v.32+(6)*v.33+(-6)*v.35
 > h*Bg[5];
 (6)*v.36+(-6)*v.37+(-6)*v.40
- > ((f*Bg[4])*Bz[3]);
 (42)*v.63
- (c) $m_{i_4} = 16, m_{k(4)} = 4$
 > h*Bg[3];
 (4)*v.13+(4)*v.14+(4)*v.18+(-12)*v.26+(8)*v.28+(4)*v.29
- > ((f*Bg[3])*Bz[4]);
 (12)*v.63

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

4. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[8]+x[9]+x[13]+x[16]+x[17]+x[18]+x[29];
v.8+v.9+v.13+v.16+v.17+v.18+v.29
> f:=(14)*y[8]+(9)*y[9]+(-9)*y[10]+(11)*y[13]+(9)*y[16]
+(11)*y[17]+(8)*y[18]+(9)*y[19]+y[29];
(14)*v.71+(9)*v.72+(-9)*v.73+(11)*v.76+(9)*v.79
+(11)*v.80+(8)*v.81+(9)*v.82+v.92
> e*f;
(14)*v.127+(19)*v.128+(26)*v.129+(38)*v.130
+(29)*v.131+(20)*v.132+(11)*v.133
> h:=e*f;;
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 17 over Rationals>
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 17 over Rationals>,
  (dimension 3)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.8+v.9+v.13+v.16+v.17+v.18+v.29, v.56+(3)*v.57+(2)*v.59, v.63 ]
> h*Bz[2];
(10)*v.56+(30)*v.57+(20)*v.59
> h*Bz[3];
(14)*v.63
```

Les poids de z sont 2,10,14; d'où $m_r = 14$. Il n'y a qu'une matrice à étudier.

```
(a)  $m_{i_2} = 10, m_{k(2)} = 6$ 
> h*Bg[7];
(6)*v.37+(-6)*v.38+(-6)*v.41
> h*Bg[8];
(6)*v.39+(6)*v.43+(-6)*v.45
> h*Bg[9];
```

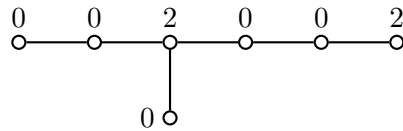
(6)*v.42+(6)*v.46+(6)*v.49

> ((f*Bg[7])*Bz[2]);

(30)*v.63

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1).

5. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

> e:=x[13]+x[14]+x[15]+x[16]+x[17]+x[18]+x[33];

v.13+v.14+v.15+v.16+v.17+v.18+v.33

>f:=(9)*y[13]+(5)*y[14]+(2)*y[15]+(8)*y[16]+(8)*y[17]
+(2)*y[18]+(5)*y[33];

(9)*v.76+(5)*v.77+(2)*v.78+(8)*v.79+(8)*v.80+(2)*v.81+(5)*v.96

> e*f;

(10)*v.127+(15)*v.128+(20)*v.129+(30)*v.130

+(23)*v.131+(16)*v.132+(9)*v.133

> h:=e*f;;

Calcul de g , Bg , z et Bz :

> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));

<Lie algebra of dimension 21 over Rationals>

> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;

> z:=LieCentre(g);

<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 21 over Rationals>,
(dimension 4)>

> Bz:=BasisVectors(Basis(z));

[v.13+v.14+v.15+v.16+v.17+v.18+v.33, v.61, v.62, v.63]

> h*Bz[2];

(10)*v.61

> h*Bz[3];

(10)*v.62

> h*Bz[4];

(10)*v.63

Les poids de z sont 2,10,10,10; d'où $m_r = 10$. Il n'y a qu'une matrice à étudier.

(a) $m_{i_2} = 10$, $m_{k(2)} = 2$

```

> h*Bg[1];
(2)*v.15+(2)*v.18
> h*Bg[2];
(2)*v.4+(2/3)*v.19+(-4/3)*v.20+(2/3)*v.21+(2/3)*v.22+(-2/3)*v.23
> h*Bg[3];
(2)*v.19+(-4)*v.20+(2)*v.21+(2)*v.22+(4)*v.23+(-6)*v.24
> h*Bg[4];
(2)*v.7+(-6)*v.9+(4)*v.10+(2)*v.11+(2)*v.26+(-4)*v.27
> h*Bg[5];
(2)*v.9+(-2)*v.10+(2)*v.29
> h*Bg[6];
(2)*v.13+(2)*v.14+(2)*v.16+(2)*v.17+(2)*v.33

> ((f*Bg[1])*Bz[2]);((f*Bg[2])*Bz[2]);((f*Bg[3])*Bz[2]);
((f*Bg[4])*Bz[2]);((f*Bg[5])*Bz[2]);((f*Bg[6])*Bz[2]);
(-2)*v.61
(8/3)*v.62
(2)*v.62
(-4)*v.63
0*v.1
(-8)*v.61
> ((f*Bg[1])*Bz[3]);((f*Bg[2])*Bz[3]);((f*Bg[3])*Bz[3]);
((f*Bg[4])*Bz[3]);((f*Bg[5])*Bz[3]);((f*Bg[6])*Bz[3]);
(-2)*v.62
(4/3)*v.63
(4)*v.63
(2)*v.61
(2)*v.61
(-8)*v.62
> ((f*Bg[1])*Bz[4]);((f*Bg[2])*Bz[4]);((f*Bg[3])*Bz[4]);
((f*Bg[4])*Bz[4]);((f*Bg[5])*Bz[4]);((f*Bg[6])*Bz[4]);
0*v.1
(-10/3)*v.61
(-10)*v.61
(10)*v.62
0*v.1
(-10)*v.63

```

La matrice à étudier est

$$\begin{bmatrix} -2\alpha & -10/3\gamma & -10\gamma & 2\beta & 2\beta & -8\alpha \\ -2\beta & -8/3\alpha & 2\alpha & 10\gamma & 0 & -8\beta \\ 0 & 4/3\beta & 4\beta & -4\alpha & 0 & -10\gamma \end{bmatrix}.$$

Une étude élémentaire montre que cette matrice est de rang 3 pour tout triplet (α, β, γ) non nul.

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

Conclusion : Toutes les orbites nilpotentes distinguées non régulières de E_7 vérifient la propriété (P_1) .

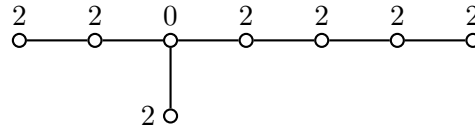
3.3.3. Calculs pour E_8 . — Définition de L :

```
> L:=SimpleLieAlgebra("E",8,Rationals);
<Lie algebra of dimension 248 over Rationals>
> R:=RootSystem(L);
<root system of rank 7>
> P:=PositiveRoots(R);
> x:=PositiveRootVectors(R);
[ v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.7, v.8,
v.9, v.10, v.11, v.12, v.13, v.14, v.15, v.16,
v.17, v.18, v.19, v.20, v.21, v.22, v.23, v.24,
v.25, v.26, v.27, v.28, v.29, v.30, v.31, v.32,
v.33, v.34, v.35, v.36, v.37, v.38, v.39, v.40,
v.41, v.42, v.43, v.44, v.45, v.46, v.47, v.48,
v.49, v.50, v.51, v.52, v.53, v.54, v.55, v.56,
v.57, v.58, v.59, v.60, v.61, v.62, v.63, v.64,
v.65, v.66, v.67, v.68, v.69, v.70, v.71, v.72,
v.73, v.74, v.75, v.76, v.77, v.78, v.79, v.80,
v.81, v.82, v.83, v.84, v.85, v.86, v.87, v.88,
v.89, v.90, v.91, v.92, v.93, v.94, v.95, v.96,
v.97, v.98, v.99, v.100, v.101, v.102, v.103, v.104,
v.105, v.106, v.107, v.108, v.109, v.110, v.111, v.112,
v.113, v.114, v.115, v.116, v.117, v.118, v.119, v.120 ]
> y:=NegativeRootVectors(R);
[ v.121, v.122, v.123, v.124, v.125, v.126, v.127, v.128,
v.129, v.130, v.131, v.132, v.133, v.134, v.135, v.136,
v.137, v.138, v.139, v.140, v.141, v.142, v.143, v.144,
v.145, v.146, v.147, v.148, v.149, v.150, v.151, v.152,
v.153, v.154, v.155, v.156, v.157, v.158, v.159, v.160,
v.161, v.162, v.163, v.164, v.165, v.166, v.167, v.168,
v.169, v.170, v.171, v.172, v.173, v.174, v.175, v.176,
v.177, v.178, v.179, v.180, v.181, v.182, v.183, v.184,
v.185, v.186, v.187, v.188, v.189, v.190, v.191, v.192,
v.193, v.194, v.195, v.196, v.197, v.198, v.199, v.200,
v.201, v.202, v.203, v.204, v.205, v.206, v.207, v.208,
```

```
v.209, v.210, v.211, v.212, v.213, v.214, v.215, v.216,
v.217, v.218, v.219, v.220, v.221, v.222, v.223, v.224,
v.225, v.226, v.227, v.228, v.229, v.230, v.231, v.232,
v.233, v.234, v.235, v.236, v.237, v.238, v.239, v.240 ]
> CanonicalGenerators(R) [3];
[ v.241, v.242, v.243, v.244, v.245, v.246, v.247, v.248 ]
```

Dans E_8 , il y a dix orbites nilpotentes distinguées non régulières :

1. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[1]+x[2]+x[3]+x[6]+x[7]+x[8]+x[10]+x[12];
v.1+v.2+v.3+v.6+v.7+v.8+v.10+v.12
> f:=(72)*y[1]+(60)*y[2]+(142)*y[3]+(68)*y[5]+(132)*y[6]
+(90)*y[7]+(46)*y[8]+(38)*y[10]+(-38)*y[11]+(172)*y[12];
(72)*v.121+(68)*v.122+(142)*v.123+(68)*v.125+(132)*v.126
+(90)*v.127+(46)*v.128+(38)*v.130+(-38)*v.131+(172)*v.132
> e*f;
(72)*v.241+(106)*v.242+(142)*v.243+(210)*v.244
+(172)*v.245+(132)*v.246+(90)*v.247+(46)*v.248
> h:=e*f;;
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 10 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 10 over Rationals>,
(dimension 7)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.1+v.2+v.3+v.6+v.7+v.8+v.10+v.12, v.54+(-1/2)*v.57+(-1/2)*v.58
+(-1/2)*v.59+(-1/2)*v.60+(-1/2)*v.61+(1/2)*v.62+(-1/2)*v.63,
v.84+v.85+(-1)*v.86+(-1)*v.87+(2)*v.88,
v.95+(-1)*v.96+v.97+(-1)*v.98+v.99,
v.109+(-1)*v.112, v.116, v.120 ]
> h*Bz[2];
```

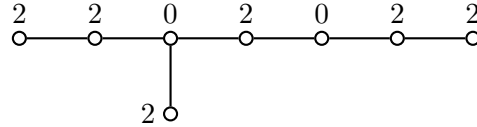

$(14)*v.54+(-7)*v.57+(-7)*v.58+(-7)*v.59+(-7)*v.60+(-7)*v.61$
 $+ (7)*v.62+(-7)*v.63$
 $> h*Bz[3];$
 $(22)*v.84+(22)*v.85+(-22)*v.86+(-22)*v.87+(44)*v.88$
 $> h*Bz[4];$
 $(26)*v.95+(-26)*v.96+(26)*v.97+(-26)*v.98+(26)*v.99$
 $> h*Bz[5];$
 $(34)*v.109+(-34)*v.112$
 $> h*Bz[6];$
 $(38)*v.116$
 $> h*Bz[7];$
 $(46)*v.120$

Les poids de z sont 2,14,22,26,34,38,46 ; d'où $m_r = 46$. Il y a cinq matrices à étudier.

- (a) $m_{i_2} = 14, m_{k(2)} = 34$
 $> ((f*Bz[5])*Bz[2]);$
 $(-119)*v.120$
- (b) $m_{i_3} = 22, m_{k(3)} = 26$
 $> ((f*Bz[4])*Bz[3]);$
 $(286)*v.120$
- (c) $m_{i_4} = 26, m_{k(4)} = 22$
 $> ((f*Bz[3])*Bz[4]);$
 $(286)*v.120$
- (d) $m_{i_5} = 34, m_{k(5)} = 14$
 $> ((f*Bz[2])*Bz[5]);$
 $(-119)*v.120$
- (e) $m_{i_6} = 38, m_{k(6)} = 10$
 $> h*Bg[2];$
 $(10)*v.38+(20)*v.39+(-10)*v.41+(-30)*v.42+(20)*v.43$
 $+ (40)*v.44+(40)*v.45+(10)*v.48+(20)*v.49$
 $> ((f*Bg[2])*Bz[6]);$
 $(190)*v.120$

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

2. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[1]+x[2]+x[3]+x[5]+x[7]+x[8]+x[10]+x[20];
v.1+v.2+v.3+v.5+v.7+v.8+v.10+v.20
> f:=(60)*y[1]+(22)*y[2]+(118)*y[3]+(34)*y[5]+(74)*y[7]+(38)*y[8]
+(66)*y[10]+(-66)*y[11]+(22)*y[13]+(22)*y[14]+(108)*y[20];
(60)*v.121+(22)*v.122+(118)*v.123+(34)*v.125+(74)*v.127+
(38)*v.128+(66)*v.130+(-66)*v.131+(22)*v.133+(22)*v.134+(108)*v.140
> e*f;
(60)*v.241+(88)*v.242+(118)*v.243+(174)*v.244+(142)*v.245+(108)*v.246
+(74)*v.247+(38)*v.248
> h:=e*f;;
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

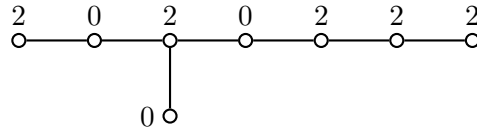
```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 12 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 12 over Rationals>,
  (dimension 6)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.1+v.2+v.3+v.5+v.7+v.8+v.10+v.20,
v.64+v.65+(2)*v.67+v.69+v.71+v.73+v.74+v.76,
v.97+(-1)*v.98+v.99+v.100,
v.104+v.107+(-1)*v.108+(-1)*v.110, v.117, v.120 ]
> h*Bz[2];
(14)*v.64+(14)*v.65+(28)*v.67+(14)*v.69+(14)*v.71+
(14)*v.73+(14)*v.74+(14)*v.76
> h*Bz[3];
(22)*v.97+(-22)*v.98+(22)*v.99+(22)*v.100
> h*Bz[4];
(26)*v.104+(26)*v.107+(-26)*v.108+(-26)*v.110
> h*Bz[5];
(34)*v.117
> h*Bz[6];
(38)*v.120
```

Les poids de z sont $2,14,22,26,34,38$; d'où $m_r = 38$. Il y a quatre matrices à étudier.

- (a) $m_{i_2} = 14, m_{k(2)} = 26$
 $> ((f*Bz[4])*Bz[2]);$
 $(-182)*v.120$
- (b) $m_{i_3} = 22, m_{k(3)} = 18$
 $> h*Bg[6];$
 $(18)*v.81+(36)*v.85+(-18)*v.86+(-18)*v.87+(18)*v.88$
 $> ((f*Bg[6])*Bz[3]);$
 $(-198)*v.120$
- (c) $m_{i_4} = 26, m_{k(4)} = 14$
 $> ((f*Bz[2])*Bz[4]);$
 $(-182)*v.120$
- (d) $m_{i_5} = 34, m_{k(5)} = 6$
 $> h*Bg[2];$
 $(6)*v.23+(9)*v.24+(-3)*v.25+(9)*v.29+(-3)*v.31$
 $+(-9)*v.32+(3)*v.33+(6)*v.34$
 $+(-3)*v.35+(-3)*v.36+(-3)*v.40$
 $> ((f*Bg[2])*Bz[5]);$
 $(51)*v.120$

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

3. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

- $> e := x[7] + x[8] + x[9] + x[10] + x[11] + x[12] + x[13] + x[25];$
 $v.7 + v.8 + v.9 + v.10 + v.11 + v.12 + v.13 + v.25$
- $> f := (66)*y[7] + (34)*y[8] + (52)*y[9] + (75)*y[10] + (49)*y[11] + (27)*y[12]$
 $+ (96)*y[13] + y[25];$
 $(66)*v.127 + (34)*v.128 + (52)*v.129 + (75)*v.130 + (49)*v.131 + (27)*v.132$
 $+ (96)*v.133 + v.145$
- $> e*f;$
 $(52)*v.241 + (76)*v.242 + (102)*v.243 + (152)*v.244$
 $+ (124)*v.245 + (96)*v.246 + (66)*v.247 + (34)*v.248$

```

> h:=e*f;;
Calcul de g, Bg, z et Bz :
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 14 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 14 over Rationals>,
  (dimension 6)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.7+v.8+v.9+v.10+v.11+v.12+v.13+v.25,
  v.74+(-2)*v.77+(-1)*v.78+(-1)*v.80
+(-1)*v.82, v.104+(-1)*v.105+(-1)*v.106, v.113+v.114, v.117, v.120 ]
> h*Bz[2];
(14)*v.74+(-28)*v.77+(-14)*v.78+(-14)*v.80+(-14)*v.82
> h*Bz[3];
(22)*v.104+(-22)*v.105+(-22)*v.106
> h*Bz[4];
(26)*v.113+(26)*v.114
> h*Bz[5];
(28)*v.117
> h*Bz[6];
(34)*v.120

```

Les poids de z sont 2,14,22,26,28,34 ; d'où $m_r = 34$. Il y a quatre matrices à étudier.

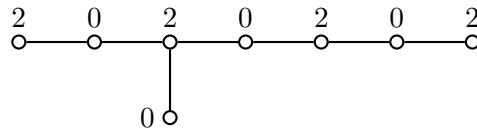
- (a) $m_{i_2} = 14, m_{k(2)} = 22$
 > ((f*Bz[3])*Bz[2]);
 (-154)*v.120
- (b) $m_{i_3} = 22, m_{k(3)} = 14$
 > ((f*Bz[2])*Bz[3]);
 (-154)*v.120
- (c) $m_{i_4} = 26, m_{k(4)} = 10$
 > h*Bg[4];
 (10)*v.54+(-5)*v.56+(-5)*v.58+(-10)*v.59+(5)*v.61+(-15)*v.63
 > h*Bg[5];
 (10)*v.62+(-10)*v.64+(-10)*v.69

 > ((f*Bg[4])*Bz[4]);
 (-65)*v.120
- (d) $m_{i_5} = 28, m_{k(5)} = 8$
 > h*Bg[3];
 (8)*v.36+(8)*v.39+(8)*v.45+(-24)*v.50+(16)*v.55+(-8)*v.57

```
> ((f*Bg[3])*Bz[5]);
(24)*v.120
```

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1).

4. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[9]+x[10]+x[11]+x[12]+x[13]+x[14]+x[15]+x[25];
v.9+v.10+v.11+v.12+v.13+v.14+v.15+v.25
> f:=(44)*y[9]+(50)*y[10]+(28)*y[11]+(36)*y[12]+(54)*y[13]+(26)*y[14]
+(28)*y[15]+(14)*y[25];
(44)*v.129+(50)*v.130+(28)*v.131+(36)*v.132+(54)*v.133+(26)*v.134
+(28)*v.135+(14)*v.145
> e*f;
(44)*v.241+(64)*v.242+(86)*v.243+(128)*v.244+(104)*v.245+(80)*v.246
+(54)*v.247+(28)*v.248
> h:=e*f;;
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 16 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 16 over Rationals>,
  (dimension 5)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.9+v.10+v.11+v.12+v.13+v.14+v.15+v.25,
v.86+v.87+v.88+(4)*v.93+(-3)*v.95,
v.111+v.115, v.119, v.120 ]
> h*Bz[2];
(14)*v.86+(14)*v.87+(14)*v.88+(56)*v.93+(-42)*v.95
> h*Bz[3];
(22)*v.111+(22)*v.115
> h*Bz[4];
(26)*v.119
> h*Bz[5];
```

(28)*v.120

Les poids de z sont 2,14,22,26,28; d'où $m_r = 28$. Il y a trois matrices à étudier.

(a) $m_{i_2} = 14, m_{k(2)} = 16$

> h*Bg[10];

(16)*v.97+(16)*v.98+(-16)*v.99+(-16)*v.100

> ((f*Bg[10])*Bz[2]);

(-112)*v.120

(b) $m_{i_3} = 22, m_{k(3)} = 8$

> h*Bg[4];

(8)*v.45+(8)*v.47+(-8)*v.57+(-24)*v.58+(24)*v.59+(16)*v.61+(16)*v.62

> h*Bg[5];

> ((f*Bg[4])*Bz[3]);

(88)*v.120

(c) $m_{i_4} = 26, m_{k(4)} = 4$

> h*Bg[2];

(4)*v.16+(4)*v.20+(4)*v.22+(-12)*v.30

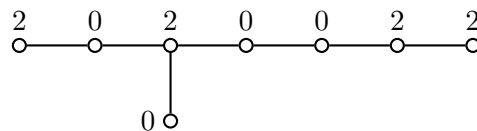
+ (8)*v.32+(4)*v.33+(-12)*v.34+(20)*v.35

> ((f*Bg[2])*Bz[4]);

(26)*v.120

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

5. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

> e:=x[8]+x[9]+x[10]+x[14]+x[18]+x[19]+x[20]+x[33];

v.8+v.9+v.10+v.14+v.18+v.19+v.20+v.33

> f:=(26)*y[8]+(40)*y[9]+(22)*y[10]+(-22)*y[11]+(50)*y[14]+(35)*y[18]

+(37)*y[19]+(21)*y[20]+(35)*y[21]+y[33];

(26)*v.128+(40)*v.129+(22)*v.130+(-22)*v.131+(50)*v.134+(37)*v.138

+(37)*v.139+(21)*v.140+(35)*v.141+v.153

> e*f;

(40)*v.241+(58)*v.242+(78)*v.243+(116)*v.244+(94)*v.245+(72)*v.246

```

+(50)*v.247+(26)*v.248
> h:=e*f;;

```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```

> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 18 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 18 over Rationals>,
  (dimension 4)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.8+v.9+v.10+v.14+v.18+v.19+v.20+v.33,
v.94+v.95+v.96+v.97, v.116, v.120 ]
> h*Bz[2];
(14)*v.94+(14)*v.95+(14)*v.96+(14)*v.97
> h*Bz[3];
(22)*v.116
> h*Bz[4];
(26)*v.120

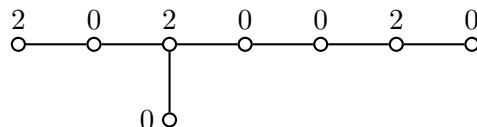
```

Les poids de z sont 2,14,22,26; d'où $m_r = 26$. Il y a deux matrices à étudier.

- (a) $m_{i_2} = 14, m_{k(2)} = 14$
 $> ((f*Bz[2])*Bz[2]);$
 $(-98)*v.120$
- (b) $m_{i_3} = 22, m_{k(3)} = 6$
 $> h*Bg[4];$
 $(6)*v.42+(-12)*v.43+(12)*v.44+(-12)*v.45$
 $+ (6)*v.46+(-12)*v.49+(6)*v.52$
 $+ (-6)*v.55$
 $> h*Bg[5];$
 $(6)*v.50+(-6)*v.51+(-6)*v.57+(-6)*v.61$
- $> ((f*Bg[4])*Bz[3]);$
 $(-66)*v.120$

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

6. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[9]+x[10]+x[14]+x[15]+x[18]+x[19]+x[20]+x[33];
v.9+v.10+v.14+v.15+v.18+v.19+v.20+v.33
> f:=(36)*y[9]+(20)*y[10]+(-20)*y[11]+(22)*y[14]+(22)*y[15]+(20)*y[18]
+(22)*y[19]+(30)*y[20]+(20)*y[21]+(12)*y[33];
(36)*v.129+(20)*v.130+(-20)*v.131+(22)*v.134+(22)*v.135+(20)*v.138
+(22)*v.139+(30)*v.140+(20)*v.141+(12)*v.153
> e*f;
(36)*v.241+(52)*v.242+(70)*v.243+(104)*v.244+(84)*v.245+(64)*v.246
+(44)*v.247+(22)*v.248
> h:=e*f;;
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 20 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 20 over Rationals>,
  (dimension 4)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.9+v.10+v.14+v.15+v.18+v.19+v.20+v.33,
v.97+(-1)*v.99+(3)*v.105+(4)*v.108,
v.119, v.120 ]
> h*Bz[2];
(14)*v.97+(-14)*v.99+(42)*v.105+(56)*v.108
> h*Bz[3];
(22)*v.119
> h*Bz[4];
(22)*v.120
```

Les poids de z sont 2,14,22,22; d'où $m_r = 22$. Il y a deux matrices à étudier.

(a) $m_{i_2} = 14$, $m_{k(2)} = 10$

```
> h*Bg[7];
(10)*v.70+(10)*v.80+(10)*v.81+(10)*v.83
> h*Bg[8];
(10)*v.75+(10)*v.76+(10)*v.77+(10)*v.86
```



```

> h*Bg[9];
(10)*v.81+(20)*v.83+(10)*v.84+(-10)*v.85+(10)*v.87
> h*Bg[10];
(10)*v.76+(10)*v.77+(-10)*v.79+(10)*v.82+(10)*v.86+(-10)*v.90

```

```

> ((f*Bg[7])*Bz[2]);
0*v.1
> ((f*Bg[8])*Bz[2]);
0*v.1
> ((f*Bg[9])*Bz[2]);
(-70)*v.119
> ((f*Bg[10])*Bz[2]);
(70)*v.120

```

La matrice correspondante est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}.$$

C'est clairement une matrice de rang 2.

(b) $m_{i_3} = 22$, $m_{k(3)} = 2$

```

> h*Bg[3];
(2)*v.9+(2)*v.10+(2)*v.14+(2)*v.15
+(2)*v.18+(2)*v.19+(2)*v.20+(2)*v.33

```

```

> ((f*Bg[1])*Bz[3]); ((f*Bg[2])*Bz[3]); ((f*Bg[3])*Bz[3]);
(-2)*v.119
(14)*v.120
(-22)*v.119
> ((f*Bg[1])*Bz[4]); ((f*Bg[2])*Bz[4]); ((f*Bg[3])*Bz[4]);
0*v.1
(22)*v.119
(-22)*v.120

```

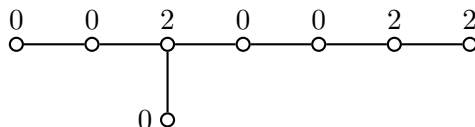
La matrice à étudier est

$$\begin{bmatrix} -2\alpha & 22\beta & -22\alpha \\ 0 & 14\alpha & -22\beta \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2 pour tout couple (α, β) non nul.

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

7. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[8]+x[14]+x[16]+x[17]+x[18]+x[19]+x[20]+x[38];
v.8+v.14+v.16+v.17+v.18+v.19+v.20+v.38
> f:=(22)*y[8]+(42)*y[14]+(16)*y[16]+(2)*y[17]+(30)*y[18]+(30)*y[19]
+(2)*y[20]+(16)*y[38];
(22)*v.128+(42)*v.134+(16)*v.136+(2)*v.137+(30)*v.138+(30)*v.139
+(2)*v.140+(16)*v.158
> e*f;
(32)*v.241+(48)*v.242+(64)*v.243+(96)*v.244+(78)*v.245+(60)*v.246
+(42)*v.247+(22)*v.248
> h:=e*f;;
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 22 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 22 over Rationals>,
  (dimension 5)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.8+v.14+v.16+v.17+v.18+v.19+v.20+v.38,
v.99+(-1)*v.107+(-1)*v.108, v.116,
v.118, v.120 ]
> h*Bz[2];
(14)*v.99+(-14)*v.107+(-14)*v.108
> h*Bz[3];
(18)*v.116
> h*Bz[4];
(18)*v.118
> h*Bz[5];
(22)*v.120
```

Les poids de z sont 2,14,18,18,22; d'où $m_r = 22$. Il y a deux matrices à étudier.

```
(a)  $m_{i_2} = 14, m_{k(2)} = 10$ 
> h*Bg[11];
(10)*v.83+(10)*v.89
```

```

> h*Bg[12];
(10)*v.86+(-10)*v.93
> h*Bg[13];
(10)*v.74+(-10)*v.77+(-10)*v.90+(20)*v.97

> ((f*Bg[13])*Bz[2]);
(-70)*v.120
(b)  $m_{i_3} = 18, m_{k(3)} = 6$ 
> h*Bg[6];
(6)*v.47+(-12)*v.50+(-6)*v.58+(6)*v.59+(12)*v.61+(18)*v.63
> h*Bg[7];
(6)*v.36+(-6)*v.49+(-3)*v.54+(3)*v.64+(-3)*v.66+(-9)*v.69

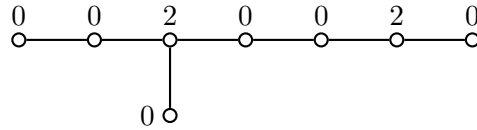
> ((f*Bg[6])*Bz[3]); ((f*Bg[7])*Bz[3]);
(-12)*v.120
0*v.1
> ((f*Bg[6])*Bz[4]); ((f*Bg[7])*Bz[4]);
0*v.1
(6)*v.120

```

La matrice à étudier est $\begin{bmatrix} -12\alpha & 6\beta \end{bmatrix}$; elle est de rang 1 si le couple (α, β) est non nul.

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

8. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```

> e:=x[14]+x[15]+x[16]+x[17]+x[18]+x[19]+x[20]+x[38];
v.14+v.15+v.16+v.17+v.18+v.19+v.20+v.38
> f:=(18)*y[14]+(18)*y[15]+(8)*y[16]+(8)*y[17]+(14)*y[18]+(20)*y[19]
+(14)*y[20]+(20)*y[38];
(18)*v.134+(18)*v.135+(8)*v.136+(8)*v.137
+(14)*v.138+(20)*v.139+(14)*v.140+(20)*v.158
> e*f;
(28)*v.241+(42)*v.242+(56)*v.243+(84)*v.244
+(68)*v.245+(52)*v.246+(36)*v.247+(18)*v.248
> h:=e*f;;

```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 24 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 24 over Rationals>,
  (dimension 4)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.14+v.15+v.16+v.17+v.18+v.19+v.20+v.38, v.111+v.112, v.119, v.120 ]
> h*Bz[2];
(14)*v.111+(14)*v.112
> h*Bz[3];
(18)*v.119
> h*Bz[4];
(18)*v.120
```

Les poids de z sont 2,14,18,18; d'où $m_r = 18$. Il y a deux matrices à étudier.

```
(a)  $m_{i_2} = 14, m_{k(2)} = 6$ 
> h*Bg[5];
(6)*v.58+(-6)*v.59+(6)*v.60+(-6)*v.63
> h*Bg[6];
(6)*v.49+(6)*v.64+(6)*v.65+(-6)*v.66+(-6)*v.67+(6)*v.68
> h*Bg[7];
(6)*v.64+(12)*v.65+(-6)*v.66+(-6)*v.67+(12)*v.68+(-6)*v.69
> h*Bg[8];
(6)*v.53+(-6)*v.55+(-6)*v.56+(-6)*v.71+(-6)*v.72+(6)*v.73
> h*Bg[9];
(6)*v.60+(-3)*v.61+(-3)*v.62+(-3)*v.63+(-3)*v.78

> ((f*Bg[5])*Bz[2]);
(14)*v.119
> ((f*Bg[6])*Bz[2]);
0*v.1
> ((f*Bg[7])*Bz[2]);
(14)*v.120
> ((f*Bg[8])*Bz[2]);
0*v.1
> ((f*Bg[9])*Bz[2]);
(7)*v.119
```

La matrice à étudier est

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & \end{bmatrix}.$$

C'est clairement une matrice de rang 2.

(b) $m_{i_3} = 18, m_{k(3)} = 2$

> h*Bg[2];

$$(2)*v.7+(-10)*v.10+(8)*v.11+(2)*v.12 \\ +(-4)*v.29+(2)*v.30+(-4)*v.31+(-4)*v.33$$

> h*Bg[3];

$$(2)*v.14+(2)*v.15+(2)*v.16+(2)*v.17 \\ +(2)*v.18+(2)*v.19+(2)*v.20+(2)*v.38$$

> ((f*Bg[1])*Bz[3]); ((f*Bg[2])*Bz[3]); ((f*Bg[3])*bz[3]);

$$(-18/5)*v.120$$

$$0*v.1$$

$$(-18)*v.119$$

> ((f*Bg[1])*Bz[4]); ((f*Bg[2])*Bz[4]); ((f*Bg[3])*Bz[4]);

$$0*v.1$$

$$(18)*v.119$$

$$(-18)*v.120$$

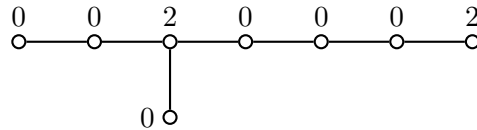
La matrice à étudier est

$$\begin{bmatrix} 0 & 18\beta & -18\alpha \\ -18/5\alpha & 0 & -18\beta \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice de rang 2 pour tout couple (α, β) non nul.

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

9. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

> e:=x[15]+x[16]+x[17]+x[18]+x[19]+x[20]+x[38]+x[46];

$$v.15+v.16+v.17+v.18+v.19+v.20+v.38+v.46$$

> f:=(8)*y[8]+(16)*y[15]+(2)*y[16]+(12)*y[17]+(2)*y[18]+(12)*y[19] \\ +(22)*y[20]+(-14)*y[28]+(8)*y[38]+(14)*y[46];

$$(8)*v.128+(16)*v.135+(2)*v.136+(12)*v.137+(2)*v.138+(12)*v.139 \\ +(22)*v.140+(-14)*v.148+(8)*v.158+(14)*v.166$$

```

> e*f;
(24)*v.241+(36)*v.242+(48)*v.243+(72)*v.244+(58)*v.245+(44)*v.246
+(30)*v.247+(16)*v.248
>h:=e*f;;

```

Il faut préciser pour cette orbite qu'avec les conventions de [9], l'élément X_{47} correspond à l'élément $x[46]=v.46$ du logiciel, c'est pourquoi la définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet est bien en accord avec [9].

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```

> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 28 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 28 over Rationals>,
  (dimension 3)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.15+v.16+v.17+v.18+v.19+v.20+v.38+v.46, v.119, v.120 ]
> h*Bz[2];
(14)*v.119
> h*Bz[3];
(16)*v.120

```

Les poids de z sont 2,14,16; d'où $m_r = 16$. Il n'y a qu'une matrice à étudier.

```

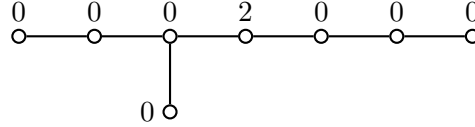
(a)  $m_{i_2} = 14, m_{k(2)} = 4$ 
> h*Bg[3];
(4)*v.37
> h*Bg[6];
(4)*v.42+(-8)*v.44+(4)*v.45+(4)*v.48+(-4)*v.53+(4)*v.55
> h*Bg[7];
(4)*v.32+(2)*v.47+(2)*v.51+(2)*v.52+(4)*v.59
> h*Bg[8];
(4)*v.36+(-4)*v.40+(-8)*v.49+(-4)*v.54+(4)*v.57+(-4)*v.64+(4)*v.66

> ((f*Bg[8])*Bz[2]);
(-28)*v.120

```

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

10. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[12]+x[21]+x[30]+x[31]+x[33]+x[42]+x[43]+x[53];
v.12+v.21+v.30+v.31+v.33+v.42+v.43+v.53
> f:=(5)*y[12]+y[21]+(5)*y[30]+(2)*y[31]+(8)*y[33]+(2)*y[42]+(8)*y[43]
+(9)*y[53];
(5)*v.132+v.141+(5)*v.150+(2)*v.151+(8)*v.153+(2)*v.162+(8)*v.163+(9)*v.173
> e*f;
(16)*v.241+(24)*v.242+(32)*v.243+(48)*v.244+(40)*v.245+(30)*v.246
+(20)*v.247+(10)*v.248
> h:=e*f;;
```

Ici encore, il faut préciser que l'élément X_{32} correspond à l'élément $x[31]=v.31$ du logiciel et la définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet est bien en accord avec [9].

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 40 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 40 over Rationals>,
  (dimension 5)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));;
```

Les poids de z sont 2,10,10,10,10; d'où $m_r = 10$. Il n'y a qu'une matrice à étudier.

```
(a)  $m_{i_2} = 10, m_{k^{(2)}} = 2$ 
> ((f*Bg[1])*Bz[2]); ((f*Bg[2])*Bz[2]); ((f*Bg[3])*Bz[2]);
((f*Bg[4])*Bz[2]); ((f*Bg[5])*Bz[2]); ((f*Bg[6])*Bz[2]);
((f*Bg[7])*Bz[2]); ((f*Bg[8])*Bz[2]);
((f*Bg[9])*Bz[2]); ((f*Bg[10])*Bz[2]);
0*v.1
0*v.1
0*v.1
(-5)*v.120
(-10)*v.117
0*v.1
0*v.1
```

```

(-5)*v.118
0*v.1
(-10/3)*v.119
> ((f*Bg[1])*Bz[3]); ((f*Bg[2])*Bz[3]); ((f*Bg[3])*Bz[3]);
((f*Bg[4])*Bz[3]); ((f*Bg[5])*Bz[3]); ((f*Bg[6])*Bz[3]);
((f*Bg[7])*Bz[3]); ((f*Bg[8])*Bz[3]);
((f*Bg[9])*Bz[3]); ((f*Bg[10])*Bz[3]);
0*v.1
(-2)*v.118
(-2)*v.120
(-2)*v.117
(-8)*v.118
0*v.1
0*v.1
v.120
(4/3)*v.119
0*v.1
> ((f*Bg[1])*Bz[4]); ((f*Bg[2])*Bz[4]); ((f*Bg[3])*Bz[4]);
((f*Bg[4])*Bz[4]); ((f*Bg[5])*Bz[4]); ((f*Bg[6])*Bz[4]);
((f*Bg[7])*Bz[4]); ((f*Bg[8])*Bz[4]);
((f*Bg[9])*Bz[4]); ((f*Bg[10])*Bz[4]);
(-1)*v.119
0*v.1
0*v.1
0*v.1
(-9)*v.119
0*v.1
(-2)*v.118
0*v.1
(-2)*v.120
(2)*v.117
> ((f*Bg[1])*Bz[5]); ((f*Bg[2])*Bz[5]); ((f*Bg[3])*Bz[5]);
((f*Bg[4])*Bz[5]); ((f*Bg[5])*Bz[5]); ((f*Bg[6])*Bz[5]);
((f*Bg[7])*Bz[5]); ((f*Bg[8])*Bz[5]);
((f*Bg[9])*Bz[5]); ((f*Bg[10])*Bz[5]);
0*v.1
(-2)*v.120
0*v.1
v.118
(-8)*v.120
(-2)*v.118
(4/3)*v.119

```


(-2)*v.117

0*v.1

0*v.1

La matrice à étudier est de taille 4×10 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\beta & -10\alpha & 0 & 0 & -2\delta & 0 & 2\gamma \\ 0 & -2\beta & 0 & \delta & -8\beta & -2\delta & -2\gamma & -5\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0 & -9\gamma & 0 & 4/3\delta & 0 & 4/3\beta & -10/3\alpha \\ 0 & -2\delta & -2\beta & -5\alpha & -8\delta & 0 & 0 & \beta & -2\gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Une étude élémentaire permet de voir que cette matrice est de rang 4, pour tout 4-uplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ non nul.

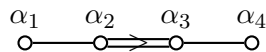
Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

Conclusion pour E_8 : Toutes les orbites nilpotentes distinguées non régulières de E_8 vérifient la propriété (P_1) .

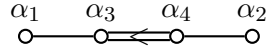
3.3.4. Calculs pour F_4 . — Définition de L :

```
> L:=SimpleLieAlgebra("F",4,Rationals);
<Lie algebra of dimension 52 over Rationals>
> R:=RootSystem(L);
<root system of rank 4>
> P:=PositiveRoots(R);;
> x:=PositiveRootVectors(R);
[ v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6,
v.7, v.8, v.9, v.10, v.11, v.12,
v.13, v.14, v.15, v.16, v.17, v.18,
v.19, v.20, v.21, v.22, v.23, v.24 ]
> y:=NegativeRootVectors(R);
[ v.25, v.26, v.27, v.28, v.29, v.30,
v.31, v.32, v.33, v.34, v.35, v.36,
v.37, v.38, v.39, v.40, v.41, v.42,
v.43, v.44, v.45, v.46, v.47, v.48 ]
> CanonicalGenerators(R)[3];
[ v.49, v.50, v.51, v.52 ]
```

Dans F_4 , il y a trois orbites nilpotentes distinguées non régulières. Pour F_4 , les conventions du logiciel GAP4 sont très différentes de celles adoptées dans [9]; dans [9], le diagramme de Dynkin est :

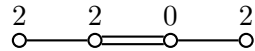


Il semble que dans GAP4 le diagramme de Dynkin soit plutôt le suivant :



Par conséquent, il est difficile d'utiliser directement les données de [9] dans GAP4. On utilise les correspondances suivantes : $x[1]=X_4$, $x[2]=X_1$, $x[3]=X_3$, $x[4]=X_1$, $x[5]=X_7$, $x[6]=X_5$, $x[6]=X_5$, $x[7]=X_6$, $x[8]=X_{10}$, $x[9]=X_8$, $x[10]=X_9$, $x[18]=X_{18}$. Cependant, même avec ces relations, les \mathfrak{sl}_2 -triplets de [9] ne conviennent pas. On utilise la commande `FindSl2` qui permet de chercher une sous-algèbre \mathfrak{s} isomorphe à \mathfrak{sl}_2 et contenant \mathbf{e} . On s'assure auparavant que l'élément \mathbf{e} est bien nilpotent à l'aide de la commande `IsNilpotentElement` et on vérifie aussi que le \mathfrak{sl}_2 -triplet obtenu correspond bien à la caractéristique voulue.

1. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[2]+x[4]+x[5]+x[7];
v.2+v.4+v.5+v.7
> IsNilpotentElement(L,e);
true
> s:=FindSl2(L,a);
<Lie algebra of dimension 3 over Rationals>
> Bs:=BasisVectors(Basis(s));
[ v.2+v.4+v.5+v.7, v.49+(7/5)*v.50+(9/5)*v.51+(13/5)*v.52,
  v.25+(7/5)*v.26+v.28+v.29+(4/5)*v.31+(-4/5)*v.34 ]
```

L'élément central de cette base est égal au dixième de l'élément neutre correspondant à la caractéristique ; par suite en prenant pour \mathbf{f} dix fois le troisième élément de cette base, on obtient un \mathfrak{sl}_2 -triplet pour cette caractéristique.

```
> h:=(14)*H[2]+(26)*H[4]+(18)*H[3]+(10)*H[1];
(10)*v.49+(14)*v.50+(18)*v.51+(26)*v.52
> f:=(10)*y[1]+(14)*y[2]+(10)*y[4]+(10)*y[5]+(8)*y[7]+(-8)*y[10];
(10)*v.25+(14)*v.26+(10)*v.28+(10)*v.29+(8)*v.31+(-8)*v.34
> e*f;
(10)*v.49+(14)*v.50+(18)*v.51+(26)*v.52
```

Calcul de \mathbf{g} , \mathbf{Bg} , \mathbf{z} et \mathbf{Bz} :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
```

```

<Lie algebra of dimension 6 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 6 over Rationals>,
(dimension 3 )>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.2+v.4+v.5+v.7, v.20+v.21+(2)*v.22, v.24 ]
> h*Bz[2];
(10)*v.20+(10)*v.21+(20)*v.22
> h*Bz[3];
(14)*v.2

```

Les poids de z sont 2,10,14; d'où $m_r = 14$. Il n'y a qu'une matrice à étudier.

```

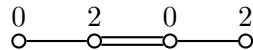
(a)  $m_{i_2} = 10, m_{k(2)} = 6$ 
> h*Bg[3];
(6)*v.11+(6)*v.14+(-12)*v.15+(6)*v.16

> ((f*Bg[3])*Bz[2]);
(30)*v.24

```

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

2. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```

> e:=x[1]+x[6]+x[5]+x[10];
v.1+v.5+v.6+v.10
> IsNilpotentElement(L,e);
true
> s:=FindSl2(L,e);
<Lie algebra of dimension 3 over Rationals>
> Bs:=BasisVectors(Basis(s));
[ v.1+v.5+v.6+v.10, v.49+(5/4)*v.50+(7/4)*v.51+(5/2)*v.52,
v.25+v.29+(5/2)*v.30+v.31+v.33+(5/2)*v.34 ]

```

L'élément central de cette base est égal au huitième de l'élément neutre de la caractéristique. Ici $Bs[1]*Bs[3]=2*Bs[2]$; on prend alors pour f quatre fois le troisième élément de cette base.

```

> h:=(10)*H[2]+(20)*H[4]+(14)*H[3]+(8)*H[1];
(8)*v.49+(10)*v.50+(14)*v.51+(20)*v.52

```

```
> f:=(4)*y[1]+(4)*y[5]+(10)*y[6]+(4)*y[7]+(4)*y[9]+(10)*y[10];
(4)*v.25+(4)*v.29+(10)*v.30+(4)*v.31+(4)*v.33+(10)*v.34
> e*f;
(8)*v.49+(10)*v.50+(14)*v.51+(20)*v.52
```

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 8 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 8 over Rationals>,
(dimension 3)>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.1+v.5+v.6+v.10, v.23, v.24 ]
> h*Bz[2];
(10)*v.23
> h*Bz[3];
(10)*v.24
```

Les poids de z sont 2,10,10; d'où $m_r = 10$. Il n'y a qu'une matrice à étudier.

```
(a)  $m_{i_2} = 10, m_{k(2)} = 2$ 
> h*Bg[2];
(2)*v.4+(2)*v.5+(2)*v.6+(-2)*v.7+(2)*v.10
> h*Bg[3];
(2)*v.5+(2)*v.9+(-2)*v.13
> h*Bg[4];
(4)*v.8+(4)*v.11+(-4)*v.12+(-4)*v.14+(-4)*v.16

> ((f*Bg[1])*Bz[2]); ((f*Bg[2])*Bz[2]); ((f*Bg[3])*Bz[2]);
(-8)*v.23
(-2)*v.23
(-2)*v.24
> ((f*Bg[1])*Bz[3]); ((f*Bg[2])*Bz[3]); ((f*Bg[3])*Bz[3]);
(-2)*v.23
(2)*v.23+(-10)*v.24
(-8)*v.24
```

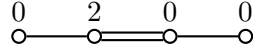
La matrice à étudier est

$$\begin{bmatrix} -8\alpha - 2\beta & -2\alpha + 2\beta & 0 \\ 0 & -10\beta & -2\alpha - 8\beta \end{bmatrix}.$$

Une brève étude de cette matrice montre qu'elle est de rang 2 pour tout couple (α, β) non nul.

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

3. Caractéristique :



Définition du \mathfrak{sl}_2 -triplet :

```
> e:=x[9]+x[10]+x[8]+x[18];
v.8+v.9+v.10+v.18
> f:=2*y[9]+2*y[10]+2*y[8]+2*y[18];
(2)*v.32+(2)*v.33+(2)*v.34+(2)*v.42
> e*f;
(4)*v.49+(6)*v.50+(8)*v.51+(12)*v.52
> h:=e*f;;
```

Pour cette orbite, les données de [9] conviennent, pour des raisons qui m'échappent.

Calcul de g , Bg , z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 12 over Rationals>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in <Lie algebra of dimension 12 over Rationals>,
(dimension 3 )>
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.8+v.9+v.10+v.18, v.23, v.24 ]
> h*Bz[2];
(6)*v.23
> h*Bz[3];
(6)*v.24
```

Les poids de z sont 2,6,6 ; d'où $m_r = 6$. Il n'y a qu'une matrice à étudier.

```
(a)  $m_{i_2} = 16, m_{k(2)} = 2$ 
> h*Bg[1]; h*Bg[2]; h*Bg[3]; h*Bg[4]; h*Bg[5];
(2)*v.8+(2)*v.9
(2)*v.4+(-1)*v.11+v.12
(2)*v.12+(-2)*v.13
(2)*v.6+(-1)*v.7+v.14
(2)*v.14+(-2)*v.15
> h*Bg[7];
(2)*v.10+(2)*v.18
```

```

> ((f*Bg[1])*Bz[2]); ((f*Bg[2])*Bz[2]); ((f*Bg[3])*Bz[2]);
((f*Bg[4])*Bz[2]); ((f*Bg[5])*Bz[2]); ((f*Bg[7])*Bz[2])
(-4)*v.23
(-2)*v.24
(-2)*v.24
0*v.1
0*v.1
(-2)*v.23

```

```

> ((f*Bg[1])*Bz[3]); ((f*Bg[2])*Bz[3]); ((f*Bg[3])*Bz[3]);
((f*Bg[4])*Bz[3]); ((f*Bg[5])*Bz[3]); ((f*Bg[7])*Bz[3])
(-4)*v.24
0*v.1
0*v.1
(-2)*v.23
(-2)*v.23
(-2)*v.24

```

La matrice à étudier est

$$\begin{bmatrix} -4\alpha & 0 & 0 & -2\beta & -2\beta & -2\alpha \\ -4\beta & -2\alpha & -2\alpha & 0 & 0 & -2\beta \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice de rang 2 pour tout couple (α, β) non nul.

Conclusion : Cette orbite vérifie la propriété (P_1) .

Conclusion pour F_4 : Toutes les orbites nilpotentes distinguées non régulières de F_4 vérifient la propriété (P_1) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI. *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4, 5, 6*. Masson, 1981.
- [2] R. BRYLINSKI and B. KOSTANT. *Nilpotent Orbits, Normality, and Hamiltonian Groups Actions*. J. Amer. Math. Soc, **7** (1994), 269-298.
- [3] R. BRYLINSKI and B. KOSTANT. *The Variety of all Invariant Symplectic Structures on a Homogeneous Space and Normalisers of Isotropy Subgroups*. Symplectic Geometry and Mathematical Physics, **99** (1991), 80-113.
- [4] J. Y. CHARBONNEL. *Propriété (Q) et (C). Variété Commutante*. Bulletin de la S.M.F, **132** (2004), 477-508.
- [5] D. H. COLLINGWOOD and W. M. MCGOVERN. *Nilpotent Orbits in Semi-simple Lie Algebra*. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, 1992.
- [6] V. DERGACHEV and A. KIRILLOV. *Index of Lie Algebras of Type Seaweed*. J. of Lie Theory, **10** (2000), 331-343.
- [7] J. DIXMIER. *Enveloping Algebras*. Grad. Stud. Math. Amer. Math. Soc., **11** (1996).
- [8] J. DIXMIER. *Champs de Vecteurs Adjointes sur les Groupes et Algèbres de Lie Semi-simples*. J. Reine Angew. Math., **309** (1979), 183-190.
- [9] C. QUITTÉ G. GRÉLAUD and P. TAUVEL. *Bases de Chevalley et \mathfrak{sl}_2 -Triplets des Algèbres de Lie Simples Exceptionnelles*. Université de Poitiers, 1980.
- [10] R. HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, **52** (1977).

- [11] A. JOSEPH. *On Semi-Invariant and Index for Biparabolic (Seaweed) Algebras*, I. Journal of Algebra, à paraître (2006).
- [12] V. G . KAC. *Some Remarks on Nilpotent Orbits*. Journal of Algebra, **64** (1980), 190-213.
- [13] A. W. KNAPP. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Birkhäuser, 2002.
- [14] Y. KOSMANN and S. STERNBERG. *Conjugaison des Sous-Algèbres d'Isotropie*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser., 1974.
- [15] J. F. KURTZKE. *Centralizers of Irregular Elements in Reductive Algebraic Groups*. Pacific Journal of Mathematics, **104** (1983), 133-154.
- [16] J. F. KURTZKE. *Centers of Centralizers in Reductive Algebraic Groups*. Comm. Algebra, **19** (1994), 3393-3410.
- [17] T. LEVASSEUR and J. T. STAFFORD. *The Kernel of an Homomorphism of Harish-Chandra*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, **29** (1996), 385-397.
- [18] A. MOREAU. *Indice du Normalisateur du Centralisateur d'un Élément Nilpotent dans une Algèbre de Lie Semi-Simple*. Bulletin de la S.M.F, **134** (1) (2006), 83-117.
- [19] A. MOREAU. *Calculs Explicites dans une Algèbre de Lie Semi-Simple Effectués avec GAP4*. arXiv :math.RT/0503019, 2004.
- [20] A. MOREAU. *Indice et Décomposition de Cartan*. Journal of Algebra, **303** (1) (2006), 382-406.
- [21] D. I. PANYUSHEV. *Inductive Formulas for the Index of Seaweed Lie Algebras*. Moscow Math. Journal, **1(2)** (2001), in press.
- [22] D. I. PANYUSHEV. *The Index of a Lie Algebra, the Centraliser of a Nilpotent Element, and the Normaliser of the Centraliser*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **134(1)** (2003), 41-59.
- [23] M. RAÏS. *Notes sur l'Indice des Algèbres de Lie*. Preprints arXiv :math.RT/0605499 et arXiv :math.RT/0605500.
- [24] M. RAÏS. *L'Indice des Produits Semi-Directs $E \times_{\rho} \mathfrak{g}$* . C.R.A.S. Paris, Ser. A, 1978.
- [25] M. RAÏS. *La Représentation Coadjointe du Groupe Affine*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **28,1** (1978), 207-237.

- [26] R. W. RICHARDSON. *Deformation of Lie Subgroups and the Varieties of Isotropic Subgroups*. Acta Mathematica, **129** (1972), 35-73.
- [27] R. STEINBERG. *Regular Element of Semisimple Algebraic Groups*. Publ. Math. I. H. E. S., **25** (1965), 49-80.
- [28] P. TAUVEL. *Sur les Éléments Réguliers dans les Algèbres de Lie Réductives*. Bull. Soc. Math., **113** (1989), 51-83.
- [29] P. TAUVEL and R. W. T. YU. *Lie Algebras and Algebraic Groups*. Springer-Verlag, 2005.
- [30] P. TAUVEL and R. W. T. YU. *Indice et Formes Linéaires Stables dans une Algèbre de Lie*. Journal of Algebra, **273** (2) (2004), 507-516.
- [31] P. TAUVEL and R. W. T. YU. *Sur l'indice de certaines algèbres de Lie*. Annales de l'Institut Fourier, Université Joseph Fourier de Grenoble, **54**(6) (2004).
- [32] G. WARNER. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*. Springer-Verlag, 1972.
- [33] O. YAKIMOVA. *Centres of Centralisers in the Classical Lie Algebras*. Preprint, 2006.
- [34] O. YAKIMOVA. *The Index of Centralisers of Elements in Classical Lie Algebras*. Funct. Analysis and its Applications, **40** (2006) 42-51.