

**THÈSE**  
pour l'obtention du Grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS**

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques (S2IM)

Secteur de Recherche : Mathématiques et leurs Interactions

Présentée par :

**Guilnard SADAKA**

---

**Paires admissibles d'une algèbre de Lie simple complexe et  
 $W$ -algèbres finies.**

---

Directeurs de thèse : **Anne MOREAU, Rupert W.T. YU**

Soutenue le 6 décembre 2013  
devant la commission d'examen

**JURY**

<b>K. BAUR</b>	Professor, Universität Graz	Examineur
<b>S. GOODWIN</b>	Senior Lecturer, University of Birmingham	Rapporteur
<b>C. GRUSON</b>	Professeur, Université de Nancy	Rapporteur
<b>A. MOREAU</b>	Maître de conférences, Université de Poitiers	Directeur
<b>P. VANHAECKE</b>	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
<b>R.W.T. YU</b>	Professeur, Université de Reims	Directeur



*« Work is love made visible. And if you can't work with love, but only with distaste,  
it is better that you should leave your work and sit at the gate of the temple and  
take alms of the people who work with joy. »*  
~ *Gibran Khalil Gibran* ~

*À la mémoire de mon père et mon grand-père...*



## Remerciements

À l'issue de cette thèse, je me réjouis de remercier les nombreuses personnes qui m'ont encouragée, soutenue et réconfortée au long de toutes ces années.

Je voudrais commencer par la personne à qui je dois la vie : ma mère. Sans tes sacrifices, tes encouragements et tes prières, je n'aurais jamais pu ni franchir cette étape de ma vie ni concrétiser cette ambition. Je te remercie pour ta présence ; ma plus grande fierté dans la vie, c'est d'être ta fille.

Le remerciement suivant revient tout justement à Rupert et Anne, mes directeurs de thèse. Je ne peux qu'avouer que je suis chanceuse d'avoir des directeurs de thèse aussi exceptionnels que vous. Grâce à vous j'ai beaucoup appris et j'ai pu mener à bien la thèse grâce à vos compétences et qualités. Rupert, pour ta patience, ta gentillesse, tes conseils, merci ! Anne, pour ta disponibilité, ton enthousiasme, ton soutien, merci ! Pour votre amitié, encore merci...

Je tiens à remercier le CNRS libanais pour m'avoir accordé la bourse doctorale pour les trois années de ma thèse. Plus particulièrement, toute ma reconnaissance va à M. Charles Tabet pour son soutien et ses encouragements.

Je voudrais témoigner ma gratitude à Caroline Gruson et Simon Goodwin d'avoir eu la gentillesse d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Simon pour les différents échanges qu'on a eus lors de séminaires et notamment pour son intérêt envers mes travaux qui ont abouti, d'une manière ou d'une autre, grâce à ses orientations.

Je remercie Karin Baur et Pol Vanhaecke, les examinateurs de cette thèse. De plus, je remercie Pol pour sa sympathie envers les doctorants et les autres membres du laboratoire.

Je voudrais remercier aussi Hervé Sabourin pour avoir guidé mes premiers pas dans la recherche en dirigeant mon mémoire de Master.

L'ambiance de travail au LMA est incomparable, et ce, grâce au personnel IA-TOSS : Brigitte, Nathalie, Jocelyne, Nathalie et Benoit. Je ne peux oublier mes anciens et actuels collègues avec qui j'ai vécu au LMA, avec qui j'ai travaillé, et de qui j'ai beaucoup appris...

Un remerciement plus particulier à Paola et Yasmine... Ensemble on a partagé joies et beaux souvenirs, et on a eu beaucoup de fous rires qui ont rendu les derniers mois de la thèse plus agréables et moins stressants. Une grande amitié se doit d'être mentionnée. Je pense à Batoul qui a toujours été à l'écoute, qui a toujours ajouté par sa bonne humeur, de la joie et de l'optimisme, même à distance.

Mon séjour à Poitiers n'aurait jamais été le même sans l'accueil chaleureux des différents membres des communautés locales de Sainte-Radegonde et de la cathédrale Saint-Pierre et Saint-Paul : Père Boinot, Père Blanchard, Madame Habert, Marie-Catherine, Marie, Sylvianne, Annette, Henriette, Gérard, Monique... Mon intégration parmi vous fut d'un soutien spirituel primordial, je vous en remercie.

Je ne peux certainement pas oublier la communauté libanaise de Poitiers. Il est vrai qu'on vient de différentes régions libanaises, mais on s'est constitué une petite famille qui prend soin de chacun de ses membres ici, là où on est loin de nos vraies familles. Je pense à ceux qui sont encore là, mais aussi à ceux qui sont déjà partis, vos présences ont facilité mon séjour « à l'étranger ».

Je remercie mes deux frères Bernard et Richard. Chacun d'eux a su apporter, à sa manière, le réconfort et les encouragements pendant les moments difficiles de

mon séjour en France. Je pense aussi à tous les membres de ma famille et à tous mes amis, qui m'ont toujours témoigné leur affection sans se soucier de la distance qui nous sépare.

Pour vous tous, un grand merci...

*Guilnard*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Graduations et paires admissibles</b>	<b>9</b>
1.1 Notations . . . . .	9
1.2 Définitions et exemples . . . . .	10
1.3 Premières propriétés . . . . .	14
1.4 Caractérisation des graduations admissibles . . . . .	18
1.4.1 Description via les racines simples . . . . .	18
1.4.2 Caractérisation . . . . .	19
<b>2 <math>W</math>-algèbres finies associées aux paires admissibles</b>	<b>25</b>
2.1 Construction . . . . .	25
2.2 Analogie de la tranche de Slodowy . . . . .	26
2.3 Filtration de Kazhdan généralisée . . . . .	30
2.4 Théorème principal . . . . .	35
<b>3 Problème d'isomorphisme</b>	<b>43</b>
3.1 Relation d'équivalence sur les paires admissibles et isomorphisme . . .	43
3.2 Connexité des graduations admissibles . . . . .	48
3.2.1 Graduations adjacentes et connexes . . . . .	48
3.2.2 Connexité . . . . .	49
3.3 Conséquences . . . . .	56
<b>4 Classification dans quelques cas particuliers</b>	<b>59</b>
4.1 Description des éléments nilpotents pour lesquels $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ . . . . .	59
4.1.1 Cas classiques . . . . .	59
4.1.2 Cas exceptionnels . . . . .	61
4.2 Quelques outils techniques . . . . .	61
4.3 Cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ . . . . .	65
4.3.1 Étude des valeurs propres de $\text{ad } h_{\Gamma}$ . . . . .	66
4.3.2 Équivalence des paires admissibles. . . . .	67
4.4 Cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ . . . . .	69
4.4.1 Étude des valeurs propres de $\text{ad } h_{\Gamma}$ . . . . .	71
4.4.2 Équivalence des paires $e$ -admissibles dans des cas particuliers .	73
4.5 Cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ . . . . .	78
4.5.1 Étude des valeurs propres de $\text{ad } h_{\Gamma}$ . . . . .	79
4.5.2 Équivalence des paires $e$ -admissibles dans des cas particuliers .	81
4.6 Cas où $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$ ou $\mathbf{E}_6$ . . . . .	81
<b>Bibliographie</b>	<b>87</b>



# Introduction

Ce mémoire s'inscrit dans la théorie de Lie et la théorie des représentations. Nous nous intéressons à une certaine classe de paires de sous-algèbres nilpotentes d'une algèbre de Lie simple, appelées *paires admissibles*, qui interviennent dans la construction des *W-algèbres finies* et de certaines de leurs généralisations.

## Historique

Depuis les travaux de Premet [21], l'étude des *W-algèbres finies* a connu un essor particulièrement intense, notamment en raison de leur importance dans la théorie des représentations comme l'illustre l'équivalence de Skryabin, [23]. Les *W-algèbres finies* sont certaines algèbres associatives non commutatives associées aux orbites nilpotentes d'une algèbre de Lie simple. On peut les voir comme les analogues de l'algèbre enveloppante pour la *tranche de Slodowy* des orbites en question. Elles furent introduites par Lynch dans le cas des éléments nilpotents pairs [20], généralisant ainsi la célèbre construction de Kostant, [18], correspondant au cas des éléments nilpotents réguliers. La définition pour le cas d'un élément nilpotent quelconque d'une algèbre de Lie simple est due à A. Premet, [21]. On renvoie le lecteur à [19] pour plus de précisions sur les liens entre la théorie des *W-algèbres finies* et la théorie des représentations.

## Construction des *W-algèbres finies*

Dans ce qui suit, sauf mention explicite du contraire,  $\mathbb{k}$  est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple de dimension finie définie sur  $\mathbb{k}$  et de groupe adjoint  $G$ . On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Comme celle-ci est non dégénérée sur  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ , elle induit un isomorphisme

$$\kappa : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad x \longmapsto \langle x, \cdot \rangle$$

de  $\mathfrak{g}$  sur son dual  $\mathfrak{g}^*$ . Soient  $e$  un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$  et  $\chi$  la forme linéaire  $\kappa(e)$ . D'après le Théorème de Jacobson-Morosov (cf. e.g. [24, Theorem 32.1.5]),  $e$  est contenu dans un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, h, f)$  de  $\mathfrak{g}$ . On rappelle qu'un tel triplet vérifie les relations :

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f.$$

De plus,  $e$  et  $f$  sont dans la même  $G$ -orbite et  $\text{ad } h$  est un élément semi-simple dont les valeurs propres sont entières. Ceci définit sur  $\mathfrak{g}$  une  $\mathbb{Z}$ -gradation appelée une *gradation de Dynkin associée à  $e$* . D'après Kostant, les graduations de Dynkin

## INTRODUCTION

associées à  $e$  sont ainsi conjuguées par un élément de  $G_e^0$  où  $G_e^0$  désigne la composante neutre du centralisateur de  $e$  dans  $G$  (cf. e.g. [24, Lemma 32.2.6]).

On pose

$$\mathfrak{p}_+ := \bigoplus_{j \geq 0} \mathfrak{g}(j)$$

où  $\mathfrak{g}(j) := \{x \in \mathfrak{g} ; [h, x] = jx\}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . Alors  $\mathfrak{p}_+$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  qui contient  $\mathfrak{g}^e$ , le centralisateur de  $e$  dans  $\mathfrak{g}$ . Il en résulte que la forme bilinéaire

$$\mathfrak{g}(-1) \times \mathfrak{g}(-1) \longrightarrow \mathbb{k}, \quad (x, y) \longmapsto \langle e, [x, y] \rangle$$

est non dégénérée. Soit  $\mathfrak{l}$  un sous-espace lagrangien de  $\mathfrak{g}(-1)$  relativement à cette forme, c'est-à-dire un sous-espace totalement isotrope de dimension maximale, et posons :

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e} := \mathfrak{l} \oplus \bigoplus_{j \leq -2} \mathfrak{g}(j). \quad (1)$$

Alors  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$  est une sous-algèbre ad-nilpotente de  $\mathfrak{g}$  qui vérifie  $\langle e, [\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}, \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}] \rangle = \{0\}$ . De plus,  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  et  $\dim \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e} = \frac{1}{2} \dim G \cdot e$  si  $G \cdot e$  désigne l'orbite de  $e$  dans  $\mathfrak{g}$  sous l'opération adjointe de  $G$ . On note  $U(\mathfrak{g})$  et  $U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e})$  les algèbres enveloppantes de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$  respectivement. Soient  $\mathbb{k}_e$  le  $U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e})$ -module à gauche correspondant au caractère  $\chi|_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}}$  de  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$  et  $I_{\mathfrak{l}, e}$  l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x - \chi(x)$  avec  $x \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$ . Soient

$$Q_{\mathfrak{l}, e} := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e})} \mathbb{k}_e \simeq U(\mathfrak{g})/I_{\mathfrak{l}, e}$$

la *représentation de Gelfand-Graev généralisée*, et  $H_{\mathfrak{l}, e}$  l'algèbre d'endomorphismes

$$H_{\mathfrak{l}, e} := Q_{\mathfrak{l}, e}^{\text{ad } \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}} \simeq \text{End}_{\mathfrak{g}}(Q_{\mathfrak{l}, e})^{\text{op}}. \quad (2)$$

L'algèbre  $H_{\mathfrak{l}, e}$  est appelée *W-algèbre finie associée à  $e$* . Il existe d'autres définitions équivalentes des *W-algèbres finies*. La définition ci-dessus est celle du modèle de Whittaker. Dans le cas où  $e$  est un élément nilpotent de  $\mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{k})$ , avec  $p, n \in \mathbb{N}^*$ , dont la partition associée est de la forme  $\underbrace{(n, \dots, n)}_{p \text{ fois}}$ , l'algèbre  $H_{\mathfrak{l}, e}$  est bien connue

et conduit à la *W-algèbre finie* considérée par [22] (voir aussi [4]) définie comme un quotient du Yangian  $Y_{p, n}$  associé à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{k})$ .

On peut généraliser les constructions de  $Q_{\mathfrak{l}, e}$  et  $H_{\mathfrak{l}, e}$  comme suit. À toute sous-algèbre ad-nilpotente  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions suivantes,

- ( $\chi$ 1)  $\chi([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = \{0\}$  ;
- ( $\chi$ 2)  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  ;
- ( $\chi$ 3)  $\dim \mathfrak{m} = (\dim G \cdot e)/2$ ,

on définit une algèbre d'endomorphismes  $H(\mathfrak{m}, e)$  suivant la construction (2). Précisément, on pose

$$H(\mathfrak{m}, e) := Q(\mathfrak{m}, e)^{\text{ad } \mathfrak{m}} \simeq \text{End}_{\mathfrak{g}}(Q(\mathfrak{m}, e))^{\text{op}},$$

où  $Q(\mathfrak{m}, e)$  est le quotient de  $U(\mathfrak{g})$  par l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x - \chi(x)$  avec  $x \in \mathfrak{m}$ . Nous dirons que  $H(\mathfrak{m}, e)$  est la *W-algèbre finie associée à  $\mathfrak{m}$* . Une question naturelle, soulevée par A. Premet, est la suivante :

**Question 1.** *Si  $\mathfrak{m}$  est une sous-algèbre ad-nilpotente de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions  $(\chi 1)$ ,  $(\chi 2)$  et  $(\chi 3)$ , les  $W$ -algèbres  $H(\mathfrak{m}, e)$  et  $H_{\mathfrak{t}, e} = H(\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}, e})$  sont-elles isomorphes ?*

Cette question est d'autant plus naturelle que la réponse est affirmative, d'après un résultat de Premet [21], dans le cas où le corps de base est de caractéristique positive. On précise ce résultat au paragraphe suivant.

**Remarque 1.** *Lorsque  $e$  est régulier, les sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions  $(\chi 1)$ ,  $(\chi 2)$  et  $(\chi 3)$  sont les sous-algèbres de la forme  $g(\mathfrak{m}_e)$  où  $g \in G_e^\circ$  et  $\mathfrak{m}_e := \bigoplus_{j \leq -2} \mathfrak{g}(j)$ , cf. e.g [1]. La réponse à la Question 1 est donc clairement affirmative dans ce cas.*

La  $W$ -algèbre  $H(\mathfrak{m}, e)$  dépend uniquement de l'orbite de  $e$  dans  $\mathfrak{g}$ , à conjugaison près. Comme  $e$  sera fixé dans la suite, nous noterons désormais plus simplement  $H(\mathfrak{m})$  et  $Q(\mathfrak{m})$  l'algèbre  $H(\mathfrak{m}, e)$  et le quotient  $Q(\mathfrak{m}, e)$  respectivement.

## Motivation : le cas de la caractéristique positive

Soient  $K$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $\mathfrak{g}_K$  une algèbre de Lie simple de dimension finie sur  $K$ . C'est une algèbre de Lie restreinte dont la  $p$ -structure est notée  $x \mapsto x^{[p]}$ . On suppose  $p$  suffisamment grand pour que la forme de Killing de  $\mathfrak{g}_K$ , que l'on note encore  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , soit non dégénérée et que  $p$  soit *bon* pour le système de racines de  $\mathfrak{g}_K$ . Soient  $G_K$  un groupe simple et simplement connexe tel que  $\text{Lie}(G_K) = \mathfrak{g}_K$  et  $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}_K)$  l'ensemble des éléments  $x \in \mathfrak{g}_K$  tels que  $x^{[p]} = 0$ . Fixons  $e \in \mathcal{N}_p(\mathfrak{g}_K)$  et posons  $\chi := \langle e, \cdot \rangle$ . Comme  $\mathfrak{g}_K$  est simple, la  $p$ -structure d'une sous-algèbre ad-nilpotente de  $\mathfrak{g}_K$  est nulle.

**Définition 1** (Premet, [21, Définition 2.3]). *Une sous-algèbre ad-nilpotente restreinte  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}_K$  est dite  $\chi$ -admissible si elle vérifie les conditions suivantes :*

- $(\chi 1)_p$   $\chi([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = \{0\}$  ;
- $(\chi 2)_p$   $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_K^e = \{0\}$  ;
- $(\chi 3)_p$   $\dim \mathfrak{m} = (\dim G_K \cdot \chi)/2$ .

Une construction similaire à la construction (2) montre qu'il existe des sous-algèbres ad-nilpotentes restreintes  $\chi$ -admissibles, cf. [21, §2.6]. À une telle sous-algèbre, on associe une algèbre d'endomorphismes en posant

$$H_\chi(\mathfrak{m}) := \text{End}_{\mathfrak{g}_K}(Q_\chi(\mathfrak{m}))^{\text{op}}$$

où  $Q_\chi(\mathfrak{m})$  est le  $U_\chi(\mathfrak{g}_K)$ -module induit  $U_\chi(\mathfrak{g}_K) \otimes_{U_\chi(\mathfrak{m})} K_\chi$ ,  $K_\chi$  le  $\mathfrak{m}$ -module de dimension 1 défini par le caractère  $\chi|_{\mathfrak{m}}$  de  $\mathfrak{m}$  et  $U_\chi(\mathfrak{g}_K)$ , l'algèbre enveloppante restreinte associée à  $\chi$ , c'est-à-dire le quotient de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g}_K)$  par l'idéal bilatère engendré par les éléments  $x^p - x^{[p]} - \chi(x)^p$  pour  $x \in \mathfrak{g}_K$ .

La Proposition 2.6 de [21], et les commentaires qui la suivent, montrent que  $H_\chi(\mathfrak{m})$  et  $Q_\chi(\mathfrak{m})$  ne dépendent pas du choix de la sous-algèbre ad-nilpotente restreinte  $\chi$ -admissible  $\mathfrak{m}$ , ce qui répond positivement à la Question 1 dans ce contexte<sup>1</sup>.

---

1. La définition [21, Définition 2.3] est plus générale ; le résultat que nous énonçons est a fortiori correct.

## Résultats connus en caractéristique nulle

Pour le cas où le corps de base est de caractéristique nulle, les résultats, partiels, obtenus jusqu'ici sont valables sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Ils sont essentiellement dûs à W. Gan et V. Ginzburg d'une part (cf. [11]) et à J. Brundan et S. Goodwin d'autre part (cf. [3]). On les résume ci-dessous. On suppose désormais que  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ .

Tout d'abord, W. Gan et V. Ginzburg montrent que l'algèbre  $H_{\mathfrak{l},e}$  ne dépend pas, à un isomorphisme près, du choix du sous-espace lagrangien  $\mathfrak{l}$  dans  $\mathfrak{g}(-1)$ , [11, Theorem 4.1].

**Remarque 2.** *Lorsque  $e$  est pair, i.e.,  $\mathfrak{g}(j) = \{0\}$  pour tout  $j$  impair, on a  $\mathfrak{l} = \{0\}$  et le résultat de Gan et Ginzburg est clair.*

On notera désormais plus simplement  $H_e$  l'algèbre  $H_{\mathfrak{l},e}$  (définie à un isomorphisme près). Plus récemment, J. Brundan et S. Goodwin étendent le résultat de Gan et Ginzburg comme suit. Soit  $\Gamma$  une  $2d$ -bonne  $\mathbb{Z}$ -graduation pour  $e$ , c'est-à-dire une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_{2d}$  et telle que l'application linéaire  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j+2d}$  est injective pour tout  $j \leq -d$  et surjective pour tout  $j \geq -d$  (cf. [3, §5] ou, ici, Remarque 3.3.8)<sup>2</sup>. Par exemple, les graduations de Dynkin sont 2-bonnes pour  $e$  mais ce ne sont pas les seules en général (cf. Remarque 1.2.8). Les 2-bonnes graduations furent introduites dans [16] puis classifiées par A. Elashvili et V. Kac dans [10]; voir aussi [2] pour le cas des 2-bonnes graduations paires. Comme  $\mathfrak{g}^e \subseteq \bigoplus_{j > -d} \mathfrak{g}_j$ , la forme bilinéaire

$$\mathfrak{g}_{-d} \times \mathfrak{g}_{-d} \longrightarrow \mathbb{k}, \quad (x, y) \longmapsto \langle e, [x, y] \rangle$$

est non dégénérée et, si  $\mathfrak{g}_{-d}^0$  est un sous-espace lagrangien de  $\mathfrak{g}_{-d}$ , alors

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{-d}^0 \oplus \bigoplus_{j < -d} \mathfrak{g}_j \tag{3}$$

est une sous-algèbre ad-nilpotente  $\Gamma$ -graduée de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions  $(\chi 1)$ ,  $(\chi 2)$  et  $(\chi 3)$  ci-dessus. Le résultat principal de [3] assure que les algèbres  $H(\mathfrak{m})$  et  $H_e$  sont isomorphes. En particulier, l'algèbre  $H(\mathfrak{m})$  ne dépend pas, à un isomorphisme près, du choix du sous-espace lagrangien  $\mathfrak{g}_{-d}^0$  dans  $\mathfrak{g}_{-d}$ .

## Paires et graduations admissibles

Il semble délicat de répondre de façon générale à la Question 1. Nous nous proposons d'étudier un problème plus abordable. Nous considérons une classe de sous-algèbres ad-nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions  $(\chi 1)$ ,  $(\chi 2)$ ,  $(\chi 3)$  et graduées relativement à certaines graduations de  $\mathfrak{g}$ . C'est une classe de sous-algèbres qui contient (strictement) la classe des sous-algèbres obtenues à partir de bonnes graduations pour  $e$  selon la construction (3). Précisons que l'étude des algèbres vérifiant les conditions  $(\chi 1)$ ,  $(\chi 2)$ ,  $(\chi 3)$  dans le cas général (où  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ) fut initiée par K. Baur, S. Ghandour et A. Moreau, [1].

---

2. Dans [3], les auteurs considèrent des bonnes  $\mathbb{R}$ -graduations qui se définissent de manière analogue.

La définition suivante est centrale dans ce mémoire (cf. Définition 1.2.1) :

**Définition 2.** Soient  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ . Nous dirons que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est **admissible pour  $e$**  (ou  **$e$ -admissible**) s'il existe une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  et un entier  $a > 1$  tels que :

- (A1)  $e \in \mathfrak{g}_a$ ;
- (A2)  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont  $\Gamma$ -graduées et  $\bigoplus_{j \leq -a} \mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \bigoplus_{j < 0} \mathfrak{g}_j$ ;
- (A3)  $\mathfrak{m}^\perp \cap [\mathfrak{g}, e] = [\mathfrak{n}, e]$ ;
- (A4)  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ ;
- (A5)  $[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ ;
- (A6)  $\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e$ .

Nous dirons qu'une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est **admissible pour  $e$**  s'il existe un entier  $a > 1$  tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et s'il existe une paire  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma$ .

Si  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est une paire  $e$ -admissible telle que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ , nous dirons que la sous-algèbre  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$  est **admissible pour  $e$** .

Une sous-algèbre  $e$ -admissible vérifie les conditions  $(\chi 1)$ ,  $(\chi 2)$  et  $(\chi 3)$  ci-dessus qui permettent de définir la  $W$ -algèbre associée. Plus généralement, la  $W$ -algèbre associée à une paire  $e$ -admissible  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est définie par

$$H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) := Q(\mathfrak{m})^{\text{ad } \mathfrak{n}}$$

où  $Q(\mathfrak{m})$  est le quotient de  $U(\mathfrak{g})$  par l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x - \chi(x)$  avec  $x \in \mathfrak{m}$ . Les  $2d$ -bonnes  $\mathbb{Z}$ -graduations pour  $e$  sont des cas particuliers de  $\mathbb{Z}$ -graduations admissibles pour  $e$  mais il existe des  $\mathbb{Z}$ -graduations admissibles pour  $e$  qui ne sont pas  $2d$ -bonnes pour  $e$  (voir Exemple 1.2.11).

**Remarque 3.** Lorsque  $e$  n'est pas régulier, il serait intéressant de savoir s'il existe des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions  $(\chi 1)$ ,  $(\chi 2)$  et  $(\chi 3)$  qui ne sont pas admissibles pour  $e$  au sens de la Définition 2.

Les résultats présentés dans ce mémoire portent d'une part sur les propriétés des paires et graduations  $e$ -admissibles, et d'autre part sur les propriétés des  $W$ -algèbres  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  associées, l'objectif étant d'apporter des avancées dans le problème posé par la Question 1.

## Principaux résultats obtenus

Les premiers résultats obtenus concernent des propriétés des graduations admissibles, analogues à celles des  $2d$ -bonnes graduations. Par exemple, lorsque  $e$  est distingué, les graduations de Dynkin sont les seules graduations, à homothéties près, admissibles pour  $e$  (cf. Proposition 1.3.3). De plus, elles admettent une description via les racines simples qui généralise [10, Theorem 1.2], cf. Théorème 1.4.1. Nous obtenons par ailleurs une caractérisation des graduations  $e$ -admissibles :

**Théorème 1** (Théorème 1.4.4). Une graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est admissible pour  $e$ , avec  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a > 1$ , si et seulement si  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ .

Nous nous intéressons ensuite à l'algèbre d'endomorphismes  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  associée à une paire admissible  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . Grâce aux propriétés de la Définition 2, nous adaptons certains arguments de [11] pour montrer que  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  possède des propriétés similaires à la  $W$ -algèbre  $H_e$ . Nous montrons qu'il existe une variété affine  $\mathcal{S}$ , transverse aux orbites coadjointes de  $\mathfrak{g}^*$ , qui peut être vue comme un analogue de la tranche de Slodowy associée à  $e$ . De plus, nous construisons une *filtration de Kazhdan généralisée*  $\mathcal{F}$  sur  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et nous obtenons le résultat suivant qui étend [11, Theorem 4.1].

**Théorème 2** (Théorèmes 2.4.2 et 2.4.9). *L'algèbre graduée  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ , l'algèbre des fonctions régulières définies sur  $\mathcal{S}$ . De plus, si  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ , on a l'équivalence de Skryabin pour  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ .*

Nous étudions alors le problème d'isomorphisme soulevé par la Question 1. Nous dirons que deux paires  $e$ -admissibles  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont **comparables** (cf. Définition 3.1.1) s'il existe une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\Gamma$  telle que  $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$  soient  $\Gamma$ -graduées et si,

$$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{n}' \subseteq \mathfrak{n} \text{ ou } \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}'.$$

Nous dirons que deux paires  $e$ -admissibles  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont **équivalentes** (cf. Définition 3.1.8) s'il existe un entier  $s \geq 1$  et une suite  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1), \dots, (\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s)$  de paires  $e$ -admissibles tels que :

- \*  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  ;
- \*  $(\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s) = (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  ;
- \*  $(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i)$  et  $(\mathfrak{m}_{i+1}, \mathfrak{n}_{i+1})$  soient comparables pour tout  $i \in \{1, \dots, s-1\}$ .

Nous montrons alors :

**Théorème 3** (Théorème 3.1.11). *Si  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont deux paires  $e$ -admissibles équivalentes, alors les algèbres  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $H(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont isomorphes.*

On introduit, en s'inspirant des constructions et définitions de [3], les notions de graduations  $e$ -admissibles adjacentes et connexes :

**Définition 3** (Définition 3.2.2). *Deux graduations  $\Gamma, \Gamma'$  admissibles pour  $e$  sont dites **adjacentes** si elles ont une paire  $e$ -admissible en commun.*

**Définition 4** (Définition 3.2.3). *Deux graduations  $\Gamma, \Gamma'$  admissibles pour  $e$  sont dites **connexes** s'il existe une suite  $(\Gamma_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  de graduations admissibles pour  $e$  telle que*

- (1)  $\Gamma = \Gamma_1$  ;
- (2) les graduations  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  sont adjacentes pour tout  $1 \leq i \leq s-1$  ;
- (3)  $\Gamma' = \Gamma_s$ .

La notion de graduation admissible pour  $e$  s'étend aux  $\mathbb{Q}$ -graduations. En utilisant un argument de contraction, nous montrons :

**Théorème 4** (Théorèmes 3.2.7 et 3.2.16). *Les graduations admissibles pour  $e$  sont connexes à une graduation de Dynkin. En particulier, elles sont connexes entre elles.*

Soit  $b > 0$ . Nous dirons qu'une  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  est  *$b$ -maximale* si  $\mathfrak{g}_{\leq -b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  et s'il existe  $a \in \mathbb{N}$ , avec  $a \geq 2$ , tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$  (cf. Définition 3.3.2). Observons qu'une graduation  $b$ -maximale est  $e$ -admissible. Si  $\Gamma$  est  $b$ -maximale, la paire  $(\mathfrak{g}_{< b-a}, \mathfrak{g}_{\leq -b})$  est  $e$ -admissible (cf. Corollaire 1.3.11) et sera appelée  *$b$ -maximale* (cf. Définition 4.2.3). En particulier, toute graduation de Dynkin est 1-maximale et la paire 1-maximale est alors

$$\left( \bigoplus_{j \leq -2} \mathfrak{g}(j), \bigoplus_{j < 0} \mathfrak{g}(j) \right).$$

**Théorème 5** (Théorème 3.3.6). *Les paires  $b$ -maximales sont équivalentes à la paire 1-maximale d'une graduation de Dynkin. En particulier, elles sont équivalentes entre elles.*

Lorsque  $b = \frac{a}{2}$ , la notion de graduation  $b$ -maximale coïncide avec la notion de graduation  $a$ -bonne pour  $e$ . Dans ce cas, les paires  $e$ -admissibles considérées dans [3] sont toutes équivalentes à la paire  $\frac{a}{2}$ -maximale. En particulier, elles sont équivalentes entre elles. Nous retrouvons donc une démonstration de [3, Theorem 1] comme cas particulier du Théorème 5. Nous formulons alors une conjecture :

**Conjecture 1** (Conjecture 3.3.10). *Les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes entre elles.*

Compte tenu du Théorème 4, l'étude de la Question 1 revient à étudier les classes d'équivalence sur les paires admissibles pour  $e$  issues d'une graduation  $e$ -admissible donnée. Dans certains cas, on démontre la Conjecture 1 ce qui résout le problème d'isomorphisme posé par la Question 1.

Précisons les cas particuliers étudiés dans ce mémoire. Soit  $\mathfrak{s}$  la sous-algèbre engendrée par le  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, h, f)$ . Son centralisateur  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  dans  $\mathfrak{g}$  est une algèbre réductive égale à  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h$ . Lorsque  $e$  est distingué,  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 0$  et les graduations admissibles sont connexes (et même adjacentes) à la graduation de Dynkin, cf. Propositions 1.3.3 et 3.2.1. La réponse à la Question 1 est donc positive. Il semble ensuite naturel de considérer le cas où  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ . Dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ , le rang de  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  est égal à 1 si et seulement si la partition de  $n$  associée à  $e$  est de la forme  $(d_1, d_2)$  (cf. [15] ou Lemme 4.1.1) et nous montrons :

**Théorème 6** (Théorème 4.3.6). *Lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  et  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

Dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$  ou  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ , le rang de  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  est égal à 1 si et seulement si la partition associée à  $e$  contient exactement deux ou trois parties égales (cf. [15] ou Lemmes 4.1.2 et 4.1.3). Nous montrons :

**Théorème 7** (Théorème 4.4.7). *Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  et si la partition associée à  $e$  contient exactement deux parties égales, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

**Théorème 8** (Théorème 4.5.1). *Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$  et si la partition associée à  $e$  contient exactement deux parties égales, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

Dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$ , nous montrons à l'aide du logiciel GAP4 l'équivalence des paires  $e$ -admissibles sous certaines hypothèses, (cf. Paragraphe 4.6). Ces différents résultats nous conduisent à formuler une conjecture selon laquelle les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles si le rang de  $\mathfrak{g}^s$  est égal à 1 (cf. Conjecture 4.6.4). Cette conjecture, plus faible que la précédente, semble plus abordable dans un premier temps.

## Organisation du mémoire

La suite du mémoire est organisée comme suit.

On introduit au Chapitre 1 les notions de paires et graduations admissibles pour  $e$ . On étudie alors certaines de leurs propriétés. Le résultat principal de ce chapitre donne une caractérisation des graduations admissibles pour  $e$ , Théorème 1.

Le Chapitre 2 concerne la construction et les propriétés des  $W$ -algèbres finies généralisées  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  construites à partir de paires  $e$ -admissibles  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . L'objectif de ce chapitre est de démontrer le Théorème 2.

On s'intéresse au Chapitre 3 à l'existence éventuelle d'un isomorphisme entre les  $W$ -algèbres finies construites à partir de deux paires admissibles pour  $e$ . Afin d'étudier ce problème, on introduit les notions de paires  $e$ -admissibles comparables et équivalentes (Définitions 3.1.1 et 3.1.8), ainsi que les notions de graduations adjacentes et connexes (Définitions 3 et 4). À l'aide de tous ces ingrédients on démontre les Théorèmes 3 et 4. On démontre de plus dans ce chapitre un résultat sur les paires  $b$ -maximales (cf. Définition 4.2.3) qui permet de retrouver [3, Theorem 1] dans un cadre plus général (Théorème 5).

On considère dans le Chapitre 4 quelques cas particuliers où le rang du centralisateur d'un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet contenant  $e$  est égal 1. On montre l'équivalence des paires  $e$ -admissibles dans le cas de  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  sous l'hypothèse que  $\text{rk } \mathfrak{g}^s = 1$  (Théorème 6). De plus, cette équivalence est maintenue pour quelques cas particuliers de  $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$  (Théorème 7) et  $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$  (Théorème 8) sous l'hypothèse que  $\text{rk } \mathfrak{g}^s = 1$ . Enfin, sous certaines conditions, nous montrons aussi cette équivalence lorsque  $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$  sous l'hypothèse que  $\text{rk } \mathfrak{g}^s = 1$  (cf. Paragraphe 4.6).

# Chapitre 1

## Graduations et paires admissibles

On introduit dans ce chapitre les notions de paire, sous-algèbre et graduation admissibles. Les sous-algèbres admissibles sont des analogues des sous-algèbres admissibles définies sur un corps de caractéristique positive (cf. [21, Définition 2.3]). La notion de graduation admissible généralise quant à elle la notion de bonne graduation (cf. [10] ou [3]).

Rappelons que le corps de base est le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. La plupart des définitions et propriétés présentées dans ce chapitre resteraient toutefois valables sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On fixe dans le premier paragraphe les principales notations du chapitre. On introduit ensuite les notions de paire, sous-algèbre et graduation admissibles et on étudie certaines de leurs propriétés. On caractérise enfin les graduations admissibles.

### 1.1 Notations

Dans ce chapitre,  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie de groupe adjoint  $G$ . Si  $x \in \mathfrak{g}$ , on note  $\mathfrak{g}^x$  son centralisateur dans  $\mathfrak{g}$ . On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Étant non dégénérée, elle induit un isomorphisme  $G$ -équivariant entre  $\mathfrak{g}$  et son dual  $\mathfrak{g}^*$ , appelé *isomorphisme de Killing* et noté  $\kappa$ ,

$$\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*, \quad x \mapsto \langle x, \cdot \rangle.$$

Si  $U$  est un sous-espace de  $\mathfrak{g}$ , on note  $U^\perp$  son orthogonal par rapport à la forme de Killing.

**Définition 1.1.1.** *On dit que deux sous-espaces  $U$  et  $V$  de  $\mathfrak{g}$  sont en **couplage** par rapport à la forme de Killing si la restriction de la forme de Killing à  $U \times V$  (ou à  $V \times U$ ) est non dégénérée, i.e.,  $U \cap V^\perp = \{0\} = V \cap U^\perp$ .*

**Remarque 1.1.2.** *Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces de  $\mathfrak{g}$ . Alors*

- (1)  *$U$  est en couplage avec tout sous-espace supplémentaire de  $U^\perp$  dans  $\mathfrak{g}$ ;*
- (2) *si  $U$  et  $V$  sont en couplage alors  $\dim U = \dim V$ .*

Rappelons qu'une  $\mathbb{Q}$ -graduation de  $\mathfrak{g}$  est une décomposition  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  vérifiant  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$  pour tous  $i$  et  $j$ .

**Lemme 1.1.3.** *Pour toute  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$ , il existe un élément semi-simple  $h_\Gamma \in \mathfrak{g}$  tel que*

$$\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g}; [h_\Gamma, x] = jx\}.$$

*Démonstration.* L'opérateur  $\partial : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui à  $x \in \mathfrak{g}_j$  associe  $jx$  est une dérivation sur l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$ . Par suite, c'est une dérivation intérieure de  $\mathfrak{g}$  donnée par  $\text{ad } h_\Gamma$  pour un élément semisimple  $h_\Gamma$  de  $\mathfrak{g}$  (cf. e.g. [24, Proposition 20.1.5]).  $\square$

Soient  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une graduation de  $\mathfrak{g}$  et  $h_\Gamma$  l'élément semisimple définissant  $\Gamma$ . Comme la forme de Killing est  $\mathfrak{g}$ -invariante, donc  $\text{ad } h_\Gamma$ -invariante, on obtient

$$\langle \mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j \rangle = 0 \Leftrightarrow i + j \neq 0. \quad (1.1)$$

**Remarque 1.1.4.** *D'après la formule (1.1), les sous-espaces  $\mathfrak{g}_i$  et  $\mathfrak{g}_{-i}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing pour tout  $i$ . En particulier, ils sont de même dimension.*

Pour une  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  et pour tout  $k \in \mathbb{Q}$ , on désigne par  $\mathfrak{g}_{\leq k}$ ,  $\mathfrak{g}_{< k}$ ,  $\mathfrak{g}_{\geq k}$ ,  $\mathfrak{g}_{> k}$  les sommes  $\bigoplus_{j \leq k} \mathfrak{g}_j$ ,  $\bigoplus_{j < k} \mathfrak{g}_j$ ,  $\bigoplus_{j \geq k} \mathfrak{g}_j$ ,  $\bigoplus_{j > k} \mathfrak{g}_j$  respectivement.

## 1.2 Définitions et exemples

On fixe pour la suite un élément nilpotent  $e$  de  $\mathfrak{g}$  et on pose  $\chi := \kappa(e)$ .

**Définition 1.2.1.** *Soient  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ . On dit que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est **admissible pour  $e$**  (ou  **$e$ -admissible**) s'il existe une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  et un entier  $a > 1$  tels que :*

- (A1)  $e \in \mathfrak{g}_a$ ;
- (A2)  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont graduées et vérifient  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{g}_{< 0}$ ;
- (A3)  $\mathfrak{m}^\perp \cap [\mathfrak{g}, e] = [\mathfrak{n}, e]$ ;
- (A4)  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ ;
- (A5)  $[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ ;
- (A6)  $\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e$ .

*On dit qu'une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est **admissible pour  $e$**  s'il existe un entier  $a > 1$  tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et s'il existe une paire admissible pour  $e$  par rapport à cette graduation.*

*Dans le cas particulier où  $\mathfrak{m}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  telle que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$  soit admissible pour  $e$ , on dit que la sous-algèbre  $\mathfrak{m}$  est **admissible pour  $e$** .*

**Remarque 1.2.2.** *Soit  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est une paire admissible pour  $e$ . D'après la Définition 1.2.1, on a les propriétés suivantes :*

- (1) les sous-algèbres  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont *ad-nilpotentes*;
- (2)  $\mathfrak{m}^\perp \subseteq \mathfrak{g}_{\leq a-1}$ ;

- (3)  $\chi([\mathfrak{n}, \mathfrak{m}]) = \{0\}$ ;  
 (4)  $\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n}$  et  $\dim \mathfrak{m} - \dim \mathfrak{n}$  sont pairs.

**Définition 1.2.3.** On dit qu'une paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  relativement à une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est **optimale** si  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -a}$ .

Donnons à présent quelques exemples de paires et de graduations admissibles pour  $e$ .

**Exemple 1.2.4.** Soit  $(e, h, f)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$ . L'action adjointe de l'élément semisimple  $h$  définit une  $\mathbb{Z}$ -graduation

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j,$$

où  $\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g}; \text{ad } h(x) = jx\}$ . Cette graduation est appelée la **graduation de Dynkin associée à  $h$**  et sera notée  $\Gamma_{\text{Dyn}}^h$ . En particulier,  $e \in \mathfrak{g}_2$ .

Posons

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{j \leq -2} \mathfrak{g}_j \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{j < 0} \mathfrak{g}_j.$$

Vérifions que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est  $e$ -admissible. Les conditions (A1) et (A2) de la Définition 1.2.1 sont satisfaites. La condition (A3) l'est aussi car

$$\mathfrak{m}^\perp \cap [\mathfrak{g}, e] = \mathfrak{g}_{<2} \cap [\mathfrak{g}, e] = [\mathfrak{n}, e].$$

D'après la théorie des représentations de  $\mathfrak{sl}_2$ ,  $\mathfrak{g}^e \subseteq \bigoplus_{j \geq 0} \mathfrak{g}_j$  et  $\dim \mathfrak{g}^e = \dim \mathfrak{g}_0 + \dim \mathfrak{g}_1$ .

On en déduit (A4) et (A6). Enfin,

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{g}_{<-2} \subset \mathfrak{m},$$

d'où (A5). La graduation  $\Gamma_{\text{Dyn}}^h$  est donc  $e$ -admissible. De plus, la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est optimale.

**Exemple 1.2.5.** Si  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est une graduation admissible pour  $e$  définie par l'élément semisimple  $h_\Gamma$  (cf. Lemme 1.1.3) alors la graduation  $\Gamma' : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j$  définie par l'élément

$$h_{\Gamma'} := kh_\Gamma \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

est admissible pour  $e$ . On notera  $k\Gamma$  la graduation  $\Gamma'$ . Plus précisément, soit  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  une paire admissible pour  $e$  relativement à  $\Gamma$ . Alors  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est une paire admissible pour  $e$  relativement à  $k\Gamma$ . En effet, les conditions (A3), (A4), (A5) et (A6) sont clairement vérifiées. Il suffit de remarquer que  $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}'_{kj}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  pour conclure que  $e \in \mathfrak{g}'_{ka}$  et  $\mathfrak{g}'_{\leq -ka} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{g}'_{<0}$ , d'où (A1) et (A2).

**Exemple 1.2.6.** Supposons que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$  et

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple  $h_\Gamma := \frac{1}{3} \text{diag}(2, 2, -4)$ . Les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont homogènes et leurs degrés sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre sans peine que  $\mathfrak{g}_{-2}$  est une sous-algèbre admissible pour  $e$  relativement à  $\Gamma$ . On en déduit que la graduation  $\Gamma$  est admissible pour  $e$ . Cependant, ce n'est pas une graduation de Dynkin car les dimensions en degré 0 de  $\Gamma$  ne coïncident pas.

**Définition 1.2.7** (Elashvili-Kac [10]). On dit qu'une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est **bonne pour**  $e$  si elle satisfait aux conditions suivantes :

- (B1)  $e \in \mathfrak{g}_2$  ;
- (B2)  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j+2}$  est injective pour  $j \leq -1$  ;
- (B3)  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j+2}$  est surjective pour  $j \geq -1$  ;

**Remarque 1.2.8.** Une graduation de Dynkin est bonne mais la réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, l'exemple 1.2.6 fournit une graduation non Dynkin mais bonne pour  $e$ .

**Proposition 1.2.9.** Une bonne graduation pour  $e$  de  $\mathfrak{g}$  est admissible pour  $e$ .

*Démonstration.* Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une bonne graduation pour  $e$ . On pose

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{< 0}.$$

Vérifions que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$  avec  $a = 2$ . On remarque tout d'abord que les conditions (A1) et (A2) sont satisfaites. La condition (A3) l'est aussi car

$$\mathfrak{m}^\perp \cap [\mathfrak{g}, e] = \mathfrak{g}_{< 2} \cap [\mathfrak{g}, e] = [\mathfrak{n}, e].$$

La propriété (B2) de la Définition 1.2.7 implique  $\mathfrak{g}^e \subseteq \mathfrak{g}_{\geq 0}$ . Par suite on a (A4). On a (A5) car

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{g}_{< -2} \subset \mathfrak{m}.$$

Il reste à vérifier (A6). Considérons la suite exacte d'espaces vectoriels,

$$0 \rightarrow \mathfrak{g}^e \rightarrow \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{> 0} \xrightarrow{\text{ad } e} \mathfrak{g}_{> 0} \rightarrow 0,$$

qui est bien définie d'après les propriétés (B2) et (B3). On en déduit que  $\dim \mathfrak{g}^e = \dim \mathfrak{g}_0 + \dim \mathfrak{g}_1$ , d'où (A6). Par conséquent, la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$  ce qui démontre la proposition. De plus, la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est optimale.  $\square$

**Remarque 1.2.10.** Soient  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une bonne graduation pour  $e$  et  $\omega$  la forme bilinéaire antisymétrique,

$$\omega : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \chi([x, y]).$$

D'après les conditions (B2) et (B3) de la Définition 1.2.7,  $\omega$  est non dégénérée. Soit  $\mathfrak{l}$  un sous-espace totalement isotrope de  $\mathfrak{g}_{-1}$  par rapport à cette forme. On considère les deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}_{\leq -2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{l}^{\perp\omega} \oplus \mathfrak{g}_{\leq -2},$$

où  $\mathfrak{l}^{\perp\omega} \subset \mathfrak{g}_{-1}$  désigne l'orthogonal de  $\mathfrak{l}$  par rapport à  $\omega$ . On remarque que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$ . En effet, les conditions (A1), (A2), (A4) et (A5) sont vérifiées avec  $a = 2$ . De plus, on peut montrer que  $\mathfrak{m}^{\perp} = [\mathfrak{n}, e] \oplus \mathfrak{g}^f$  en reprenant les arguments de [11, Paragraph 2.3]. Comme  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, e] \oplus \mathfrak{g}^f$ , la condition (A3) s'ensuit. Enfin, on vérifie sans peine (A6).

En particulier, si  $\mathfrak{l}$  est un sous-espace lagrangien de  $\mathfrak{g}_{-1}$ , la sous-algèbre

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}_{\leq -2} \tag{1.2}$$

est admissible pour  $e$ .

Il est important de remarquer qu'une graduation admissible pour  $e$  n'est pas toujours bonne, comme l'illustrent les exemples suivants.

**Exemple 1.2.11.** On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$  et

$$e := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple

$$\frac{1}{2} \text{diag}(3, 1, -1, -3).$$

En particulier,  $e \in \mathfrak{g}_2$ . Les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont homogènes pour cette graduation et leurs degrés sont donnés sur la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}E_{2,1} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}.$$

Vérifions que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est une paire admissible pour  $e$  relativement à cette graduation avec  $a = 2$ . Tout d'abord, (A1) est vérifiée. Les propriétés (A2) et (A5) sont évidentes d'après les choix de  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$ . D'après la Remarque 1.2.2, et pour des raisons de dimension, on a  $\mathfrak{m}^{\perp} = \mathfrak{g}_{\leq 1}$ . On obtient par un calcul direct que

$$\mathfrak{m}^{\perp} \cap [\mathfrak{g}, e] = \text{Vect}(E_{2,3}, -E_{1,2} + E_{3,4}, E_{3,3} - E_{1,1}, E_{4,3} - E_{2,1}, E_{4,4} - E_{2,2}) = [\mathfrak{n}, e].$$

La condition (A3) est donc satisfaite. Le centralisateur de  $e$  dans  $\mathfrak{g}$  est donné par :

$$\mathfrak{g}^e = \mathfrak{g}_{\geq 2} \oplus \mathbb{C}(E_{1,2} + E_{3,4}) \oplus \mathbb{C}E_{2,3} \oplus \mathbb{C}(E_{1,1} + E_{2,2} - E_{3,3} - E_{4,4}) \oplus \mathbb{C}(E_{2,1} + E_{4,3}).$$

En particulier on a  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , d'où (A4). Il reste à remarquer que

$$\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = 8 = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e.$$

On en déduit que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$ . Comme  $\text{ad}(e) : \mathfrak{g}_{-1} \rightarrow \mathfrak{g}_1$  n'est pas injective, ceci fournit un exemple d'une graduation admissible pour  $e$  qui n'est pas bonne pour  $e$ . Remarquons que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est optimale et que le choix d'une sous-algèbre  $\mathfrak{n}$  telle que  $(\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{n})$  soit  $e$ -admissible et optimale n'est pas unique.

**Exemple 1.2.12.** Donnons un autre exemple de graduation admissible qui n'est pas bonne. Supposons que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_8(\mathbb{C}) = \{X \in M_8(\mathbb{C}) ; XJ + JX = 0\}$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple

$$\frac{1}{2} \text{diag}(11, 5, -1, -7, 7, 1, -5, -11).$$

Les matrices élémentaires sont homogènes pour cette graduation et  $e \in \mathfrak{g}_3$ . On pose  $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leq -3}$  et  $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}_{\leq -3} \oplus \mathbb{C}(E_{5,1} + E_{8,4}) \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ . La paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$  relativement à  $\Gamma$ . Par conséquent, la graduation  $\Gamma$  est admissible pour  $e$ . On omet ici les détails car cet exemple est un cas particulier d'une étude plus générale présentée dans le Chapitre 4. On remarque que  $\Gamma$  n'est pas bonne car  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_{<0} \neq \{0\}$ .

### 1.3 Premières propriétés

Les graduations admissibles admettent certaines propriétés remarquables analogues à celles des bonnes graduations. On fixe une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma$  de  $\mathfrak{g}$ ,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j, \tag{1.3}$$

et soit  $h_\Gamma$  l'élément semisimple de  $\mathfrak{g}$  définissant  $\Gamma$  donné par le Lemme 1.1.3. On suppose que  $e \in \mathfrak{g}_a$ , avec  $a > 1$ .

**Lemme 1.3.1** (Proposition 32.1.7 de [24]). *Il existe  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$  tels que  $(e, h, f)$  soit un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet.*

*Démonstration.* On peut écrire

$$h = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j \quad \text{et} \quad f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j,$$

où  $h_j, f_j \in \mathfrak{g}_j$ . Comme  $[h_j, e] \in \mathfrak{g}_{j+a}$  et  $[h, e] = 2e$ , on obtient que

$$[h_0, e] = 2e \quad \text{et} \quad [h_j, e] = 0 \quad \text{pour tout } j \neq 0.$$

De plus, on a  $[e, f] = h = \sum_{j \in \mathbb{Z}} [e, f_j]$ , ce qui implique que  $h_0 = [e, f_{-a}]$ . Ainsi,  $[h_0, e] = 2e$  et  $h_0 \in [\mathfrak{g}, e]$ . On utilise ensuite le lemme de Morosov (cf. e.g. [24, Lemma 32.1.3]) dont on rappelle l'énoncé :

**Lemme 1.3.2.** *Soient  $h, e \in \mathfrak{g}$  tels que  $[h, e] = 2e$  et  $h \in [e, \mathfrak{g}]$ . Alors il existe  $f \in \mathfrak{g}$  tel que  $[h, f] = -2f$  et  $[e, f] = h$ .*

Il s'ensuit qu'il existe  $f' \in \mathfrak{g}$  tel que  $(e, h_0, f')$  soit un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$ . En écrivant  $f' = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f'_j$  où  $f'_j \in \mathfrak{g}_j$ , on obtient que

$$[h_0, f'_{-a}] = -2f'_{-a} \quad \text{et} \quad [e, f'_{-a}] = h_0.$$

Par suite, le  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, h_0, f'_{-a})$  convient.  $\square$

La proposition suivante traite le cas d'un élément nilpotent *distingué* de  $\mathfrak{g}$ , i.e., dont le centralisateur ne contient que des éléments nilpotents.

**Proposition 1.3.3.** *Si  $e$  est un élément nilpotent distingué de  $\mathfrak{g}$ , alors les graduations de Dynkin sont les seules graduations de  $\mathfrak{g}$  admissibles pour  $e$ , à homothéties près (cf. Exemple 1.2.5).*

*Démonstration.* Supposons que  $e$  soit un élément nilpotent distingué de  $\mathfrak{g}$  et que la graduation (1.3) soit admissible pour  $e$ . Soit  $(e, h, f)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet tel que  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$ , cf. Lemme 1.3.1. L'élément  $t := \frac{a}{2}h - h_\Gamma$  centralise  $e$  et il est semisimple. Comme  $e$  est distingué, on a  $t = 0$  et donc  $h_\Gamma = \frac{a}{2}h$ , d'où la proposition.  $\square$

**Proposition 1.3.4.** *Si  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est une paire admissible pour  $e$  de  $\mathfrak{g}$  relativement à  $\Gamma$ , alors on a*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}^\perp + [\mathfrak{g}, e].$$

*Démonstration.* D'après la propriété (A4), on a  $\dim \mathfrak{n} = \dim[\mathfrak{n}, e]$ . D'après la propriété (A3),  $\dim \mathfrak{n} = \dim(\mathfrak{m}^\perp \cap [\mathfrak{g}, e])$ . Par suite,

$$\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e - \dim(\mathfrak{m}^\perp + [\mathfrak{g}, e]).$$

Grâce à la condition (A6), on en déduit que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}^\perp + [\mathfrak{g}, e]$ .  $\square$

De façon générale, pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on désigne par  $\mathfrak{g}_k^e$  l'intersection de  $\mathfrak{g}_k$  avec  $\mathfrak{g}^e$ .

**Lemme 1.3.5.** *Soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_k \rightarrow \mathfrak{g}_{k+a}$  soit injective. Alors l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{-(k+a)} \rightarrow \mathfrak{g}_{-k}$  est surjective. En particulier, on a  $\dim \mathfrak{g}_k = \dim \mathfrak{g}_{-(k+a)} - \dim \mathfrak{g}_{-(k+a)}^e$ .*

*Démonstration.* On a  $[e, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{k+a}$  et  $\dim[e, \mathfrak{g}_k] = \dim \mathfrak{g}_k$ . Comme  $\mathfrak{g}_{k+a}$  et  $\mathfrak{g}_{-(k+a)}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing, il existe  $V \subset \mathfrak{g}_{-(k+a)}$  tel qu'on ait un couplage  $[e, \mathfrak{g}_k] \times V$ . En particulier, on a  $\dim V = \dim[e, \mathfrak{g}_k] = \dim \mathfrak{g}_k$ , où la première égalité provient de la Remarque 1.1.2 (2). Comme

$$\langle [e, v], x \rangle = -\langle v, [e, x] \rangle,$$

pour tous  $v \in V$  et  $x \in \mathfrak{g}_k$ , on a un couplage entre  $\mathfrak{g}_k$  et  $[e, V]$  par rapport à la forme de Killing. En particulier,  $\dim[e, V] = \dim \mathfrak{g}_k = \dim V$ . On en déduit que l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{-(k+a)} \rightarrow \mathfrak{g}_{-k}$  est surjective. Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 1.3.6.** *Supposons que la graduation  $\Gamma$  donnée par l'équation (1.3) soit admissible pour  $e$ . Alors l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{g}_{\geq a}$  est surjective.*

*Démonstration.* Comme la graduation  $\Gamma$  est admissible pour  $e$ , on a  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Alors l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_k \rightarrow \mathfrak{g}_{k+a}$  est injective pour tout  $k \leq -a$ . D'après le Lemme 1.3.5, l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{-(k+a)} \rightarrow \mathfrak{g}_{-k}$  est donc surjective pour tout  $k \leq -a$ . En d'autres termes, l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_k \rightarrow \mathfrak{g}_{k+a}$  est surjective pour tout  $k \geq 0$ . Le corollaire s'ensuit.  $\square$

Rappelons qu'une paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  est optimale si  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -a}$ . On verra l'importance de ces paires dans la suite, notamment au Chapitre 4. Le résultat suivant nous fournit une caractérisation des paires admissibles optimales.

**Proposition 1.3.7.** *Supposons que la graduation  $\Gamma$  donnée par l'équation (1.3) soit admissible pour  $e$ . Soit  $\mathfrak{n}$  un supplémentaire gradué de  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{<0}$  contenant  $\mathfrak{g}_{\leq -a}$ . Alors la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$  si et seulement si  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, si la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$ , alors  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Réciproquement, supposons que  $\mathfrak{n}$  soit une sous-algèbre graduée de  $\mathfrak{g}$ . La condition (A1) est clairement vérifiée. Par construction, les conditions (A2) et (A4) sont satisfaites. En outre, on a

$$[\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -a-1} \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -a},$$

d'où (A5). D'après la Remarque 1.2.2(3),  $[\mathfrak{n}, e]$  est inclus dans  $(\mathfrak{g}_{\leq -a})^\perp$ . Par suite,  $[\mathfrak{n}, e] \subset (\mathfrak{g}_{\leq -a})^\perp \cap [\mathfrak{g}, e]$ . Soit  $X = [Y, e]$  un élément de  $(\mathfrak{g}_{\leq -a})^\perp \cap [\mathfrak{g}, e]$  avec  $Y = \sum_i Y_i$

où  $Y_i \in \mathfrak{g}_i$  pour tout  $i$ . Comme  $(\mathfrak{g}_{\leq -a})^\perp = \mathfrak{g}_{<a}$ , on peut supposer  $Y \in \mathfrak{g}_{<0}$ . Écrivons alors  $Y = Y' + Y''$  avec  $Y' \in \mathfrak{n}$  et  $Y'' \in \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$ . Ainsi,

$$X = [Y, e] = [Y', e] \in [\mathfrak{n}, e],$$

ce qui implique (A3). D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e &= \dim[\mathfrak{g}, e] = \dim[\mathfrak{g}_{\geq 0}, e] + \dim[\mathfrak{g}_{<0}, e] \\ &= \dim \mathfrak{g}_{\geq a} + \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g}_{\leq -a} + \dim \mathfrak{n} \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du Corollaire 1.3.6, de la construction de  $\mathfrak{n}$  et de (A4). En conclusion, la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$ .  $\square$

**Remarque 1.3.8.** Si la graduation  $\Gamma$  donnée par (1.3) est admissible pour  $e$  et si  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , alors la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{<0})$  est l'unique paire optimale admissible pour  $e$ .

Il n'existe pas toujours de paires optimales admissibles pour  $e$  comme l'illustre l'exemple suivant :

**Exemple 1.3.9.** On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{11}(\mathbb{C})$  et  $e := \sum_{\substack{1 \leq i \leq 10 \\ i \notin \{6,9\}}} E_{i,i+1}$ . On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple

$$\frac{1}{11} \text{diag}(73, 40, 7, -26, -59, -92, 29, -4, -37, 51, 18).$$

Les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont homogènes pour cette graduation et  $e \in \mathfrak{g}_3$  et leurs degrés sont présentés sur la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 4 & 7 & 10 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 1 & 4 & 7 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 0 & 3 & 6 & 9 & -2 & 1 & 4 & -4 & -1 \\ -9 & -6 & -3 & 0 & 3 & 6 & -5 & -2 & 1 & -7 & -4 \\ -12 & -9 & -6 & -3 & 0 & 3 & -8 & -5 & -2 & -10 & -7 \\ -15 & -12 & -9 & -6 & -3 & 0 & -11 & -8 & -5 & -13 & -10 \\ \\ -4 & -1 & 2 & 5 & 8 & 11 & 0 & 3 & 6 & -2 & 1 \\ -7 & -4 & -1 & 2 & 5 & 8 & -3 & 0 & 3 & -5 & -2 \\ -10 & -7 & -4 & -1 & 2 & 5 & -6 & -3 & 0 & -8 & -5 \\ \\ -2 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 2 & 5 & 8 & 0 & 3 \\ -5 & -2 & 1 & 4 & 7 & 10 & -1 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que, relativement à cette graduation, une paire admissible pour  $e$  optimale n'existe pas. Supposons que  $(\mathfrak{g}_{\leq -3}, \mathfrak{n})$  soit une paire optimale. Comme  $\mathfrak{n}$  est graduée, on peut écrire

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\leq -3} \oplus \mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1} \quad \text{où } \mathfrak{n}_{-2} \subset \mathfrak{g}_{-2} \text{ et } \mathfrak{n}_{-1} \subset \mathfrak{g}_{-1}.$$

On a  $\dim \mathfrak{g}^e = 25$  et, d'après (A6),  $\dim(\mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1}) = 12 = \dim \mathfrak{n}_{-2} + \dim \mathfrak{n}_{-1}$  avec  $\dim \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} = 13$ . Sachant que  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e = \mathbb{C}(E_{7,10} + E_{8,11}) \subset \mathfrak{g}_{-2}$  et  $\dim \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e = 1$ , et comme  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{n}_{-2} = \{0\}$ , on a  $\mathfrak{n}_{-2} \neq \mathfrak{g}_{-2}$ . Par conséquent, on a  $\dim \mathfrak{n}_{-1} = \dim \mathfrak{g}_{-1}$  et  $\mathfrak{n}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}$ . Puisque  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre graduée de  $\mathfrak{g}$  on a  $[\mathfrak{n}_{-1}, \mathfrak{n}_{-1}] \subset \mathfrak{n}_{-2}$ . Or  $\{0\} \neq \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset [\mathfrak{n}_{-1}, \mathfrak{n}_{-1}]$ . En particulier,  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$  ce qui contredit le fait que  $(\mathfrak{g}_{\leq -3}, \mathfrak{n})$  soit une paire admissible pour  $e$ . Par suite, une paire optimale relativement à cette graduation n'existe pas.

La proposition suivante fournit néanmoins des paires  $e$ -admissibles intéressantes comme on le verra au Chapitre 3.

**Proposition 1.3.10.** Soit  $b \in ]0, \frac{a}{2}]$  tel que  $\mathfrak{g}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Alors pour tout supplémentaire  $U$  de  $\mathfrak{g}_{-b} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{-b}$ , la paire  $(\mathfrak{g}_{<b-a}, \mathfrak{g}_{<-b} \oplus U)$  est admissible pour  $e$ .

*Démonstration.* Tout d'abord les conditions (A1), (A2), (A4) et (A5) de la Définition 1.2.1 sont vérifiées. Il reste à vérifier les conditions (A3) et (A6). Soit  $[X, e] \in \mathfrak{g}_{<b-a}^\perp = \mathfrak{g}_{\leq a-b}$  tel que  $X = \sum_i X_i$  où  $X_i \in \mathfrak{g}_i$ . On a  $[X_i, e] \in \mathfrak{g}_{i+a}$ . On a donc  $i+a \leq a-b$  pour  $i$  tel que  $[X_i, e] \neq 0$ . On peut alors supposer que  $X \in \mathfrak{g}_{\leq -b}$ . Soit  $X = \sum_{i < -b} X_i + X_{-b}$  où  $X_{-b} = X' + X''$  tel que  $X' \in \mathfrak{g}_{-b} \cap \mathfrak{g}^e$  et  $X'' \in U$ , on a

$$[X, e] = \left[ \sum_{i < -b} X_i + X' + X'', e \right] = \left[ \sum_{i < -b} X_i, e \right] + [X', e] + [X'', e],$$

avec  $[X', e] = 0$  car  $X' \in \mathfrak{g}_{-b} \cap \mathfrak{g}^e$ . Alors  $[X, e]$  appartient à  $[\mathfrak{g}_{<-b} \oplus U, e]$ . D'autre part, on a

$$[\mathfrak{g}_{<-b} \oplus U, e] \subset [\mathfrak{g}_{\leq -b}, \mathfrak{g}_a] \subset \mathfrak{g}_{\leq a-b} = (\mathfrak{g}_{<b-a})^\perp.$$

On en déduit que la condition (A3) est vérifiée. De plus, d'après le Lemme 1.3.5 et l'hypothèse  $\mathfrak{g}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , on a

$$\dim \mathfrak{g}_{<b-a} = \sum_{k < b-a} (\dim \mathfrak{g}_{-(k+a)} - \dim \mathfrak{g}_{-(k+a)}^e) = \sum_{k > a-b} (\dim \mathfrak{g}_{k-a} - \dim \mathfrak{g}_{k-a}^e)$$

car  $b-a \leq -b$ . Par suite,  $\dim \mathfrak{g}_{<b-a} = \sum_{k > 0} (\dim \mathfrak{g}_{-b+k} - \dim \mathfrak{g}_{-b+k}^e)$ . La condition (A6) s'ensuit d'après l'égalité

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g}_{<b-a} + \dim \mathfrak{g}_{<-b} + \dim U &= \dim \mathfrak{g}_{>-b} - \dim \mathfrak{g}_{>-b}^e + \dim \mathfrak{g}_{<-b} - \dim \mathfrak{g}_{<-b}^e \\ &+ \dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim \mathfrak{g}_{-b}^e = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.3.11.** *Soit  $b \in ]0, \frac{a}{2}]$  tel que  $\mathfrak{g}_{\leq -b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Alors la paire  $(\mathfrak{g}_{<b-a}, \mathfrak{g}_{\leq -b})$  est admissible pour  $e$ .*

## 1.4 Caractérisation des graduations admissibles

Dans ce paragraphe,  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  désigne une  $\mathbb{Z}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  vérifiant  $e \in \mathfrak{g}_a$  où  $a > 1$ .

### 1.4.1 Description via les racines simples

On généralise dans ce paragraphe la description donnée par [10, Theorem 1.2 and Corollary 1.2] des bonnes graduations pour  $e$ .

Comme la restriction de la forme de Killing à  $\mathfrak{g}_0$  est non dégénérée, la sous-algèbre  $\mathfrak{g}_0$  est une sous-algèbre réductive de  $\mathfrak{g}$ , cf. e.g. [24, Proposition 20.5.4]. Soient  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ , qui est aussi une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\Delta$  le système de racines de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha,$$

la décomposition en espaces radiciels de  $\mathfrak{g}$  correspondante à  $\mathfrak{h}$ . On observe que  $h_\Gamma \in \mathfrak{h}$ . Ainsi, chaque espace radiciel  $\mathfrak{g}^\alpha$  est contenu dans  $\mathfrak{g}_j$  pour un certain  $j \in \mathbb{Z}$ . On

considère un système de racines positives  $\Delta_0^+$  du système de racines associé à  $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h})$ . Alors

$$\Delta^+ = \Delta_0^+ \cup \{\alpha \in \Delta; \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}_{>0}\}$$

est un système de racines positives du couple  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Soit  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  l'ensemble des racines simples de  $\Delta^+$ . Ainsi,

$$\Pi = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} \Pi_j \quad \text{où} \quad \Pi_j = \{\alpha \in \Pi; \mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{g}_j\}.$$

Pour une racine  $\alpha$ , on désigne par  $X_\alpha$  un générateur de l'espace radiciel  $\mathfrak{g}^\alpha$ . Le théorème suivant généralise [10, Theorem 1.2] :

**Théorème 1.4.1.** *Si la graduation (1.3) est admissible pour  $e$ , alors*

$$\Pi = \Pi_0 \sqcup \Pi_1 \sqcup \dots \sqcup \Pi_a.$$

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $\alpha_j \notin \Pi_0 \sqcup \Pi_1 \sqcup \dots \sqcup \Pi_a$ . Comme  $e \in \mathfrak{g}_a$ ,  $e$  appartient à la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  engendrée par les éléments  $X_{\alpha_i}$  pour  $i \neq j$ . On obtient ainsi que  $[e, X_{-\alpha_j}] = 0$ , i.e.,  $X_{-\alpha_j} \in \mathfrak{g}^e$ . Comme  $X_{\alpha_j} \in \mathfrak{g}_k$  avec  $k \geq a + 1$ ,  $X_{-\alpha_j} \in \mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e$ . Cette dernière intersection est nulle d'après les conditions (A2) et (A4) de la Définition 1.2.1. Par conséquent,  $X_{-\alpha_j} = 0$  ce qui est absurde. Ainsi, pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\alpha_j \in \Pi_0 \sqcup \Pi_1 \sqcup \dots \sqcup \Pi_a$ .  $\square$

Pour une racine  $\alpha$ , on appelle *degré de*  $X_\alpha$ , et on note  $\deg X_\alpha$ , l'entier  $i$  tel que  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_i$ .

**Corollaire 1.4.2.** *Les graduations admissibles pour  $e$  sont parmi celles définies par  $\deg X_{\alpha_i} = -\deg X_{-\alpha_i} \in \{0, 1, \dots, a\}$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ .*

**Remarque 1.4.3.** *Le Corollaire 1.4.2 entraîne en particulier que, pour  $a$  fixé, le nombre de graduations admissibles pour  $e$  est fini.*

## 1.4.2 Caractérisation

L'objectif de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 1.4.4.** *La graduation  $\Gamma$  est admissible pour  $e$  si et seulement si  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ .*

L'implication directe est claire d'après (A2) et (A4). On explique ici la stratégie pour montrer l'autre implication. Soient  $h_\Gamma$  l'élément semisimple de  $\mathfrak{g}$  définissant la graduation  $\Gamma$  et  $(e, h, f)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$  tel que  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$ . On pose

$$\mathfrak{s} := \text{Vect}(e, h, f)$$

et

$$t := h_\Gamma - \frac{a}{2}h.$$

L'élément  $t$  de  $\mathfrak{g}$  est semisimple et appartient à  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ . De plus, les valeurs propres de  $\text{ad } t$  sont rationnelles. On suppose désormais que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . On va construire une paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  relativement à la graduation  $\Gamma$  suivant le Lemme 1.4.5. D'après ce lemme, la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6). Pour conclure qu'elle est  $e$ -admissible, il restera à montrer que  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  vérifiant (A5).

**Lemme 1.4.5.** *Soit  $\mathfrak{g} = \mathbf{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{P}_s$  une décomposition de  $\mathfrak{g}$  en sous-espaces de  $\mathfrak{g}$  stables par  $\mathfrak{s}$  et  $t$ , et deux à deux orthogonaux par rapport à la forme de Killing. Pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ , soient  $\mathfrak{m}_i$  et  $\mathfrak{n}_i$  deux sous-espaces gradués dans  $\mathbf{P}_i$  vérifiant les conditions suivantes :*

- (C1)  $\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{n}_i \subset \mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{< 0}$  ;
- (C2)  $\mathfrak{m}_i^\perp \cap [e, \mathbf{P}_i] = [e, \mathfrak{n}_i]$  ;
- (C3)  $\mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  ;
- (C4)  $\dim \mathfrak{m}_i + \dim \mathfrak{n}_i = \dim \mathbf{P}_i - \dim(\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}^e)$ .

On pose

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{m}_i \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{n}_i$$

Alors la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6) de la Définition 1.2.1.

*Démonstration.* La condition (A2) est vérifiée car

$$\mathfrak{g}_{\leq -a} = \bigoplus_{i=1}^s (\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}) \subset \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{m}_i \subset \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{n}_i \subset \bigoplus_{i=1}^s (\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{< 0}) = \mathfrak{g}_{< 0}.$$

En outre, comme

$$\mathfrak{m}^\perp \cap [e, \mathfrak{g}] = \bigoplus_{i=1}^s (\mathfrak{m}_i^\perp \cap [e, \mathbf{P}_i]) = \bigoplus_{i=1}^s [e, \mathfrak{n}_i] = [e, \mathfrak{n}],$$

alors (A3) est vérifiée. De plus, puisque  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \bigoplus_{i=1}^s (\mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{g}^e)$ , alors  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , d'où la condition (A4). Enfin un simple calcul de dimension montre que

$$\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = \sum_{i=1}^s (\dim \mathfrak{m}_i + \dim \mathfrak{n}_i) = \sum_{i=1}^s (\dim \mathbf{P}_i - \dim(\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}^e)) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e.$$

La condition (A6) s'ensuit. □

*Démonstration du Théorème 1.4.4.* On considère la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en composantes isotypiques de  $\mathfrak{s}$ -modules simples,

$$\mathfrak{g} = \mathbf{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{E}_r.$$

D'après le lemme de Schur, cette décomposition est orthogonale relativement à la forme de Killing. Comme  $t$  commute avec  $\mathfrak{s}$ , toujours d'après le lemme de Schur, chaque composante isotypique  $\mathbf{E}_i$  est stable sous l'action adjointe de  $t$ . Par suite, pour tout  $i$ , la composante isotypique  $\mathbf{E}_i$  se décompose en espaces propres pour  $\text{ad } t$ ,

$$\mathbf{E}_i = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{i,\lambda},$$

tels que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}_{i,\lambda} \times \mathbf{E}_{i,\mu}} = 0 \text{ si } \lambda + \mu \neq 0 \text{ et } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}_{i,\lambda} \times \mathbf{E}_{i,-\lambda}} \text{ non dégénérée.} \quad (1.4)$$

La dernière assertion signifie que  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}$  sont en couplage. Soient  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Q}$  et  $d_i$  la dimension d'un  $\mathfrak{s}$ -module simple de  $\mathbf{E}_i$ . L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h$  sur  $\mathbf{E}_i$  est donné par :

$$\{-(d_i - 1), -(d_i - 3), \dots, d_i - 3, d_i - 1\}.$$

Il s'ensuit que le plus petit poids de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  (resp. sur  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}$ ) est égal à

$$\rho_{i,\lambda} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) + \lambda \quad (\text{resp. } \rho_{i,-\lambda} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) - \lambda).$$

On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  est donné par

$$\Xi_{i,\lambda} := \{\rho_{i,\lambda} + la; 0 \leq l \leq d_i - 1\} \subset \mathbb{Q}.$$

En particulier, on a  $\rho_{i,-\lambda} = -\rho_{i,\lambda} - (d_i - 1)a$  et  $\Xi_{i,-\lambda} = -\Xi_{i,\lambda} := \{-\mu; \mu \in \Xi_{i,\lambda}\}$ . On a la décomposition

$$\mathbf{E}_{i,\lambda} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l,$$

où  $\mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  est le sous-espace propre de  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  pour  $\text{ad } h_\Gamma$  associé à la valeur propre  $\rho_{i,\lambda} + la$ . De façon analogue,

$$\mathbf{E}_{i,-\lambda} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l,$$

où  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$  est le sous-espace propre de  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}$  pour  $\text{ad } h_\Gamma$  associé à la valeur propre  $\rho_{i,-\lambda} + la$ . De plus, pour  $l, l' \in \{0, 1, \dots, d_i - 1\}$ , le couplage (1.4) est décrit comme suit :

$$\langle \mathbf{E}_{i,\lambda}^l, \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l'} \rangle = \begin{cases} \{0\} & \text{si } l + l' \neq d_i - 1; \\ \mathbb{C} & \text{si } l + l' = d_i - 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

En particulier, les sous-espaces propres  $\mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}^{d_i-1-l}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing. Remarquons que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  si et seulement si

$$\frac{a}{2}(d_i - 1) + \lambda > -a \quad \text{et} \quad \frac{a}{2}(d_i - 1) - \lambda > -a,$$

i.e., si et seulement si

$$-\frac{a}{2}(d_i + 1) < \lambda < \frac{a}{2}(d_i + 1). \quad (1.6)$$

D'après notre hypothèse, les inégalités de (1.6) sont donc satisfaites. On pose

$$m_{i,\lambda} := \frac{\dim \mathbf{E}_{i,\lambda}}{d_i}.$$

On a alors

$$\dim \mathbf{E}_{i,\lambda}^l = m_{i,\lambda}, \quad l \in \{0, 1, \dots, d_i - 1\}.$$

Pour  $\lambda \geq 0$ , on pose

$$\mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathbf{E}_{i,\lambda} + \mathbf{E}_{i,-\lambda}.$$

On a alors la décomposition orthogonale par rapport à la forme de Killing en sous-espaces stables par  $\mathfrak{s}$  et  $t$  :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}.$$

On cherche à appliquer le Lemme 1.4.5 à cette décomposition pour construire une paire  $e$ -admissible. On remarque que

$$\dim \mathbf{V}_{i,0} = m_{i,0}d_i, \quad \dim \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}^e = m_{i,0} \quad (1.7)$$

et

$$\dim \mathbf{V}_{i,\lambda} = 2m_{i,\lambda}d_i, \quad \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e = 2m_{i,\lambda} \quad \text{si } \lambda \neq 0. \quad (1.8)$$

On distingue deux cas :

**I.** Il existe  $k \in \{0, 1, \dots, d_i - 1\}$  tel que  $\rho_{i,\lambda} + ka = 0$ .

**II.** Il existe  $k \in \{-1, 0, 1, \dots, d_i - 1\}$  tel que  $\rho_{i,\lambda} + ka < 0 < \rho_{i,\lambda} + (k+1)a$ .

Ce sont les seules possibilités d'après la formule (1.6) car  $\rho_{i,\lambda} - a < 0 < \rho_{i,\lambda} + d_i a$ .

**Cas I.** Dans ce cas,  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$ . En particulier,  $(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}) \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . On pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}.$$

Par construction, on a

$$\mathbf{n}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}.$$

De plus,

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^k \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=1}^{d_i-1-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l = [\mathbf{n}_{i,\lambda}, e].$$

En outre, si  $\lambda = 0$ , alors

$$\dim \mathbf{m}_{i,0} + \dim \mathbf{n}_{i,0} = (d_i - 1)m_{i,0} = \dim \mathbf{V}_{i,0} - \dim(\mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}^e)$$

d'après (1.7). Si  $\lambda \neq 0$ , alors

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e)$$

d'après (1.8). Par conséquent, les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) sont vérifiées.

**Cas II.** Dans ce cas,  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^k \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$ . On présente

dans la Table 1.1 les choix de  $\mathbf{m}_{i,\lambda}$  et  $\mathbf{n}_{i,\lambda}$  dans chacun des sous-cas suivants :

- (a)  $k = -1$ ;
- (b)  $k = d_i - 1$ ;
- (c)  $-1 < k < d_i - 1$  et  $\lambda = 0$ ;
- (d)  $-1 < k < d_i - 1$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $\rho_{i,\lambda} + ka < -\rho_{i,\lambda} - (k+1)a$ ;
- (e)  $-1 < k < d_i - 1$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $-\rho_{i,\lambda} - (k+1)a < \rho_{i,\lambda} + ka$ .

Dans chacun de ces sous-cas, par construction (cf. Table 1.1),

$$\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathbf{m}_{i,\lambda} \subset \mathbf{n}_{i,\lambda} \subset \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}.$$

**Sous-cas (a).** On a

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l = [\mathbf{n}_{i,\lambda}, e],$$

Cas II	$\mathfrak{m}_{i,\lambda}$	$\mathfrak{n}_{i,\lambda}$
(a)	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-2} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	
(b)	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	
(c)	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,0}^l$	$V_{i,[0]} \cap \mathfrak{g}_{<0}$
(d)	$\bigoplus_{l=0}^k \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=0}^{d_i-3-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	
(e)	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	

TABLE 1.1 – Cas II.

et, d'après (1.8),

$$\dim \mathfrak{m}_{i,\lambda} + \dim \mathfrak{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e).$$

**Sous-cas (b).** On a

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l = [\mathfrak{n}_{i,\lambda}, e],$$

et, d'après (1.8),

$$\dim \mathfrak{m}_{i,\lambda} + \dim \mathfrak{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e).$$

**Sous-cas (c).** On a

$$\mathfrak{m}_{i,0}^\perp \cap [e, \mathbf{V}_{i,0}] = \bigoplus_{l=1}^{k+1} \mathbf{E}_{i,0}^l = [e, \mathfrak{n}_{i,0}],$$

et, d'après (1.7),

$$\dim \mathfrak{m}_{i,[0]} + \dim \mathfrak{n}_{i,[0]} = (d_i - 1)m_{i,0} = \dim V_{i,[0]} - \dim(V_{i,[0]} \cap \mathfrak{g}^e).$$

**Sous-cas (d).** Si  $\rho_{i,\lambda} + ka < -\rho_{i,\lambda} - (k+1)a$  on a alors

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^{k+1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l \oplus \bigoplus_{l=1}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l = [\mathfrak{n}_{i,\lambda}, e].$$

**Sous-cas (e).** On procède de manière analogue au sous-cas (d). On a en particulier d'après (1.8),

$$\dim \mathfrak{m}_{i,\lambda} + \dim \mathfrak{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e).$$

## 1 . Graduations et paires admissibles

Par conséquent, les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) sont vérifiées dans tous les sous-cas. De plus,  $\mathfrak{m}_{i,\lambda} \subset \mathfrak{n}_{i,\lambda} \subset \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}$ .

**Conclusion.** Posons

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathfrak{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathfrak{n}_{i,\lambda}.$$

Les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6) sont vérifiées d'après le Lemme 1.4.5. Il reste à vérifier que  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  qui vérifient la condition (A5). On a  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}} \subset \mathfrak{g}_{<0}$ . Ainsi,

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{n}, \mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}] \subset \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}.$$

Il s'ensuit que  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  telles que  $[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ . Par conséquent, la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$ . Ceci achève la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 1.4.6.** *Comme la graduation  $\Gamma$  est entière, il en résulte que  $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . Des inégalités (1.6), on retrouve la Remarque 1.4.3 : pour  $a$  fixé le nombre de graduations admissibles pour  $e$  est fini.*

Dans le Chapitre 3, on utilisera des constructions similaires à celles utilisées dans la démonstration du Théorème 1.4.4.

# Chapitre 2

## $W$ -algèbres finies associées aux paires admissibles

Comme dans le chapitre précédent,  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie et de groupe adjoint  $G$ ,  $e$  est un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$  et  $\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  est l'isomorphisme de Killing. On pose  $\chi := \kappa(e)$ . On fixe une paire  $e$ -admissible  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  de  $\mathfrak{g}$  relativement à une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  avec  $e \in \mathfrak{g}_a$  pour  $a > 1$ . Le groupe adjoint  $G$  opère dans  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^*$  via l'opération adjointe et l'opération coadjointe respectivement. Pour  $g \in G$ ,  $x \in \mathfrak{g}$  et  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , on note  $g(x)$  et  $g(\xi)$  les images de  $x$  et  $\xi$  par  $g$  pour ces opérations respectives.

On construit dans ce chapitre une algèbre d'endomorphismes  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et on étudie certaines de ses propriétés. Ceci généralisera des résultats de Gan et Ginzburg, cf. [11], sur les  $W$ -algèbres finies. Les méthodes utilisées suivent pour une large part leurs idées. C'est l'une des raisons pour lesquelles on se place sur le corps des nombres complexes.

### 2.1 Construction

Si  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ , on note  $U(\mathfrak{a})$  l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{a}$ . D'après la Remarque 1.2.2(3), la restriction à  $\mathfrak{m}$  de  $\chi$  est un caractère de  $\mathfrak{m}$ . Ce dernier s'étend en une représentation  $\chi : U(\mathfrak{m}) \rightarrow \mathbb{C}$  de  $U(\mathfrak{m})$  et on désigne par  $\mathbb{C}_\chi$  le  $U(\mathfrak{m})$ -module à gauche correspondant. La multiplication à droite par un élément de  $\mathfrak{m}$  induit une structure de  $U(\mathfrak{m})$ -module à droite sur  $U(\mathfrak{g})$ . Soit  $I(\mathfrak{m})$  l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x - \chi(x)$ , pour  $x \in \mathfrak{m}$ . On pose

$$Q(\mathfrak{m}) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_\chi.$$

Alors  $Q(\mathfrak{m})$  est isomorphe à  $U(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{m})$  en tant que  $U(\mathfrak{g})$ -modules. L'opération adjointe de  $\mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{g}$  s'étend de façon unique en une opération  $\theta$  de  $\mathfrak{n}$  dans  $U(\mathfrak{g})$ .

**Proposition 2.1.1.** *L'idéal  $I(\mathfrak{m})$  est stable sous cette action de  $\mathfrak{n}$ . En particulier, ceci induit une structure de  $\mathfrak{n}$ -module sur  $Q(\mathfrak{m})$ .*

*Démonstration.* Pour tous  $x \in \mathfrak{m}$ ,  $y \in \mathfrak{n}$  et  $u \in U(\mathfrak{g})$ ,

$$\begin{aligned} \theta(y)(u(x - \chi(x))) &= \theta(y)u(x - \chi(x)) + u\theta(y)(x - \chi(x)) \\ &= \theta(y)u(x - \chi(x)) + u[y, x] \in I(\mathfrak{m}) \end{aligned}$$

car  $\chi([y, x]) = 0$  d'après la Remarque 1.2.2(3). La structure de  $\mathfrak{n}$ -module sur  $Q(\mathfrak{m})$  est alors donnée par

$$\theta(x)(u + I(\mathfrak{m})) = \theta(x)(u) + I(\mathfrak{m}),$$

pour  $x \in \mathfrak{n}$  et  $u \in U(\mathfrak{g})$ . □

On pose

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) &= \{u + I(\mathfrak{m}) \in Q(\mathfrak{m}); \theta(x)(u) \in I(\mathfrak{m}) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{n}\} \\ &= \{u + I(\mathfrak{m}) \in Q(\mathfrak{m}); I(\mathfrak{m})u \subset I(\mathfrak{m})\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Autrement dit,  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est le sous-espace de  $Q(\mathfrak{m})$  formé des éléments invariants par  $\mathfrak{n}$ .

**Proposition 2.1.2.** *Soient  $u + I(\mathfrak{m}), v + I(\mathfrak{m}) \in H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . Alors  $uv + I(\mathfrak{m}) \in H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . En particulier,  $(u + I(\mathfrak{m}))(v + I(\mathfrak{m})) = uv + I(\mathfrak{m})$  définit une structure d'algèbre sur  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathfrak{n}$ . On a

$$\theta(x)(uv) = \theta(x)(u)v + u\theta(x)(v) \in I(\mathfrak{m})v + uI(\mathfrak{m}) \subset I(\mathfrak{m})$$

car  $I(\mathfrak{m})v \subset I(\mathfrak{m})$ . On en déduit que  $uv + I(\mathfrak{m}) \in H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . De plus, pour tout  $w + I(\mathfrak{m}) \in H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ,  $I(\mathfrak{m})w \subset I(\mathfrak{m})$  d'après (2.1). Par suite,  $(u + I(\mathfrak{m}))(v + I(\mathfrak{m})) = uv + I(\mathfrak{m})$ . Comme cela ne dépend pas du choix des représentants, la structure d'algèbre est bien définie. □

**Remarque 2.1.3.** *Lorsque  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ , d'après (2.1), l'application*

$$\Phi : H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \rightarrow \text{End}_{U(\mathfrak{g})} Q(\mathfrak{m})^{\text{op}}$$

*donnée par  $\Phi(u + I(\mathfrak{m}))(v + I(\mathfrak{m})) = vu + I(\mathfrak{m})$  où  $u + I(\mathfrak{m}) \in H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $v + I(\mathfrak{m}) \in Q(\mathfrak{m})$  est bien définie et c'est un isomorphisme d'algèbres.*

## 2.2 Analogie de la tranche de Slodowy

Soit  $(e, h, f)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$ . La *tranche de Slodowy* associée à l'élément nilpotent  $e$  est la sous-variété affine  $\chi + \kappa(\mathfrak{g}^f)$  de  $\mathfrak{g}^*$ . On définit dans ce paragraphe une variété affine  $\mathcal{S}$  admettant des propriétés analogues à celles vérifiées par la tranche de Slodowy. Plus précisément, on y montre que la variété  $\mathcal{S}$  est transverse aux orbites coadjointes et que l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $\mathcal{S}$  admet une structure naturelle de Poisson induite par la structure de Poisson sur l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $\mathfrak{g}^*$ .

Soit  $\mathfrak{s}$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{g}$  supplémentaire de  $[\mathfrak{n}, e]$  dans  $\mathfrak{m}^\perp$ .

**Lemme 2.2.1.** *On a*

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, e] \oplus \mathfrak{s}.$$

*Démonstration.* D'après la condition (A3) de la Définition 1.2.1,  $\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{g}, e] = \{0\}$ . D'autre part, d'après la condition (A4),  $\dim \mathfrak{n} = \dim[\mathfrak{n}, e]$ . Ainsi, on obtient

$$\dim \mathfrak{s} + \dim[\mathfrak{g}, e] = \dim \mathfrak{m}^\perp - \dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e = \dim \mathfrak{g},$$

grâce à la condition (A6). Le lemme s'ensuit. □

**Remarque 2.2.2.** Lorsque  $\Gamma$  est la graduation de Dynkin associée à  $h$ , alors, d'après la Remarque 1.2.10,  $\mathfrak{g}^f$  est un supplémentaire gradué de  $[\mathfrak{n}, e]$  dans  $\mathfrak{m}^\perp$ , donc  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}^f$  convient dans ce cas.

On pose

$$\mathcal{S} := \chi + \kappa(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{g}^*.$$

Rappelons que  $h_\Gamma$  est l'élément semisimple définissant  $\Gamma$ . Soit  $\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  le sous-groupe à un paramètre associé à  $\text{ad } h_\Gamma$ . Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g} ; \gamma(t)(x) = t^j x, \text{ pour tout } t \in \mathbb{C}^*\}.$$

On définit une opération  $\rho$  du groupe  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathfrak{g}$  en posant pour tous  $t \in \mathbb{C}^*$  et  $x \in \mathfrak{g}$ ,

$$\rho(t)(x) = t^a \gamma(t^{-1})(x).$$

Pour  $x \in \mathfrak{g}_j$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a  $\rho(t)(x) = t^{-j+a}x$ . En particulier, comme  $e \in \mathfrak{g}_a$   $\rho(t)(e) = e$ .

**Lemme 2.2.3.** L'opération  $\rho$  stabilise  $e + \mathfrak{s}$  et  $e + \mathfrak{m}^\perp$ . De plus, elle est contractante dans ces deux variétés, i.e.,  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t)(e + x) = e$  pour tout  $x \in \mathfrak{m}^\perp$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{m}^\perp$  sont des sous-espaces gradués de  $\mathfrak{g}$ , ils sont  $\text{ad } h_\Gamma$ -stables donc  $\rho$ -stables. D'autre part,  $\rho(t)(e) = e$ . On en déduit que  $\rho$  stabilise  $e + \mathfrak{s}$  et  $e + \mathfrak{m}^\perp$ . De plus, d'après la Remarque 1.2.2(2), on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t)(e + x) = e$  pour tout  $x \in \mathfrak{m}^\perp$ .  $\square$

**Théorème 2.2.4.** La variété affine  $\mathcal{S} = \chi + \kappa(\mathfrak{s})$  (resp.  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ ) est transverse aux orbites coadjointes de  $\mathfrak{g}^*$ . Précisément, pour tout  $\xi \in \mathcal{S}$  (resp.  $\xi \in \chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ ), on a  $T_\xi(G \cdot \xi) + T_\xi(\mathcal{S}) = \mathfrak{g}^*$  (resp.  $T_\xi(G \cdot \xi) + T_\xi(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)) = \mathfrak{g}^*$ ).

*Démonstration.* Montrons tout d'abord le théorème pour  $\mathcal{S}$ .

On identifie  $\mathfrak{g}^*$  à  $\mathfrak{g}$  via l'isomorphisme  $\kappa$ . Pour tout  $x \in e + \mathfrak{s}$ , on a  $T_x(G \cdot x) = [\mathfrak{g}, x]$  et  $T_x(e + \mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ . Il suffit donc de montrer que pour tout  $x \in e + \mathfrak{s}$  on a  $[\mathfrak{g}, x] + \mathfrak{s} = \mathfrak{g}$ . Soient alors  $x \in e + \mathfrak{s}$  et

$$\eta : G \times (e + \mathfrak{s}) \rightarrow \mathfrak{g}$$

l'application donnée par l'opération adjointe. Pour tout  $(g, X) \in G \times (e + \mathfrak{s})$ ,  $v \in T_g G$  et  $w \in \mathfrak{s}$ , l'application différentielle de  $\eta$  en  $(g, X)$  est donnée par (cf. e.g. [24, Proposition 29.1.4]) :

$$d\eta_{(g,X)}(v, w) = g([v, X]) + g(w). \quad (2.2)$$

Ainsi  $d\eta_{(\text{id}, e)}(v, w) = [v, e] + w$ . On déduit que l'application  $d\eta_{(\text{id}, e)}$  est surjective car  $[\mathfrak{g}, e] + \mathfrak{s} = \mathfrak{g}$  (cf. Lemme 2.2.1). Par conséquent,  $d\eta_{(\text{id}, X)}$  est surjective pour tout  $X$  dans un voisinage ouvert  $V$  de  $e$  dans  $e + \mathfrak{s}$ . Comme le morphisme  $\eta$  est  $G$ -équivariant pour l'action donnée par  $g.(g', x) = (gg', x)$ , on déduit que l'application  $d\eta_{(g,X)}$  est surjective pour tous  $X \in V$  et  $g \in G$ . D'après (2.2), il vient que

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, X] + \mathfrak{s}$$

pour tout  $X \in V$ . On pose  $Y := \{\rho(t)(x) ; t \in \mathbb{C}^*\}$  et on note  $Z$  l'adhérence de  $Y$  dans  $e + \mathfrak{s}$ . Comme l'opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $e + \mathfrak{s}$  est contractante,  $e$  appartient à  $Z$ . L'intersection  $V \cap Z$  est donc une partie ouverte non vide (elle contient  $e$ ) de  $Z$ . Or  $Z$  est une variété irréductible de  $e + \mathfrak{s}$  et  $Y$  est un ensemble constructible dense de  $Z$ . Ainsi,  $V \cap Y \neq \emptyset$ .

Soient  $X \in V$  et  $t \in \mathbb{C}^*$  tels que  $X = \rho(t)(x)$ . Comme  $\gamma(t^{-1})$  est un automorphisme de Lie de  $\mathfrak{g}$ , on a

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}, X] &= [\mathfrak{g}, \rho(t)(x)] = [\mathfrak{g}, t^a \gamma(t^{-1})(x)] = t^a [\mathfrak{g}, \gamma(t^{-1})(x)] \\ &= t^a [\gamma(t^{-1})(\mathfrak{g}), \gamma(t^{-1})(x)] = t^a \gamma(t^{-1})([\mathfrak{g}, x]) = \rho(t)([\mathfrak{g}, x]). \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, X] + \mathfrak{s} = \rho(t)([\mathfrak{g}, x] + \mathfrak{s})$  car  $\rho(t)(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ . Par suite on a  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, x] + \mathfrak{s}$  ce qui complète la démonstration du théorème pour  $\mathcal{S}$ . Les mêmes arguments s'appliquent pour  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  d'après la Remarque 1.2.2 et le Lemme 2.2.3.  $\square$

Soit  $N$  le sous-groupe unipotent de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}$ .

**Lemme 2.2.5.** *L'image de l'application adjointe  $N \times (e + \mathfrak{m}^\perp) \rightarrow \mathfrak{g}$  est contenue dans  $e + \mathfrak{m}^\perp$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre ad-nilpotente de  $\mathfrak{g}$ , le groupe  $N$  est engendré par les éléments  $\exp(\text{ad } x)$  où  $x$  parcourt  $\mathfrak{n}$ . Il suffit de montrer que pour tout  $x \in \mathfrak{n}$  et tout  $y \in \mathfrak{m}^\perp$ ,  $\exp(\text{ad } x)(e + y)$  appartient à  $e + \mathfrak{m}^\perp$ . Soient  $x \in \mathfrak{n}$  et  $y \in \mathfrak{m}^\perp$ . On a

$$\exp(\text{ad } x)(e + y) = e + y + [x, e + y] + \cdots + \frac{1}{k!}(\text{ad } x)^k(e + y)$$

pour  $k$  suffisamment grand car  $\text{ad } x$  est nilpotent. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(\text{ad } x)^i e \in \mathfrak{m}^\perp$  d'après la Remarque 1.2.2. D'autre part, comme  $y \in \mathfrak{m}^\perp$ , on a  $\langle m, [x, y] \rangle = \langle [m, x], y \rangle = 0$  pour tout  $m \in \mathfrak{m}$  d'après la condition (A5) de la Définition 1.2.1, d'où  $[x, y] \in \mathfrak{m}^\perp$ . Ainsi,  $(\text{ad } x)^i y \in \mathfrak{m}^\perp$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $\exp(\text{ad } x)(e + y) \in e + \mathfrak{m}^\perp$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

Grâce au Lemme 2.2.5, on définit par restriction à  $N \times (e + \mathfrak{s})$  de l'application adjointe  $N \times (e + \mathfrak{m}^\perp) \rightarrow \mathfrak{g}$ , l'application

$$\alpha : N \times (e + \mathfrak{s}) \longrightarrow e + \mathfrak{m}^\perp.$$

On définit une opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $N \times (e + \mathfrak{s})$  en posant :

$$t.(g, x) := (\gamma(t^{-1})g\gamma(t), \rho(t)(x)),$$

pour tous  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $g \in N$  et  $x \in e + \mathfrak{s}$ . L'opération est bien définie. En effet,  $\gamma(t^{-1})(\exp \text{ad } x)\gamma(t) = \exp \text{ad } (\gamma(t^{-1})(x))$  appartient à  $N$  pour tout  $x \in \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{n}$  étant gradué.

**Lemme 2.2.6.** (i) *Pour tout  $(g, x) \in N \times (e + \mathfrak{s})$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow 0} t.(g, x) = (\mathbf{1}_G, e)$ .*

(ii) *Le morphisme  $\alpha$  est  $\mathbb{C}^*$ -équivariant où l'opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $e + \mathfrak{m}^\perp$  est donnée par  $\rho$ .*

*Démonstration.* (i) Comme l'opération  $\rho$  de  $\mathbb{C}^*$  dans  $e + \mathfrak{s}$  est contractante (cf. Lemme 2.2.3) et que  $\mathfrak{n}$  est nilpotente, il suffit de montrer que  $\gamma(t^{-1})(\exp \operatorname{ad} x)\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \mathbf{1}_G$  pour tout  $x \in \mathfrak{n}$ . Soit  $x \in \mathfrak{n}$ . D'après la troisième inclusion de (A2), on a  $\gamma(t^{-1})(x) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ , d'où

$$\gamma(t^{-1})(\exp \operatorname{ad} x)\gamma(t) = \exp \operatorname{ad} (\gamma(t^{-1})(x)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \exp(0) = \mathbf{1}_G.$$

(ii) Pour  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $g \in G$  et  $x \in e + \mathfrak{m}^\perp$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha(t.(g, x)) &= \alpha(\gamma(t^{-1})g\gamma(t), \rho(t)(x)) = \gamma(t^{-1})g\gamma(t)(\rho(t)(x)) \\ &= \gamma(t^{-1})g\gamma(t)(t^a\gamma(t^{-1})(x)) = t^a\gamma(t^{-1})(g(x)) \\ &= \rho(t)(g(x)) = \rho(t)\alpha(g, x). \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.2.7.** *L'application*

$$\alpha : N \times (e + \mathfrak{s}) \longrightarrow e + \mathfrak{m}^\perp$$

*est un isomorphisme de variétés affines.*

*Démonstration.* Rappelons l'énoncé général suivant formulé dans [11, Proof of Lemma 2.1] :

*Un morphisme équivariant  $\beta : X_1 \rightarrow X_2$  entre deux  $\mathbb{C}^*$ -variétés affines lisses munies d'opérations contractantes de  $\mathbb{C}^*$  qui induit un isomorphisme entre les espaces tangents des points fixes par  $\mathbb{C}^*$  est un isomorphisme.*

D'après le Lemme 2.2.6, il suffit de montrer que la différentielle de  $\alpha$  au point  $(\mathbf{1}_G, e)$  induit un isomorphisme entre l'espace tangent  $T_{(\mathbf{1}_G, e)}(N \times (e + \mathfrak{s})) = \mathfrak{n} \times \mathfrak{s}$  de  $N \times (e + \mathfrak{s})$  en  $(\mathbf{1}_G, e)$  et l'espace tangent  $T_e(e + \mathfrak{m}^\perp) = \mathfrak{m}^\perp$  de  $e + \mathfrak{m}^\perp$  en  $e$ . En effet, les ensembles des points fixes par  $\mathbb{C}^*$  de  $N \times (e + \mathfrak{s})$  et  $e + \mathfrak{m}^\perp$  sont  $\{(\mathbf{1}_G, e)\}$  et  $\{e\}$  respectivement.

On a  $d\alpha_{(\mathbf{1}_G, e)}(\mathfrak{n} \times \mathfrak{s}) = [\mathfrak{n}, e] + \mathfrak{s}$  par un calcul similaire à celui de la démonstration du Théorème 2.2.4. Comme  $[\mathfrak{n}, e] + \mathfrak{s} = \mathfrak{m}^\perp$ , l'application  $d\alpha_{(\mathbf{1}_G, e)}$  est surjective. Par conséquent, c'est un isomorphisme entre  $\mathfrak{n} \times \mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{m}^\perp$  pour des raisons de dimension. Le théorème s'ensuit. □

En plus de cette propriété importante de transversalité, la variété  $\mathcal{S}$  admet une structure de Poisson, tout comme la tranche de Slodowy. Afin de montrer ceci, rappelons tout d'abord la structure de Poisson canonique sur le dual  $\mathfrak{g}^*$ .

**Définition 2.2.8.** *La structure de Poisson sur  $\mathfrak{g}^*$  définie par,*

$$\{F, G\}(\xi) := \xi([d_\xi F, d_\xi G])$$

*pour tous  $F, G \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  et  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  où  $d_\xi F \in (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ , est appelée la structure de Lie-Poisson canonique sur  $\mathfrak{g}^*$ .*

Toute orbite coadjointe dans  $\mathfrak{g}^*$  admet une structure naturelle de variété symplectique [8, Proposition 1.1.5].

**Proposition 2.2.9.** *La variété  $\mathcal{S} \subset \mathfrak{g}^*$  hérite de la structure de Poisson sur  $\mathfrak{g}^*$ .*

*Démonstration.* D'après la Proposition 3.10 et la Remarque 3.11 de [25] il suffit de vérifier les conditions suivantes :

- (i)  $\mathcal{S}$  est transverse aux orbites coadjointes de  $\mathfrak{g}^*$ .
- (ii) Pour tout  $\xi \in \mathcal{S}$ , on a

$$\#_{\xi} \text{Ann}(\text{T}_{\xi} \mathcal{S}) \cap \text{T}_{\xi}(\mathcal{S}) = \{0\},$$

où  $\text{Ann}(\text{T}_{\xi} \mathcal{S})$  est l'annulateur de  $\text{T}_{\xi} \mathcal{S} \simeq \kappa(\mathfrak{s})$  dans  $(\text{T}_{\xi} \mathfrak{g}^*)^* \simeq (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$  et

$$\#_{\xi} : (\text{T}_{\xi} \mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g} \longrightarrow \text{T}_{\xi} \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*, \alpha \longmapsto \xi([\alpha, \cdot]).$$

Tout d'abord, la condition (i) est satisfaite grâce au Théorème 2.2.4. Il reste à montrer la condition (ii). On a

$$\text{Ann}(\text{T}_{\xi} \mathcal{S}) = \{x \in \mathfrak{g} ; \eta(x) = 0, \text{ pour tout } \eta \in \kappa(\mathfrak{s})\} = \mathfrak{s}^{\perp}.$$

Par conséquent,

$$\#_{\xi} \text{Ann}(\text{T}_{\xi} \mathcal{S}) = \langle \kappa^{-1}(\xi), [\mathfrak{s}^{\perp}, \cdot] \rangle = \langle [\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^{\perp}], \cdot \rangle = \kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^{\perp}]).$$

On est alors amené à vérifier que l'intersection,

$$\kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^{\perp}]) \cap \text{T}_{\xi}(\mathcal{S}) = \kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^{\perp}]) \cap \kappa(\mathfrak{s}) = \kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^{\perp}] \cap \mathfrak{s})$$

est nulle. La proposition s'ensuit grâce au Lemme 2.2.10 ci-dessous.

**Lemme 2.2.10.** *Soit  $\xi \in \mathcal{S}$ . Alors  $[\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^{\perp}] \cap \mathfrak{s} = \{0\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $Y \subset e + \mathfrak{s}$  l'ensemble des  $y \in e + \mathfrak{s}$  vérifiant  $[y, \mathfrak{s}^{\perp}] \cap \mathfrak{s} \neq \{0\}$ . Comme  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{s}^{\perp}$  sont ad  $h_{\Gamma}$ -stables, on a pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\gamma(t^{-1})([y, \mathfrak{s}^{\perp}]) \cap \mathfrak{s} = [\gamma(t^{-1})y, \mathfrak{s}^{\perp}] \cap \mathfrak{s},$$

d'où  $\rho(t)([y, \mathfrak{s}^{\perp}] \cap \mathfrak{s}) = [\rho(t)y, \mathfrak{s}^{\perp}] \cap \mathfrak{s}$ . Par suite,  $\rho$  stabilise  $Y$ . D'autre part, d'après le Lemme 2.2.1,  $e$  appartient à  $(e + \mathfrak{s}) \setminus Y$ . Ainsi, en tout point  $y'$  dans un voisinage ouvert  $V$  de  $e$  dans  $e + \mathfrak{s}$ , on a  $y' \in (e + \mathfrak{s}) \setminus Y$ .

Supposons que  $Y \neq \emptyset$  et soit  $y \in Y$ . Comme  $\rho$  stabilise  $Y$ , on a  $\rho(t)y \in Y$  pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ . Or, pour  $t$  suffisamment petit,  $\rho(t)y$  appartient au voisinage ouvert  $V$  de  $e$  d'après le Lemme 2.2.3, d'où la contradiction. □

□

## 2.3 Filtration de Kazhdan généralisée

Soient  $\mathfrak{s}$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{m}^{\perp}$  supplémentaire de  $[\mathfrak{n}, e]$  et  $\mathcal{S} := \chi + \kappa(\mathfrak{s})$ . On note plus simplement  $H$  l'algèbre  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  définie par (2.1). De la même manière, on désigne par  $I$  et  $Q$  l'idéal  $I(\mathfrak{m})$  et le quotient  $Q(\mathfrak{m})$  respectivement. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence d'une filtration croissante  $\mathcal{F}$  sur  $U(\mathfrak{g})$  qui induit une filtration (positive) sur  $H$ . Cette structure d'algèbre filtrée ainsi définie sur  $H$  joue un rôle important dans le Paragraphe 2.4; on y montrera que l'algèbre

graduée associée  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ , l'algèbre des fonctions régulières sur  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $\mathfrak{g}^*$ . L'isomorphisme canonique entre l'algèbre symétrique  $S(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  envoie un monôme  $x_1 \cdots x_j$  de  $S(\mathfrak{g})$  sur l'élément  $F_{x_1 \cdots x_j}$  défini par  $F_{x_1 \cdots x_j}(\xi) = \xi(x_1) \cdots \xi(x_j)$  pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ . On identifie désormais  $S(\mathfrak{g})$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  via cet isomorphisme. L'opération adjointe de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}$  induit une opération, encore notée  $\text{ad}$ , de  $\mathfrak{g}$  dans  $S(\mathfrak{g})$  qui se transporte en une opération de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ .

On définit une opération  $\rho^\sharp$  du groupe  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathfrak{g}^*$  en posant pour tous  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  :

$$\rho^\sharp(t)(\xi) := t^{-a} \gamma(t)(\xi).$$

Remarquons que  $\rho^\sharp$  est l'opération contragrédiente de  $\rho$ . Ceci induit une opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  donnée par :

$$\rho^\sharp(t)(F)(\xi) := F(\rho^\sharp(t^{-1})(\xi)),$$

pour tous  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $F \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  et  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ . On pose, pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k) := \{F \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \mid \rho^\sharp(t)(F) = t^k F, \text{ pour tout } t \in \mathbb{C}^*\}.$$

**Lemme 2.3.1.** *Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le sous-espace  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$  de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  est engendré par les monômes de la forme  $x = x_1 \dots x_j$  vérifiant  $(\text{ad } h_\Gamma)x = ix$  et  $i + aj = k$ .*

*Démonstration.* Soit  $x = x_1 \dots x_j$  un monôme de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  vérifiant  $(\text{ad } h_\Gamma)x = ix$  et  $i + aj = k$ . Pour  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a :

$$\rho^\sharp(t)(x)(\xi) = \prod_{l=1}^j (\rho^\sharp(t^{-1})(\xi))(x_l) = \prod_{l=1}^j (t^a \gamma(t^{-1})(\xi))(x_l) = t^{aj} \xi(\gamma(t)(x)).$$

Comme  $(\text{ad } h_\Gamma)(x) = ix$ , on a  $\gamma(t)(x) = t^i x$ . On en déduit que  $\rho^\sharp(t)(x) = t^{i+aj} x$ , i.e.,  $x \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](i + aj) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$ .

D'autre part, un élément  $x$  de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$  s'écrit  $x = \sum_l x_l$  où  $x_l \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  est tel que  $(\text{ad } h_\Gamma)(x_l) = i_l x_l$  et  $x_l = x_{1,l} \dots x_{j,l}$  avec  $x_{t,l} \in \mathfrak{g}$  et  $i_l + aj_l = k$  pour tout  $l$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Lemme 2.3.2.** (i) *Pour  $x \in \mathfrak{g}_j$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a  $\rho^\sharp(t)\kappa(x) = t^{j-a}\kappa(x)$ . En particulier, comme  $e \in \mathfrak{g}_a$ , on a  $\rho^\sharp(t)\chi = \chi$ .*

(ii) *Les sous-espaces  $\kappa(\mathfrak{s})$  et  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  sont stables par  $\rho^\sharp$  et les poids de  $\rho^\sharp$  sur  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp) \supset \kappa(\mathfrak{s})$  sont des entiers strictement négatifs.*

*Démonstration.* (i) Pour  $x \in \mathfrak{g}_j$ , on a  $\rho^\sharp(t)\kappa(x) = t^{-a}\gamma(t)\kappa(x) = t^{-a}\kappa(\gamma(t)(x)) = t^{j-a}\kappa(x)$ .

(ii) Les sous-espaces  $\kappa(\mathfrak{s})$  et  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  sont stables par  $\rho^\sharp$  car  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{m}^\perp$  sont stables par  $\text{ad } h_\Gamma$ . Comme  $\mathfrak{m}^\perp \subset \bigoplus_{j \leq a-1} \mathfrak{g}_j$  (cf. Remarque 1.2.2), les poids sur  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  sont les entiers  $j - a$ , pour  $j \leq a - 1$ . Ce sont donc des entiers strictement négatifs.  $\square$

D'après le Lemme 2.3.2, l'application  $\rho^\sharp$  induit une opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}[\mathcal{S}] = \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{s})]$  et dans  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ . Ceci définit une structure d'algèbres graduées sur ces deux algèbres.

**Lemme 2.3.3.** *La graduation sur  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$  (resp. sur  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ ) est positive au sens où  $\mathbb{C}[\mathcal{S}](k) = 0$  (resp.  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)](k) = 0$ ) pour tout  $k < 0$  et  $\mathbb{C}[\mathcal{S}](0) \simeq \mathbb{C}$  (resp.  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)](0) \simeq \mathbb{C}$ ).*

*Démonstration.* Commençons par démontrer le lemme pour  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ . On fixe une base  $(z_1, \dots, z_s)$  de  $\mathfrak{s}$  où  $z_i \in \mathfrak{g}_{d_i}$  avec  $d_i \in \mathbb{Z}$ . D'après la Remarque 1.2.2, on a  $d_i \leq a - 1$ . Les éléments  $(e, z_1, \dots, z_s)$  sont alors linéairement indépendants. On pose  $z_0 := e$  et on complète cet ensemble par des éléments homogènes relativement à la graduation  $\Gamma$  en une base  $(z_0, z_1, \dots, z_s, z_{s+1}, \dots, z_r)$  de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $(\varphi_0, \dots, \varphi_r)$  la base duale de  $(\kappa(z_0), \dots, \kappa(z_r))$ . Alors  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = \mathbb{C}[\varphi_0, \dots, \varphi_r]$  et, pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ , on a

$$\rho^\sharp(t)(\varphi_i) \left( \sum_{j=0}^r c_j \kappa(z_j) \right) = \varphi_i(t^{-d_i+a} c_i \kappa(z_i)), \text{ avec } c_i \in \mathbb{C}.$$

Par suite,  $\rho^\sharp(t)(\varphi_i) = t^{-d_i+a} \varphi_i$ . Soit  $\mathcal{I}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  l'idéal des fonctions polynomiales s'annulant sur  $\mathcal{S}$ . Alors

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \{F \in \mathbb{C}[\varphi_0, \dots, \varphi_r] ; F(\kappa(e + x)) = 0, \forall x \in \mathfrak{s}\}.$$

Par suite, on constate que  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  est l'idéal de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  engendré par les fonctions  $\varphi_0 - 1, \varphi_{s+1}, \dots, \varphi_r$ . Alors,  $\mathbb{C}[\mathcal{S}] = \mathbb{C}[\psi_1, \dots, \psi_s]$  où  $\psi_i$  désigne la classe de  $\varphi_i$  modulo  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  pour tout  $i$ . Remarquons que  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  est stable par  $\rho^\sharp$ . En effet, pour  $F \in \mathcal{I}(\mathcal{S})$ ,  $\rho^\sharp(t)(F)(\xi) = F(\rho^\sharp(t^{-1})(\xi)) = 0$  car  $\rho^\sharp(t^{-1})(\xi) \in \mathcal{S}$ . Comme pour  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\psi_i$  est de poids  $-d_i + a \geq 1$  relativement à l'opération  $\rho^\sharp$  car  $d_i \leq a - 1$ . On en déduit que la graduation sur  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$  est positive. De plus,  $F \in \mathbb{C}[\mathcal{S}]$  est de poids zéro si et seulement si  $F$  est constante.

Les mêmes arguments s'appliquent pour  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  car  $\mathfrak{m}^\perp \subset \bigoplus_{j \leq a-1} \mathfrak{g}_j$  (cf. Remarque 1.2.2).  $\square$

Soit  $(U^j(\mathfrak{g}))_j$  la filtration standard de  $U(\mathfrak{g})$ . Rappelons que  $U^j(\mathfrak{g})$  est le sous-espace de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x_1 \dots x_l$  avec  $l \leq j$  et  $x_1, \dots, x_l \in \mathfrak{g}$ . L'opération adjointe de  $h_\Gamma$  dans  $\mathfrak{g}$  s'étend de façon unique en une dérivation sur  $U(\mathfrak{g})$ , i.e.,

$$(\text{ad } h_\Gamma)(x_1 \dots x_j) = \sum_{i=1}^j x_1 \dots x_{i-1} (\text{ad } h_\Gamma)(x_i) x_{i+1} \dots x_j,$$

où  $x_i \in \mathfrak{g}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, j\}$ . On pose pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $U_i(\mathfrak{g}) := \{x \in U(\mathfrak{g}) ; (\text{ad } h_\Gamma)(x) = ix\}$ . Soit  $\mathcal{F}$  la filtration croissante de  $U(\mathfrak{g})$  définie par,

$$\mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) := \sum_{i+a_j \leq k} U_i(\mathfrak{g}) \cap U^j(\mathfrak{g}), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pour  $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $x \in U^r(\mathfrak{g})$  (resp.  $x \in U_r(\mathfrak{g})$ ) et  $y \in U^s(\mathfrak{g})$  (resp.  $y \in U_s(\mathfrak{g})$ ), on remarque que  $[x, y] \in U^{r+s-1}(\mathfrak{g})$  (resp.  $[x, y] \in U_{r+s}(\mathfrak{g})$ ). Si  $x \in \mathcal{F}_r U(\mathfrak{g})$  et  $y \in \mathcal{F}_s U(\mathfrak{g})$ , alors on a  $[x, y] \in \mathcal{F}_{r+s-a} U(\mathfrak{g})$ . On désigne par  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  l'algèbre graduée de  $U(\mathfrak{g})$  par rapport à la filtration  $\mathcal{F}$ , i.e.,  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_k \text{gr}_{\mathcal{F}, k} U(\mathfrak{g})$  où  $\text{gr}_{\mathcal{F}, k} U(\mathfrak{g}) := \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) / \mathcal{F}_{k-1} U(\mathfrak{g})$ . D'après le Lemme 2.3.1, on a un isomorphisme d'algèbres graduées  $\mathfrak{g}$ -équivariant entre  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  qui envoie  $\text{gr}_{\mathcal{F}, k} U(\mathfrak{g})$  sur  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$ .

**Remarque 2.3.4.** Comme l'algèbre graduée  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  est commutative, elle admet une structure de Poisson donnée comme suit. Pour  $u_1 \in \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g})/\mathcal{F}_{k-1} U(\mathfrak{g})$  et  $u_2 \in \mathcal{F}_l U(\mathfrak{g})/\mathcal{F}_{l-1} U(\mathfrak{g})$ , soit  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) un représentant de  $u_1$  dans  $\mathcal{F}_k U(\mathfrak{g})$  (resp.  $u_2$  dans  $\mathcal{F}_l U(\mathfrak{g})$ ). Alors

$$\{u_1, u_2\} := v_1 v_2 - v_2 v_1 \pmod{\mathcal{F}_{k+l-a-2} U(\mathfrak{g})}.$$

En particulier, l'isomorphisme entre  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  est un morphisme d'algèbres de Poisson.

Rappelons que  $Q$  est le quotient  $U(\mathfrak{g})/I$ . Soit  $\pi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow Q$  l'application quotient et posons

$$\mathcal{F}_k Q := \pi(\mathcal{F}_k U(\mathfrak{g})), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ceci définit une structure de  $U(\mathfrak{g})$ -module filtré sur  $Q$ .

**Lemme 2.3.5.** Pour tout  $k < 0$ , on a  $\mathcal{F}_k Q = \{0\}$ .

*Démonstration.* Soit  $k < 0$ . Comme  $\mathfrak{m}$  est ad  $h_{\Gamma}$ -stable, il existe une base

$$(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_r)$$

de  $\mathfrak{g}$ , avec  $y_i \in \mathfrak{g}_{d_i}$  ( $d_i \in \mathbb{Z}$ ), telle que  $(y_1, \dots, y_m)$  soit une base de  $\mathfrak{m}$ . Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , posons

$$\tilde{y}_i = y_i - \chi(y_i),$$

Pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$ , considérons la propriété suivante :

$$(\mathcal{H}_l) : \quad \pi(z) = 0 \text{ pour tout } z \in \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) \cap U^l(\mathfrak{g}).$$

Montrons par récurrence  $(\mathcal{H}_l)$  pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$ ; le lemme en découlera.

Montrons tout d'abord  $(\mathcal{H}_1)$ . Soit  $z \in \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) \cap U^1(\mathfrak{g})$ . Alors  $z$  s'écrit,  $z = \sum_{i=1}^r c_i y_i$  avec  $(c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{C}^r$ , et on a

$$a + \max(d_i; i \in \{1, \dots, r\}) \leq k < 0.$$

Ceci implique que  $d_i < -a$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Par suite, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on a  $\tilde{y}_i = y_i$  car  $e \in \mathfrak{g}_a$ . Ainsi,  $z$  appartient à  $I$  et  $\pi(z) = 0$ , ce qui prouve  $(\mathcal{H}_1)$ .

Supposons  $(\mathcal{H}_{l-1})$  pour un certain  $l \geq 2$  et montrons  $(\mathcal{H}_l)$ . Soit  $z \in \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) \cap U^l(\mathfrak{g})$ . Pour  $\underline{\nu} = (\nu_{m+1}, \dots, \nu_r, \nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbb{N}^r$ , on note  $y^{\underline{\nu}}$  l'élément

$$y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \cdots y_r^{\nu_r} y_1^{\nu_1} \cdots y_m^{\nu_m}$$

de  $U(\mathfrak{g})$ . L'élément  $z$  s'écrit

$$z = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^r} c_{\underline{\nu}} y^{\underline{\nu}},$$

où les  $r$ -uplets  $c_{\underline{\nu}}$  sont presque tous nuls. Soit  $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^r$  tel que  $c_{\underline{\nu}} \neq 0$ . Alors

$$y^{\underline{\nu}} \in \mathfrak{g}_{\nu_1 d_1 + \cdots + \nu_r d_r} \cap U^{\nu_1 + \cdots + \nu_r}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} k &\geq \nu_1 d_1 + \cdots + \nu_r d_r + a(\nu_1 + \cdots + \nu_r) \\ &\geq \underbrace{(a + d_{m+1})\nu_{m+1} + \cdots + (a + d_r)\nu_r}_{>0 \text{ car pour } i \geq m+1, d_i > -a.} + (a + d_1)\nu_1 + \cdots + (a + d_m)\nu_m. \end{aligned}$$

Comme  $k < 0$ , il existe au moins  $s' \in \{1, \dots, m\}$ , tel que  $\nu_{s'} > 0$  et  $d_{s'} < -a$ . Soit  $s$  l'entier maximal  $s'$  tel que  $\nu_{s'} > 0$  et  $d_{s'} < -a$ . Par définition de  $s$ , on a  $\chi(y_s) = 0$  et  $y_s = \tilde{y}_s$  appartient donc à l'idéal  $I$ . On a :

$$\begin{aligned} y^\underline{\nu} &= y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \cdots y_r^{\nu_r} y_1^{\nu_1} \cdots y_{s-1}^{\nu_{s-1}} y_s^{\nu_s} y_{s+1}^{\nu_{s+1}} \cdots y_m^{\nu_m} \\ &= y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \cdots y_r^{\nu_r} y_1^{\nu_1} \cdots y_{s-1}^{\nu_{s-1}} y_{s+1}^{\nu_{s+1}} \cdots y_m^{\nu_m} y_s^{\nu_s} \\ &\quad + y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \cdots y_r^{\nu_r} y_1^{\nu_1} \cdots y_{s-1}^{\nu_{s-1}} [y_s^{\nu_s}, y_{s+1}^{\nu_{s+1}} \cdots y_m^{\nu_m}]. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} u_1 &:= y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \cdots y_r^{\nu_r} y_1^{\nu_1} \cdots y_{s-1}^{\nu_{s-1}} y_{s+1}^{\nu_{s+1}} \cdots y_m^{\nu_m} y_s^{\nu_s}; \\ u_2 &:= y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \cdots y_r^{\nu_r} y_1^{\nu_1} \cdots y_{s-1}^{\nu_{s-1}} [y_s^{\nu_s}, y_{s+1}^{\nu_{s+1}} \cdots y_m^{\nu_m}]. \end{aligned}$$

On a :

$$u_2 \in U_{d_1 \nu_1 + \cdots + d_r \nu_r}(\mathfrak{g}) \cap U^{l-1}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{F}_{k-a} U(\mathfrak{g}) \cap U^{l-1}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) \cap U^{l-1}(\mathfrak{g}).$$

D'après  $(\mathcal{H}_{l-1})$ , on a  $\pi(u_2) = 0$ , i.e.  $u_2 \in I$ . Alors

$$y^\underline{\nu} = u_1 + u_2,$$

avec  $\pi(u_2) = 0$ .

Comme  $y_s = \tilde{y}_s$ , on a  $u_1 \in I$ . Il vient alors  $\pi(y^\underline{\nu}) = \pi(u_1) + \pi(u_2) = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^r$  tel que  $a_{\underline{\nu}} \neq 0$ , on en déduit que  $\pi(z) = 0$ . On a ainsi montré  $(\mathcal{H}_l)$ . Par récurrence, le lemme s'ensuit.  $\square$

Soit  $\text{gr}(\pi) : \text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q$  le morphisme gradué surjectif associé à  $\pi$ , i.e., pour  $u \in \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g})$ , on a  $\text{gr}(\pi)(u + \mathcal{F}_{k-1} U(\mathfrak{g})) = \pi(u) + \mathcal{F}_{k-1} Q$ . On a la suite exacte de  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$ -modules

$$0 \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} I \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \rightarrow 0.$$

En particulier,  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  est un idéal de  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$ . On en déduit que  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q$  admet une structure d'algèbre avec  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q \simeq \text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) / \text{gr}_{\mathcal{F}} I$  (cf. e.g. [24, Proposition 7.5.3]). De plus,  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  est le noyau de  $\text{gr}(\pi)$ .

Soit  $\mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp))$  l'idéal de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  formé des fonctions polynomiales sur  $\mathfrak{g}^*$  qui s'annulent sur  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ .

**Lemme 2.3.6.** *L'image du noyau  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  de  $\text{gr}(\pi)$  par l'isomorphisme  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  est  $\mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp))$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathfrak{m}$  est  $\text{ad } h_\Gamma$ -stable, il existe une base

$$(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_r)$$

de  $\mathfrak{g}$ , avec  $y_i \in \mathfrak{g}_{d_i}$  ( $d_i \in \mathbb{Z}$ ), telle que  $(y_1, \dots, y_m)$  soit une base de  $\mathfrak{m}$ . Soit  $i \in \{1, \dots, r\}$ . On pose,

$$\tilde{y}_i := y_i - \chi(y_i).$$

D'après la condition (A2), on a  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{m}$ . Par suite, pour  $i > m$ , on a  $d_i \geq -a+1$  et  $\chi(y_i) = \langle e, y_i \rangle = 0$  car  $e \in \mathfrak{g}_a$ . Par conséquent,  $\tilde{y}_i = y_i \in U^1(\mathfrak{g}) \cap U_{d_i}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{F}_{a+d_i}U(\mathfrak{g})$ . Soit  $(y_1^*, \dots, y_r^*)$  la base duale de  $(y_1, \dots, y_r)$ . On a

$$\chi = \sum_{j=1}^m \chi(y_j)y_j^* + \sum_{j=m+1}^r \chi(y_j)y_j^* = \sum_{j=1}^m \chi(y_j)y_j^*. \quad (2.3)$$

En outre,  $\ker \text{gr}(\pi) = \text{gr}_{\mathcal{F}}I$  est engendré par les éléments  $\tilde{y}_i + \mathcal{F}_{a+d_i-1}U(\mathfrak{g})$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Soit  $J$  l'image de  $\text{gr}_{\mathcal{F}}I$  par l'isomorphisme  $\text{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ . Alors  $J$  est engendré par les éléments  $\tilde{y}_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , et

$$Z(J) = \left\{ \sum_{j=1}^m \chi(y_j)y_j^* + \sum_{j=m+1}^r \lambda_j y_j^* \in \mathfrak{g}^*; \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \right\}$$

est l'ensemble des zéros communs de  $J$  dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ . Comme  $(y_{m+1}^*, \dots, y_r^*)$  est une base de  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ ,  $Z(J) = \chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  d'après (2.3). Comme  $J$  et  $\text{gr}_{\mathcal{F}}I$  sont engendrés par des fonctions affines, ils sont radiciels, d'où  $Z(J) = \text{gr}_{\mathcal{F}}I$ .  $\square$

**Proposition 2.3.7.** *On a un isomorphisme  $\mathfrak{n}$ -équivariant,*

$$\vartheta : \text{gr}_{\mathcal{F}}Q \rightarrow \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)],$$

entre les algèbres graduées  $\text{gr}_{\mathcal{F}}Q$  et  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ .

*Démonstration.* Rappelons que l'on a un isomorphisme d'algèbres graduées  $\mathfrak{g}$ -équivariant entre  $\text{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ . D'après le Lemme 2.3.6, on en déduit les isomorphismes suivants :

$$\text{gr}_{\mathcal{F}}Q \simeq \text{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})/\text{gr}_{\mathcal{F}}I \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]/\mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)) \simeq \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)].$$

Il s'ensuit qu'on a un isomorphisme d'algèbres graduées  $\vartheta : \text{gr}_{\mathcal{F}}Q \rightarrow \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ . Comme  $\text{gr}_{\mathcal{F}}I$  est  $\mathfrak{n}$ -stable, l'isomorphisme  $\text{gr}_{\mathcal{F}}I \simeq \mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp))$  est  $\mathfrak{n}$ -équivariant. Par conséquent,  $\vartheta$  est  $\mathfrak{n}$ -équivariant.  $\square$

## 2.4 Théorème principal

La filtration  $(\mathcal{F}_k Q)_k$  induit une filtration  $(\mathcal{F}_k H := H \cap \mathcal{F}_k Q)_k$  sur  $H$ . Par conséquent, on a une application injective graduée  $\iota : \text{gr}_{\mathcal{F}}H \hookrightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}}Q$ . C'est un morphisme d'algèbres comme on le vérifie aisément. En résumé,

**Proposition 2.4.1.** *L'application  $\iota : \text{gr}_{\mathcal{F}}H \hookrightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}}Q$  est un morphisme d'algèbres graduées injectif.*

Soit  $\mu : \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}]$  le comorphisme correspondant à l'inclusion  $\mathcal{S} \hookrightarrow \chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ . D'après la Proposition 2.3.7, on en déduit un morphisme d'algèbres graduées  $\nu : \text{gr}_{\mathcal{F}} H \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ .

**Théorème 2.4.2.** *Le morphisme*

$$\nu : \text{gr}_{\mathcal{F}} H \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}]$$

*est un isomorphisme d'algèbres de Poisson graduées.*

Afin de montrer ce résultat, on suit la stratégie de [11, Section 5] qui s'applique dans notre cas comme on le vérifiera. On détaille ici la démonstration qui repose sur la théorie des suites spectrales. Notre principale référence pour les suites spectrales est [5].

Rappelons que l'opération adjointe de  $\mathfrak{n}$  dans  $U(\mathfrak{g})$  induit une opération dans  $Q$  (car  $\mathfrak{n}$  stabilise  $I$ ). Considérons le complexe des cochaînes de Chevalley-Eilenberg du  $\mathfrak{n}$ -module  $Q$  :

$$0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^i \rightarrow \dots$$

où  $C^i := \text{Hom}(\bigwedge^i \mathfrak{n}, Q) \simeq (\bigwedge^i \mathfrak{n})^* \otimes Q \simeq \bigwedge^i \mathfrak{n}^* \otimes Q$ , et soit  $\partial : C^\bullet \rightarrow C^{\bullet+1}$  la différentielle correspondante. Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\mathfrak{n}^*(j) := \{\xi \in \mathfrak{n}^*; (\text{ad}^* h_\Gamma)\xi = j\xi\}$  où  $\text{ad}^* h_\Gamma$  désigne l'opération coadjointe de  $h_\Gamma$  dans  $\mathfrak{g}^*$ . On constate que  $\mathfrak{n}^*(j) \simeq (\mathfrak{g}_{-j} \cap \mathfrak{n})^*$ . Comme  $\mathfrak{n} \subset \bigoplus_{j \leq -1} \mathfrak{g}_j$ , on a  $\mathfrak{n}^* = \bigoplus_{j \geq 1} \mathfrak{n}^*(j)$ . Soit  $i \in \mathbb{N}$ . On a

$$\bigwedge^i \mathfrak{n}^* = \bigoplus_{q \geq 1} (\bigwedge^i \mathfrak{n}^*)_q \quad \text{où} \quad (\bigwedge^i \mathfrak{n}^*)_q := \bigoplus_{j_1 + \dots + j_i = q} \mathfrak{n}^*(j_1) \wedge \dots \wedge \mathfrak{n}^*(j_i).$$

On définit une filtration croissante sur  $C^i$  en posant :

$$\mathcal{F}_k C^i := \sum_{q+j \leq k} (\bigwedge^i \mathfrak{n}^*)_q \otimes \mathcal{F}_j Q, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Remarquons que  $C^0 = Q$  et que  $\mathcal{F}_k C^0 = \mathcal{F}_k Q$  pour tout  $k$ . De plus,  $\mathcal{F}_k C^i = 0$  pour  $k$  (négatif) suffisamment petit.

**Lemme 2.4.3.** *Pour tout  $i$ , on a  $\partial(\mathcal{F}_k C^i) \subset \mathcal{F}_k C^{i+1}$ .*

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{F}_k C^i$ . Montrons que  $\partial f \in \mathcal{F}_k C^{i+1}$ . On peut supposer que  $f = \varphi \otimes v$  où  $\varphi \in (\bigwedge^i \mathfrak{n}^*)_q$  et  $v \in \mathcal{F}_j Q$  tels que  $q + j \leq k$ . Soient  $Y_1, \dots, Y_{i+1}$  des éléments de  $\mathfrak{n}$  tels que pour tout  $r \in \{1, \dots, i+1\}$ ,  $Y_r \in \mathfrak{g}_{\lambda_r}$  avec  $\lambda_r \leq -1$ . Alors

$$\begin{aligned} & \partial f(Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{i+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{i+1} (-1)^l Y_l \cdot f(Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge Y_{i+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq l < m \leq i+1} (-1)^{l+m} f([Y_l, Y_m] \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_m \wedge \dots \wedge Y_{i+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{i+1} (-1)^l Y_l \cdot (\varphi(Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge Y_{i+1})v) \\ &+ \sum_{1 \leq l < m \leq i+1} (-1)^{l+m} \varphi([Y_l, Y_m] \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_m \wedge \dots \wedge Y_{i+1})v. \end{aligned}$$

Si  $\sum_{r \neq l} \lambda_r \neq -q$ , alors  $\varphi(Y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \cdots \wedge Y_{i+1})$  est nul. D'autre part,  $Y_l v \in \mathcal{F}_{j+\lambda_l} Q$ . De même, si  $\sum_r \lambda_r \neq -q$ , alors  $\varphi([Y_l, Y_m] \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \cdots \wedge \widehat{Y}_m \wedge \cdots \wedge Y_{i+1})$  est nul. Ainsi,  $\partial f \in \sum_{r=1}^{i+1} (\wedge^i \mathfrak{n}^*)_{q-\lambda_r} \otimes \mathcal{F}_{j+\lambda_r} Q + (\wedge^i \mathfrak{n}^*)_q \otimes \mathcal{F}_j Q$ , et  $\partial f \in \mathcal{F}_k C^{i+1}$ .  $\square$

Rappelons que la structure de  $\mathfrak{n}$ -module sur  $Q$  induit une structure de  $\mathfrak{n}$ -module sur  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q$ . Considérons le complexe,

$$G^i := \text{Hom}(\wedge^i \mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) \simeq (\wedge^i \mathfrak{n})^* \otimes \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \simeq \wedge^i \mathfrak{n}^* \otimes \text{gr}_{\mathcal{F}} Q,$$

associé à  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q$ , et notons  $\delta$  la différentielle correspondante. On a une graduation sur  $G^i$  donnée par  $G^i = \bigoplus_k G_k^i$  où  $G_k^i := \bigoplus_{q+j=k} (\wedge^i \mathfrak{n}^*)_q \otimes \mathcal{F}^j Q / \mathcal{F}^{j+1} Q$ , avec  $\mathcal{F}^j Q := \mathcal{F}_{-j} Q$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $i \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\mathcal{F}^k C^i := \mathcal{F}_{-k} C^i.$$

La filtration  $(\mathcal{F}^k C^i)_k$  est décroissante et  $\mathcal{F}^k C^i = 0$  pour  $k$  assez grand.

**Remarque 2.4.4.** Soit  $(k, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .

1) L'application  $G_k^i \rightarrow \mathcal{F}^k C^i / \mathcal{F}^{k+1} C^i$  qui à  $f_q \otimes \bar{v}_j \in (\wedge^i \mathfrak{n}^*)_q \otimes \mathcal{F}^j Q / \mathcal{F}^{j+1} Q$ , avec  $q + j = k$ , associe la classe de  $f_q \otimes v_j$ , où  $v_j$  est un représentant de  $\bar{v}_j$ , est un isomorphisme. On identifie désormais  $G_k^i$  à  $\mathcal{F}^k C^i / \mathcal{F}^{k+1} C^i$ .

2) On a  $\delta(G_k^i) \subset G_k^{i+1}$  par le Lemme 2.4.3.

L'inclusion  $\mathcal{F}^k(C^i) \hookrightarrow C^i$  induit un morphisme  $H^i(\mathcal{F}^k(C^\bullet)) \rightarrow H^i(C^\bullet)$ . Notons  $\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q)$  l'image de  $H^i(\mathcal{F}^k(C^\bullet))$  dans  $H^i(C^\bullet)$ . Ceci définit une filtration sur  $H^i(C^\bullet) = H^i(\mathfrak{n}, Q)$  et,

$$\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) \simeq \frac{\ker \partial \cap \mathcal{F}^k C^i}{\text{im } \partial \cap \mathcal{F}^k C^i}.$$

On peut alors considérer l'algèbre graduée associée :

$$\text{gr}_{\mathcal{F}} H^i(\mathfrak{n}, Q) = \bigoplus_k \text{gr}_{\mathcal{F}, k} H^i(\mathfrak{n}, Q),$$

où  $\text{gr}_{\mathcal{F}, k} H^i(\mathfrak{n}, Q) = \mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) / \mathcal{F}^{k+1} H^i(\mathfrak{n}, Q)$ .

**Remarque 2.4.5.** Pour  $i = 0$ , on a  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H^0(\mathfrak{n}, Q) = \text{gr}_{\mathcal{F}} Q^n = \text{gr}_{\mathcal{F}} H$ .

**Proposition 2.4.6.** (i) On a un isomorphisme d'algèbres entre  $H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)$  et  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ .

(ii) Pour tout  $i > 0$ , on a  $H^i(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) = 0$ .

*Démonstration.* (i) L'isomorphisme  $\alpha : N \times \mathcal{S} \rightarrow \chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  du Théorème 2.2.7 induit un isomorphisme

$$\alpha^* : \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)] \rightarrow \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}].$$

Le groupe  $N$  opère dans  $N \times \mathcal{S}$  par  $x.(y, s) = (xy, s)$ , avec  $x, y \in N$  et  $s \in \mathcal{S}$ , et dans  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  par l'opération coadjointe. Ceci induit des opérations de  $N$

dans  $\mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]$  et dans  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ . On vérifie sans peine que  $\alpha$  et  $\alpha^*$  sont  $N$ -équivariants pour ces opérations. Ainsi,

$$\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]^N \simeq (\mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}])^N \simeq \mathbb{C}[N]^N \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}] \simeq \mathbb{C}[\mathcal{S}]$$

car  $\mathbb{C}[N]^N = \mathbb{C}$ . D'autre part, d'après la Proposition 2.3.7, on a

$$\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]^N = \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]^{\mathfrak{n}} = H^0(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]) \simeq H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q).$$

On obtient ainsi l'isomorphisme souhaité :

$$H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{S}].$$

(ii) Les isomorphismes  $\vartheta : \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \rightarrow \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$  et  $\alpha^* : \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)] \rightarrow \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]$  nous donnent, pour tout  $i \geq 0$ ,

$$H^i(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) \simeq H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]) \simeq H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]).$$

L'opération de  $N$  dans  $N \times \mathcal{S}$  implique  $H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]) = H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N]) \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ . D'autre part, d'après [7, Theorem 10.1] (ou [14, Lemma 5.1] ou [12]), pour  $i > 0$ ,  $H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N])$  est égal au  $i$ -ème groupe de cohomologie du complexe de De Rham pour  $N$ . Ce dernier est nul d'après [13, Ch. III, Theorem 3.7]. En conclusion,  $H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]) = H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N]) \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}] = 0$ , ce qui achève la démonstration de (ii).  $\square$

Compte tenu de la Proposition 2.4.6(i), on souhaite montrer que  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H^0(\mathfrak{n}, Q) \simeq H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)$ . Comme dans [11, Section 5], nous y parvenons à l'aide de suites spectrales. D'après le Lemme 2.4.3, on associe à la filtration  $(\mathcal{F}^k C^\bullet)_k$  la suite spectrale donnée par :

$$E_m^{k,l} := \frac{\mathcal{F}^k C^{k+l} \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^{k+m} C^{k+l+1}) + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}{\partial(\mathcal{F}^{k-m+1} C^{k+l-1} \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^k C^{k+l})) + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}};$$

$$E_\infty^{k,l} := \frac{\ker \partial \cap \mathcal{F}^k C^{k+l} + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}{\text{im } \partial \cap \mathcal{F}^k C^{k+l} + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}};$$

$$E^i := H^i(C^\bullet) = H^i(\mathfrak{n}, Q).$$

Il résulte de [5, Ch. XV, Section 4] que

$$E_\infty^{k,l} \simeq \text{gr}_{\mathcal{F},k} E^{k+l}. \quad (2.4)$$

Compte tenu de la Remarque 2.4.4 (2), on peut poser pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $i > 0$ ,

$$H^i(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k := \frac{\ker \delta \cap G_k^i}{\delta(G_k^{i-1})}.$$

**Lemme 2.4.7.** (i) Pour tous  $k, l \in \mathbb{Z}$ , on a  $E_1^{k,l} \simeq H^{k+l}(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k$ .

(ii) On a  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H^0(\mathfrak{n}, Q) \simeq H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)$ .

*Démonstration.* (i) On a

$$E_1^{k,l} = \frac{\mathcal{F}^k C^{k+l} \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^{k+1} C^{k+l+1}) + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}{\partial(\mathcal{F}^k C^{k+l-1} \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^k C^{k+l})) + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}.$$

De la Remarque 2.4.4 et du diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccc} G_k^{i-1} & \xrightarrow{\delta} & G_k^i & \xrightarrow{\delta} & G_k^{i+1} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathcal{F}^k C^{i-1} / \mathcal{F}^{k+1} C^{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{F}^k C^i / \mathcal{F}^{k+1} C^i & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{F}^k C^{i+1} / \mathcal{F}^{k+1} C^{i+1} \end{array}$$

on tire,

$$H^i(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k \simeq \frac{\ker(\delta) \cap \mathcal{F}^k C^i / \mathcal{F}^{k+1} C^i}{\delta(\mathcal{F}^k C^{i-1} / \mathcal{F}^{k+1} C^{i-1})} \simeq \frac{\mathcal{F}^k C^i \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^{k+1} C^{i+1}) + \mathcal{F}^{k+1} C^i}{\partial(\mathcal{F}^k C^{i-1}) + \mathcal{F}^{k+1} C^i}.$$

En particulier, lorsque  $i = k + l$ , on obtient (i).

(ii) D'après la Proposition 2.4.6(ii), pour tout  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $k + l > 0$ , on a  $E_1^{k,l} \simeq H^{k+l}(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k = 0$ . Comme  $C^i = 0$  pour tout  $i < 0$ , pour tout  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $k + l < 0$ , on a  $E_1^{k,l} = 0$ .

Soit  $1 < s < \infty$ . D'après ce qui précède, il résulte de [5, Ch. XV, Propositions 5.2, 5.2a] que

$$E_1^{k,l} \simeq E_s^{k,l}.$$

La suite spectrale  $(E_s^{k,l})_s$  est donc stationnaire. Par conséquent,  $E_1^{k,l} \simeq E_\infty^{k,l}$ . D'après (i), pour  $k, l \in \mathbb{Z}$  vérifiant  $k + l = 0$  on a  $E_1^{k,l} \simeq H^{k+l}(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k = H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k$ . D'autre part, d'après (2.4), on a  $E_\infty^{k,l} \simeq \text{gr}_{\mathcal{F},k} H^{k+l}(\mathfrak{n}, Q) = \text{gr}_{\mathcal{F},k} H^0(\mathfrak{n}, Q)$ , et (ii) s'ensuit.  $\square$

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le Théorème 2.4.2 :

*Démonstration du Théorème 2.4.2.* D'après la Proposition 2.4.6 et le Lemme 2.4.7, on a :

$$\mathbb{C}[S] \simeq H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) \simeq \text{gr}_{\mathcal{F}} H^0(\mathfrak{n}, Q) = \text{gr}_{\mathcal{F}} Q^n = \text{gr}_{\mathcal{F}} H.$$

Par construction, le morphisme  $\nu$  est un isomorphisme d'algèbres graduées. Il reste à montrer que c'est un morphisme d'algèbres de Poisson. Cela résulte de la Remarque 2.3.4.  $\square$

**Remarque 2.4.8.** Pour tout  $i > 0$ , on a  $H^i(\mathfrak{n}, Q) = 0$ . En effet, soient  $k, l \in \mathbb{Z}$  tels que  $k + l > 0$ . D'après le Lemme 2.4.7 (démonstration de (ii)), on a

$$E_1^{k,l} = H^{k+l}(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k = 0.$$

D'après [5, Ch. XV, Proposition 5.1], on déduit que

$$0 = E_\infty^{k,l} = \text{gr}_{\mathcal{F},k} H^{k+l}(\mathfrak{n}, Q).$$

Ainsi,  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H^i(\mathfrak{n}, Q) = 0$  pour tout  $i > 0$ . Par conséquent,  $\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) = \mathcal{F}^{k+1} H^i(\mathfrak{n}, Q)$  pour tout  $k$  et tout  $i > 0$ . Pour  $k$  assez grand,  $\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) = 0$ . On déduit que  $\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) = 0$  pour tout  $k$ . La remarque s'ensuit.

Soit  $\mathfrak{m}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  admissible pour  $e$ . Soient  $\mathcal{C}$  la catégorie abélienne des  $U(\mathfrak{g})$ -modules à gauche finiment engendrés sur lesquels, pour tout  $m \in \mathfrak{m}$ , l'élément  $m - \chi(m)$  de  $U(\mathfrak{g})$  agit localement comme un endomorphisme nilpotent, et  $\mathcal{C}'$  la catégorie des  $H$ -modules à gauche finiment engendrés.

Rappelons que l'équivalence de Skryabin [23] établit une équivalence de catégories entre les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  lorsque  $\mathfrak{m}$  est issue d'une bonne graduation pour  $e$  construite comme expliqué à la Remarque 1.2.10.

On note d'une part  $Q \otimes_H - : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur défini par

$$(Q \otimes_H -)(V) = Q \otimes_H V \quad \text{et} \quad (Q \otimes_H -)(\varphi)(q \otimes v) = q \otimes \varphi(v),$$

pour tous  $V, W$  deux objets de  $\mathcal{C}'$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(V, W)$ ,  $q \in Q$  et  $v \in V$ . D'autre part, on désigne par  $\text{Wh} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  le foncteur

$$\text{Wh}(E) = \{x \in E ; mx = \chi(m)x \text{ pour tout } m \in \mathfrak{m}\} \quad \text{et} \quad \text{Wh}(\Phi)(x) = \Phi(x)$$

pour tous  $E, F$  deux objets de  $\mathcal{C}$ ,  $\Phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$  et  $x \in \text{Wh}(E)$ . On remarque que  $\text{Wh}(\Phi)$  est bien défini car  $\Phi(\text{Wh}(E)) \subset \text{Wh}(F)$ .

**Théorème 2.4.9.** *Le foncteur  $Q \otimes_H -$  établit une équivalence de catégories entre les catégories  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}$ . L'inverse est donné par le foncteur  $\text{Wh}$ .*

Les arguments de [11, Section 6] s'appliquent à notre situation compte tenu de la démonstration précédente. On redonne toutefois une démonstration.

*Démonstration.* D'après [17, Proposition 1.3.13], il suffit de montrer que le foncteur  $Q \otimes_H -$  est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Remarquons tout d'abord que si  $E$  est un objet de  $\mathcal{C}$  vérifiant  $\text{Wh}(E) = 0$  alors  $E = 0$ . Soit  $V$  un  $H$ -module engendré par un sous-espace de dimension finie  $V_0$ . Montrons que  $\text{Wh}(Q \otimes_H V) = V$ . Il s'ensuivra que  $Q \otimes_H -$  est pleinement fidèle. Rappelons que la filtration  $\mathcal{F}_\bullet Q$  induit une filtration sur  $H$ . On définit une filtration croissante sur  $V$  en posant pour tout  $i$ ,

$$\mathcal{F}_i V := (\mathcal{F}_i H).V_0.$$

Soit  $\text{gr}_{\mathcal{F}} V$  le  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H$ -module gradué associé. Soit  $M$  le sous-groupe unipotent de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{m}$ . D'après la Proposition 2.3.7 et le Théorème 2.4.2, on a  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q = \mathbb{C}[M] \otimes_{\mathbb{C}} \text{gr}_{\mathcal{F}} H$ . Il résulte alors de la Proposition 2.4.6 que pour tout  $i > 0$

$$H^0(\mathfrak{m}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \otimes_{\text{gr}_{\mathcal{F}} H} \text{gr}_{\mathcal{F}} V) = \text{gr}_{\mathcal{F}} V, \quad H^i(\mathfrak{m}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \otimes_{\text{gr}_{\mathcal{F}} H} \text{gr}_{\mathcal{F}} V) = 0.$$

Les filtrations sur  $Q$  et  $V$  permettent de définir une filtration sur  $Q \otimes_{\mathbb{C}} V$  de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_k(Q \otimes_{\mathbb{C}} V) := \sum_i \mathcal{F}_k Q \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_{k-i} V.$$

Rappelons que  $Q \otimes_H V$  est le quotient de  $Q \otimes_{\mathbb{C}} V$  par le sous-espace engendré par les éléments  $qh \otimes v - q \otimes hv$ , pour  $q \in Q$ ,  $h \in H$  et  $v \in V$ . Soit  $\pi : Q \otimes_{\mathbb{C}} V \rightarrow Q \otimes_H V$  la surjection canonique. Posons

$$\mathcal{F}_k(Q \otimes_H V) = \pi(\mathcal{F}_k(Q \otimes_{\mathbb{C}} V)).$$

Ceci définit une filtration sur  $Q \otimes_H V$ . Comme  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q \simeq \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$  est un module libre sur  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H \simeq \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ , on en déduit un isomorphisme

$$\text{gr}_{\mathcal{F}}(Q \otimes_H V) \simeq \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \otimes_{\text{gr}_{\mathcal{F}} H} \text{gr}_{\mathcal{F}} V.$$

Un argument similaire à celui de la démonstration du Théorème 2.4.2 donne pour tout  $i > 0$

$$H^0(\mathfrak{m}, Q \otimes_H V) = V \quad \text{et} \quad H^i(\mathfrak{m}, Q \otimes_H V) = 0. \quad (2.5)$$

La relation  $H^0(\mathfrak{m}, Q \otimes_H V) = V$  signifie que  $\text{Wh}(Q \otimes_H V) = V$ .

Pour compléter la démonstration, il reste à montrer que  $Q \otimes_H -$  est essentiellement surjectif. Il suffit alors de montrer que pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{C}$ , l'application  $f : Q \otimes_H \text{Wh}(E) \rightarrow E$  qui à  $(u + I) \otimes x \in Q \otimes_H \text{Wh}(E)$  associe  $ux$ , est un isomorphisme. Soient  $E'$  le noyau de  $f$ , et  $E''$  le conoyau de  $f$ . Il s'agit de montrer que  $E' = 0$  et  $E'' = 0$ . Observons que  $\text{Wh}(E') = E' \cap \text{Wh}(Q \otimes_H \text{Wh}(E))$ , qui est égal à  $E' \cap \text{Wh}(E)$  d'après (2.5). Mais  $\text{Wh}(E)$  a une intersection nulle avec le noyau de  $f$ , donc  $\text{Wh}(E') = E' \cap \text{Wh}(E) = 0$ . Comme  $E'$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , ceci implique  $E' = 0$ .

Écrivons la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte  $0 \rightarrow Q \otimes_H \text{Wh}(E) \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ . On obtient

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{m}, Q \otimes_H \text{Wh}(E)) &\xrightarrow{H^0(f)} H^0(\mathfrak{m}, E) \longrightarrow H^0(\mathfrak{m}, E'') \\ &\longrightarrow H^1(\mathfrak{m}, Q \otimes_H \text{Wh}(E)) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Dans cette suite, le terme  $H^1(\mathfrak{m}, Q \otimes_H \text{Wh}(E))$  s'annule d'après (2.5). L'application  $H^0(f)$  est bijective car, d'après (2.5),  $H^0(\mathfrak{m}, Q \otimes_H \text{Wh}(E)) = \text{Wh}(E)$  et  $H^0(\mathfrak{m}, E) = \text{Wh}(E)$ . La suite exacte longue donne donc  $\text{Wh}(E'') = H^0(\mathfrak{m}, E'') = 0$ . Ceci implique  $E'' = 0$  et le théorème s'ensuit.  $\square$

## 2 . $W$ -algèbres finies associées aux paires admissibles

# Chapitre 3

## Problème d'isomorphisme

Compte tenu de la généralisation faite au Chapitre 2, il est naturel de se demander si l'algèbre  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  dépend du choix de la paire admissible  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . On introduit une relation d'équivalence sur les paires admissibles et on montre que si deux paires admissibles sont équivalentes, alors les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes, cf. Théorème 3.1.11.

On introduit ensuite les notions de  $\mathbb{Q}$ -graduations adjacentes et connexes. Ceci généralise celles de *bonnes graduations adjacentes et connexes* introduites par Brundan et Goodwin dans [3]. On montre alors que toute graduation admissible est connexe à la graduation de Dynkin, cf. Théorème 3.2.16. Par conséquent, elles sont toutes connexes entre elles, cf. Théorème 3.2.7. On introduit enfin la notion de graduation *b-maximale*. On établit des propriétés de ces graduations. On en déduit des résultats sur les isomorphismes entre les  $W$ -algèbres associées (cf. Théorème 3.3.6). On retrouve en particulier un résultat de Brundan et Goodwin, [3, Theorem 1].

Dans ce chapitre,  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie et  $e$  est un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$ .

### 3.1 Relation d'équivalence sur les paires admissibles et isomorphisme

On désigne par  $PA(e)$  l'ensemble des paires admissibles pour  $e$  et par  $GA(e)$  l'ensemble des graduations admissibles pour  $e$ . Pour  $\Gamma \in GA(e)$ , on note  $PA(e, \Gamma)$  l'ensemble des paires admissibles pour  $e$  relativement à  $\Gamma$ .

**Définition 3.1.1.** Soient  $\Gamma \in GA(e)$  et  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \in PA(e, \Gamma)$ . On note

$$(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$$

si  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{n}' \subseteq \mathfrak{n}$ .

Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \in PA(e)$ . On dit que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont **comparables** s'il existe  $\Gamma \in GA(e)$  telle que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \in PA(e, \Gamma)$  et telle que

$$(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \quad \text{ou} \quad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}').$$

**Exemple 3.1.2.** Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une bonne graduation pour  $e$ . D'après la démonstration de la Proposition 1.2.9, la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{< 0})$  est admissible pour  $e$ . De

### 3 . Problème d'isomorphisme

plus, pour tout  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in PA(e, \Gamma)$ , on a

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{< 0}).$$

Plus généralement, si  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est une graduation de  $\mathfrak{g}$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  pour  $a > 1$  et  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_{< 0} = \{0\}$  alors tout  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in PA(e, \Gamma)$  vérifie

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{< 0}),$$

où  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{< 0})$  est l'unique paire optimale d'après la Remarque 1.3.8.

**Remarque 3.1.3.** Si  $\Gamma \in GA(e)$  et si  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in PA(e, \Gamma)$  est optimale, alors  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  est maximale pour l'ordre partiel  $\preceq_{\Gamma}$  sur les éléments de  $PA(e, \Gamma)$ .

**Exemple 3.1.4.** On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_8(\mathbb{C})$  et que

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple

$$\frac{1}{2} \text{diag}(7, 1, -5, -11, 11, 5, -1, -7).$$

Les degrés des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont donnés sur la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ -3 & 0 & 3 & 9 & -5 & -2 & 1 & 4 \\ -6 & -3 & 0 & 3 & -8 & -5 & -2 & 1 \\ -9 & -6 & -3 & 0 & -11 & -8 & -5 & -2 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & -3 & 0 & 3 & 9 \\ -4 & -1 & 2 & 5 & -6 & -3 & 0 & 3 \\ -7 & -4 & -1 & 2 & -9 & -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a  $\dim \mathfrak{g}^e = 15$  et  $e \in \mathfrak{g}_3$ . Posons

$$\mathbf{m} := \mathfrak{g}_{\leq -3} \oplus \mathfrak{g}_{-1}, \quad \mathbf{m}' := \mathfrak{g}_{\leq -3} \oplus \mathbb{C}E_{6,1}, \quad \mathbf{n}' := \mathbf{m}' \oplus \mathbb{C}E_{7,2} \oplus \mathbb{C}E_{8,3} \oplus \mathbb{C}E_{3,7} \oplus \mathbb{C}E_{4,8}.$$

On vérifie par un calcul que les paires  $(\mathbf{m}, \mathbf{m})$  et  $(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$  sont admissibles pour  $e$ . Elles sont comparables. Précisément, on a  $(\mathbf{m}, \mathbf{m}) \preceq_{\Gamma} (\mathbf{m}', \mathbf{n}')$ .

### 3.1 Relation d'équivalence sur les paires admissibles et isomorphisme

**Exemple 3.1.5.** Deux paires admissibles pour  $e$  ne sont pas toujours comparables. En effet, reprenons l'exemple 1.2.11 du Chapitre 1. On a vu que

$$(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) := (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{2,1} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}) \in PA(e, \Gamma).$$

De la même manière on peut montrer que la paire

$$(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) := (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{3,2} \oplus \mathbb{C}E_{4,3})$$

appartient à  $PA(e, \Gamma)$ . On remarque que les paires  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$  et  $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$  ne sont pas comparables.

Rappelons qu'à tout  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in PA(e)$ , on associe l'algèbre associative  $H(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  (cf. Paragraphe 2.1 du Chapitre 2).

**Proposition 3.1.6.** Si  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1), (\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) \in PA(e)$  sont comparables, alors les algèbres  $H(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$  et  $H(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $e$ -admissible  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  pour  $a > 1$  et  $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) \preceq_{\Gamma} (\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ . En particulier,

$$\mathfrak{g}_{\leq -a} \subseteq \mathbf{m}_1 \subseteq \mathbf{m}_2 \subseteq \mathbf{n}_2 \subseteq \mathbf{n}_1 \subseteq \mathfrak{g}_{< 0}.$$

Comme  $I(\mathbf{m}_1) \subset I(\mathbf{m}_2)$ , on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \ker \Phi \rightarrow Q(\mathbf{m}_1) \xrightarrow{\Phi} Q(\mathbf{m}_2) \rightarrow 0,$$

où  $\Phi$  est le morphisme de  $Q(\mathbf{m}_1)$  sur  $Q(\mathbf{m}_2)$  induit par le morphisme quotient (surjectif)  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow Q(\mathbf{m}_2)$ . Soit  $\bar{\Phi}$  la restriction de  $\Phi$  à  $H(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ . Comme  $I(\mathbf{m}_1) \subset I(\mathbf{m}_2)$  et  $\mathbf{n}_2 \subset \mathbf{n}_1$ ,

$$\bar{\Phi}(H(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)) \subseteq H(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2).$$

On rappelle que la filtration de Kazhdan généralisée  $\mathcal{F}$  (cf. Chapitre 2 Paragraphe 2.3) induit une filtration croissante sur  $H(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$  et  $H(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$ . On note  $\text{gr } \Phi$  et  $\text{gr } \bar{\Phi}$  les morphismes gradués associés à  $\Phi$  et  $\bar{\Phi}$  respectivement :

$$\text{gr } \Phi : \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathbf{m}_1) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathbf{m}_2), \quad \text{gr } \bar{\Phi} : \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2).$$

Soit  $\mathfrak{s}$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{g}$  supplémentaire de  $[\mathbf{n}_2, e]$  dans  $\mathbf{m}_2^{\perp}$ . D'après le Lemme 2.2.1, on a  $\mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{g}, e] = \mathfrak{g}$ . Il s'ensuit que  $\mathfrak{s} \cap [\mathbf{n}_1, e] = \{0\}$ . D'après la condition (A6), on en déduit que  $\mathfrak{s} \oplus [\mathbf{n}_1, e] = \mathbf{m}_1^{\perp}$ . On pose alors

$$\mathcal{S} := \kappa(e + \mathfrak{s}).$$

D'après le Théorème 2.4.2, on a un isomorphisme

$$\nu_i : \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathbf{m}_i, \mathbf{n}_i) \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}],$$

pour  $i \in \{1, 2\}$ . Montrons que  $\nu_2 \circ \text{gr } \bar{\Phi} = \nu_1$ . Soient  $\mu_i$  et  $\mu$  les comorphismes correspondants aux inclusions  $\mathcal{S} \hookrightarrow \kappa(e + \mathbf{m}_i^{\perp})$  ( $i = 1, 2$ ), et  $\kappa(e + \mathbf{m}_2^{\perp}) \hookrightarrow \kappa(e + \mathbf{m}_1^{\perp})$ . Le diagramme suivant commute alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\kappa(e + \mathbf{m}_2^{\perp})] & \xrightarrow{\mu_2} & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \\ \mu \uparrow & \nearrow \mu_1 & \\ \mathbb{C}[\kappa(e + \mathbf{m}_1^{\perp})] & & \end{array}$$

### 3 . Problème d'isomorphisme

Soit  $\iota_i : \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathbf{m}_i, \mathbf{n}_i) \hookrightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathbf{m}_i)$  le morphisme injectif donné par la proposition 2.4.1 pour  $i = 1, 2$ . On a  $\nu_i = \mu_i \circ \iota_i$ . De plus, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) & \xrightarrow{\iota_2} & \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathbf{m}_2) \\ \text{gr } \bar{\Phi} \uparrow & & \uparrow \text{gr } \Phi \\ \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) & \xrightarrow{\iota_1} & \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathbf{m}_1). \end{array}$$

Comme  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathbf{m}_i) \simeq \mathbb{C}[\kappa(e + \mathbf{m}_i^{\perp})]$  pour  $i \in \{1, 2\}$  d'après la Proposition 2.3.7, on en déduit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) & \hookrightarrow & \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathbf{m}_2) \simeq \mathbb{C}[\kappa(e + \mathbf{m}_2^{\perp})] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \\ \text{gr } \bar{\Phi} \uparrow & & \text{gr } \Phi \uparrow & \uparrow \mu & \nearrow \\ \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) & \hookrightarrow & \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathbf{m}_1) \simeq \mathbb{C}[\kappa(e + \mathbf{m}_1^{\perp})] & & \end{array}$$

d'où  $\nu_2 \circ \text{gr } \bar{\Phi} = \nu_1$ . On en déduit que  $\text{gr } \bar{\Phi}$  est un isomorphisme d'algèbres graduées.

D'après le Lemme 2.3.5 et [24, Propositions 7.5.7 and 7.5.8],  $\bar{\Phi}$  est donc un isomorphisme d'algèbres ce qui démontre la proposition.  $\square$

**Remarque 3.1.7.** *L'isomorphisme établi dans la démonstration de la Proposition 3.1.6 n'est pas canonique car il dépend du choix du sous-espace gradué  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$ .*

**Définition 3.1.8.** *Soient  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}), (\mathbf{m}', \mathbf{n}') \in PA(e)$ . On dit que  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  et  $(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$  sont **équivalentes**, et on note  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \sim (\mathbf{m}', \mathbf{n}')$ , s'il existe une famille finie de paires  $e$ -admissibles  $\{(\mathbf{m}_i, \mathbf{n}_i)\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$  telle que*

- (1)  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$  ;
- (2) les paires  $(\mathbf{m}_i, \mathbf{n}_i)$  et  $(\mathbf{m}_{i+1}, \mathbf{n}_{i+1})$  sont comparables pour tout  $i \in \{1, \dots, s-1\}$  ;
- (3)  $(\mathbf{m}_s, \mathbf{n}_s) = (\mathbf{m}', \mathbf{n}')$ .

La relation  $\sim$  définit une relation d'équivalence sur  $PA(e)$ .

**Exemples 3.1.9.** (1) *On a vu dans l'Exemple 3.1.5 que les paires*

$$(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) := (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{2,1} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}) \quad \text{et} \quad (\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) := (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{3,2} \oplus \mathbb{C}E_{4,3})$$

*ne sont pas comparables. Cependant, on peut montrer que la sous-algèbre*

$$\mathbf{m}_3 := \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}$$

*est admissible pour  $e$  relativement à la même graduation  $\Gamma$ , et que*

$$(\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \preceq_{\Gamma} (\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) \quad \text{et} \quad (\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3) \preceq_{\Gamma} (\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2).$$

*Il s'ensuit que les paires  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$  et  $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$  sont équivalentes.*

(2) *Donnons un exemple de paires  $e$ -admissibles équivalentes qui ne sont pas issues de la même graduation  $e$ -admissible. On reprend l'Exemple 1.2.6. On rappelle que la paire  $(\mathfrak{g}_{-2}, \mathfrak{g}_{-2})$  est la seule paire  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma$ . On considère ensuite la graduation  $\Gamma' : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j$  définie par l'élément semisimple*

### 3.1 Relation d'équivalence sur les paires admissibles et isomorphisme

$\frac{1}{3} \text{diag}(4, -2, -2)$ . Les degrés des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que  $(\mathfrak{g}'_{-2}, \mathfrak{g}'_{-2})$  est la seule paire  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma'$ . On considère enfin la graduation de Dynkin  $\Gamma'' : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}''_j$  dont les degrés des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la paire  $(\mathfrak{g}''_{-2}, \mathfrak{g}''_{-2} \oplus \mathfrak{g}''_{-1})$  est  $e$ -admissible et optimale d'après l'Exemple 1.2.4. De plus,  $(\mathfrak{g}_{-2}, \mathfrak{g}_{-2})$  et  $(\mathfrak{g}'_{-2}, \mathfrak{g}'_{-2})$  appartiennent à  $PA(e, \Gamma'')$  et vérifient

$$(\mathfrak{g}_{-2}, \mathfrak{g}_{-2}) \preceq_{\Gamma''} (\mathfrak{g}''_{-2}, \mathfrak{g}''_{-2} \oplus \mathfrak{g}''_{-1}) \quad \text{et} \quad (\mathfrak{g}'_{-2}, \mathfrak{g}'_{-2}) \preceq_{\Gamma''} (\mathfrak{g}''_{-2}, \mathfrak{g}''_{-2} \oplus \mathfrak{g}''_{-1}).$$

Il s'ensuit que les paires  $(\mathfrak{g}_{-2}, \mathfrak{g}_{-2})$  et  $(\mathfrak{g}'_{-2}, \mathfrak{g}'_{-2})$  sont équivalentes.

**Remarque 3.1.10.** Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une graduation de  $\mathfrak{g}$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  pour  $a > 1$ . Si  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{< 0})$  est une paire admissible pour  $e$ , toutes les paires admissibles pour  $e$  relativement à  $\Gamma$  sont équivalentes d'après l'Exemple 3.1.2 (2). En particulier, les paires admissibles pour  $e$  relativement à une graduation de Dynkin (et plus généralement à une bonne graduation) sont équivalentes.

**Théorème 3.1.11.** Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  deux paires  $e$ -admissibles équivalentes. Alors les algèbres  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $H(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Comme  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \sim (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$ , il existe d'après la Définition 3.1.8 une famille finie  $\{(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i)\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$  de paires admissibles pour  $e$  telle que  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ,  $(\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s) = (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  et telle que les paires  $(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i)$  et  $(\mathfrak{m}_{i+1}, \mathfrak{n}_{i+1})$  soient comparables pour tout  $i \in \{1, \dots, s-1\}$ . Il découle de la Proposition 3.1.6 que

$$H(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i) \simeq H(\mathfrak{m}_{i+1}, \mathfrak{n}_{i+1}) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, s-1\}.$$

Alors

$$H(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i) \simeq H(\mathfrak{m}_j, \mathfrak{n}_j) \text{ pour tout } i, j \in \{1, \dots, s\}.$$

En particulier,

$$H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) \simeq H(\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s) = H(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}').$$

□

**Remarque 3.1.12.** Si  $e$  est distingué alors, d'après la Proposition 1.3.3 et la Remarque 3.1.10, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes et donc, d'après le Théorème 3.1.11, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.

## 3.2 Connexité des graduations admissibles

### 3.2.1 Graduations adjacentes et connexes

On a défini au Chapitre 1 la notion de paires admissibles pour  $e$  relativement à des  $\mathbb{Z}$ -graduations de  $\mathfrak{g}$ . Cette notion peut être étendue aux  $\mathbb{Q}$ -graduations de  $\mathfrak{g}$  comme suit : une paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  de sous-algèbres ad-nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  est dite admissible pour  $e$  s'il existe une  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  de  $\mathfrak{g}$  et un entier  $a > 1$  tels que

les conditions (A1) à (A6) soient vérifiées. De façon analogue, on dira qu'une  $\mathbb{Q}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  est admissible pour  $e$  s'il existe un entier  $a > 1$  tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et s'il existe une paire admissible pour  $e$  relativement à cette graduation. On note dans la suite  $PA_{\mathbb{Q}}(e)$  l'ensemble des paires admissibles pour  $e$  relativement à des  $\mathbb{Q}$ -graduations de  $\mathfrak{g}$  et  $GA_{\mathbb{Q}}(e)$  l'ensemble des  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$ . Pour  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ , on désigne par  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma)$  l'ensemble des paires admissibles pour  $e$  relativement à la  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\Gamma$ . Pour une  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\Gamma$  de  $\mathfrak{g}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ , on rappelle que  $\lambda\Gamma$  est la  $\mathbb{Q}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  définie par l'élément semisimple  $\lambda h_{\Gamma}$  où  $h_{\Gamma}$  est l'élément semisimple qui définit la graduation  $\Gamma$ .

**Proposition 3.2.1.** (i) Pour tout  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$  tel que  $\lambda\Gamma \in GA(e)$ .

(ii) Pour tous  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ , on a  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma) = PA_{\mathbb{Q}}(e, \lambda\Gamma)$ .

**Définition 3.2.2.** Deux  $\mathbb{Q}$ -graduations  $\Gamma, \Gamma'$  admissibles pour  $e$  sont dites **adjacentes** si elles ont une paire  $e$ -admissible en commun, i.e.,  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma) \cap PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma') \neq \emptyset$ .

**Définition 3.2.3.** Deux graduations  $\Gamma, \Gamma' \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  sont dites **connexes** s'il existe une suite  $(\Gamma_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  de  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$  telle que

- (1)  $\Gamma = \Gamma_1$  ;
- (2) les graduations  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  sont adjacentes pour tout  $1 \leq i \leq s - 1$  ;
- (3)  $\Gamma' = \Gamma_s$ .

**Exemples 3.2.4.** (1) Soit  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ , les graduations  $\lambda\Gamma$  et  $\Gamma$  sont adjacentes d'après la Proposition 3.2.1 (ii).

(2) On reprend l'Exemple 3.1.9(1) et on rappelle que  $(\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_3) \in PA(e, \Gamma)$ . On considère la graduation de Dynkin  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j$  de  $\mathfrak{g}$  associée à  $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$ . Les degrés des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont donnés sur la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que  $\mathfrak{m}_3 = \mathfrak{g}'_{-2}$ . Par conséquent,  $(\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_3)$  est une paire admissible pour  $e$  commune à la graduation  $\Gamma$  et la graduation de Dynkin qui sont donc adjacentes.

**Exemple 3.2.5.** Deux  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$  ne sont pas toujours adjacentes. En effet, dans l'Exemple 3.1.9(2) les graduations  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont connexes via  $\Gamma''$  mais ne sont pas adjacentes.

**Proposition 3.2.6.** *Deux éléments  $\Gamma, \Gamma' \in GA(e)$  sont connexes si et seulement si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont connexes via une suite d'éléments de  $GA(e)$ .*

*Démonstration.* L'implication réciproque est évidente. Montrons l'implication directe. D'après l'hypothèse, il existe une suite  $(\Gamma_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  de  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$  telle que  $\Gamma = \Gamma_1$  et  $\Gamma' = \Gamma_s$  et telle que les graduations  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  soient adjacentes pour tout  $1 \leq i \leq s-1$ . D'après la Proposition 3.2.1, pour tout  $1 \leq i \leq s$ , il existe  $\lambda_i \in \mathbb{Q}_+^*$  tel que  $\lambda_i \Gamma_i \in GA(e)$  et  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma_i) = PA_{\mathbb{Q}}(e, \lambda_i \Gamma_i)$ . On en déduit que les graduations  $\lambda_1 \Gamma$  et  $\lambda_s \Gamma'$  sont connexes via une suite de graduations  $(\lambda_i \Gamma_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$ . Or,  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma) = PA_{\mathbb{Q}}(e, \lambda_1 \Gamma)$  et  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma') = PA_{\mathbb{Q}}(e, \lambda_s \Gamma')$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

### 3.2.2 Connexité

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 3.2.7.** *Les  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$  sont connexes entre elles.*

On fixe dans ce paragraphe une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $e$ -admissible  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  où  $a > 1$  et un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, h, f)$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$  (cf. Lemme 1.3.1). Soient  $h_\Gamma$  l'élément semisimple de  $\mathfrak{g}$  définissant  $\Gamma$  et  $\mathfrak{s} := \text{Vect}(e, h, f)$ . On pose

$$t := h_\Gamma - \frac{a}{2}h.$$

L'élément  $t$  de  $\mathfrak{g}$  est semisimple et appartient à  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}^s$ .

On pose  $[0, 1]_{\mathbb{Q}} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Soit  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ . On considère l'élément semisimple

$$h_\Gamma^{(\varepsilon)} := \frac{a}{2}h + \varepsilon t.$$

Pour  $j \in \mathbb{Q}$ , on note

$$\mathfrak{g}_j^{(\varepsilon)} := \{x \in \mathfrak{g}; (\text{ad } h_\Gamma^{(\varepsilon)})(x) = jx\}.$$

Soit alors  $\Gamma^{(\varepsilon)} : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j^{(\varepsilon)}$  la  $\mathbb{Q}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  définie par l'élément semisimple  $h_\Gamma^{(\varepsilon)}$ . En particulier,  $h_\Gamma^{(1)} = h_\Gamma$ ,  $\Gamma^{(1)} = \Gamma$  et  $\Gamma^{(0)} = \frac{a}{2}\Gamma_{\text{Dyn}}$ . Observons aussi que  $e \in \mathfrak{g}_a^{(\varepsilon)}$ .

**Lemme 3.2.8.** *La graduation  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  appartient à  $GA_{\mathbb{Q}}(e)$ .*

*Démonstration.* D'après le Théorème 1.4.4, comme la graduation  $\Gamma$  est admissible,  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Par suite, avec les notations de la formule (1.6) du Chapitre 1, on a  $|\lambda| < \frac{a}{2}(d_i + 1)$ . Ainsi, pour  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ ,

$$|\varepsilon\lambda| \leq |\lambda| < \frac{a}{2}(d_i + 1),$$

ceci implique que  $\mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , de nouveau d'après la formule (1.6) du Chapitre 1. Le lemme s'ensuit d'après le Théorème 1.4.4.  $\square$

La démonstration du Théorème 3.2.7 étant assez technique, on commence par expliquer les idées. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer que  $\Gamma$  est connexe à  $\Gamma^{(0)}$  qui est adjacente à la graduation de Dynkin. On va construire une suite de rationnels  $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_s = 1$  telle que pour tout  $i \in \{0, \dots, s\}$ ,  $\Gamma^{(\varepsilon_i)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon_{i+1})}$  soient adjacentes. Pour cela, on va utiliser dans les grandes lignes la démonstration du Théorème 1.4.4.

On rappelle quelques notations de la démonstration du Théorème 1.4.4. On a les décompositions

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{i,\lambda}, \quad \mathbf{E}_{i,\lambda} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l,$$

où la première décomposition est la décomposition orthogonale en composantes isotypiques de  $\mathfrak{s}$ -modules simples, la deuxième est la décomposition en sous-espaces propres de  $\text{ad } t$  et la troisième est la décomposition en sous-espaces propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  avec  $d_i$  la dimension d'un  $\mathfrak{s}$ -module simple de  $\mathbf{E}_i$ . Rappelons aussi que pour  $\lambda \geq 0$ ,

$$\mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathbf{E}_{i,\lambda} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}$$

est une décomposition orthogonale relative à la forme de Killing. Enfin pour tout  $l$ ,

$$m_{i,\lambda} = \frac{\dim \mathbf{E}_{i,\lambda}}{d_i} = \dim \mathbf{E}_{i,\lambda}^l = \dim(\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e) \quad (3.1)$$

car  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e = \mathbf{E}_{i,\lambda}^{d_i-1}$ . Pour tous  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , l'espace  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  est stable par  $\text{ad } h_\Gamma^{(\varepsilon)}$ . De plus, pour tout  $l \in \{0, \dots, d_i - 1\}$ ,  $\mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  est un sous-espace propre de  $\text{ad } h_\Gamma^{(\varepsilon)}$  de valeur propre  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + la$  où

$$\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) + \varepsilon\lambda.$$

L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma^{(\varepsilon)}$  sur  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  est donné par :

$$\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} := \{\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + la; l = 0, 1, \dots, d_i - 1\}.$$

**Remarque 3.2.9.** On a  $\Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} = -\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ . Il en résulte que

$$\text{Card} ( ] - a, 0[ \cap (\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} \cup \Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)}) ) \leq 2.$$

De plus, si ce cardinal vaut exactement 2, alors il existe  $b \in ]0, \frac{a}{2}[$  tel que

$$] - a, 0[ \cap (\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} \cup \Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)}) = \{-b, b - a\}.$$

Comme dans la démonstration du Théorème 1.4.4, on va s'intéresser à la « position du zéro » dans  $\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ , d'où la définition suivante :

**Définition 3.2.10.** On définit l'entier positif  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  par

- a)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 1$  si  $0 < \rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  ;
- b)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 2(s + 1) + 1$  si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + sa < 0 < \rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (s + 1)a$  pour  $s \in \{0, \dots, d_i - 2\}$  ;
- c)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 2d_i + 1$  si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (d_i - 1)a < 0$  ;
- d)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 2(s + 1)$  si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + sa = 0$  pour  $s \in \{0, \dots, d_i - 1\}$ .

On représente sur la Figure 3.1 la position du zéro dans  $\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  selon les différents cas de la Définition 3.2.10. Sur cette figure, les  $\bullet$  représentent les éléments de  $\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  et les  $|$  représentent les positions du zéro.

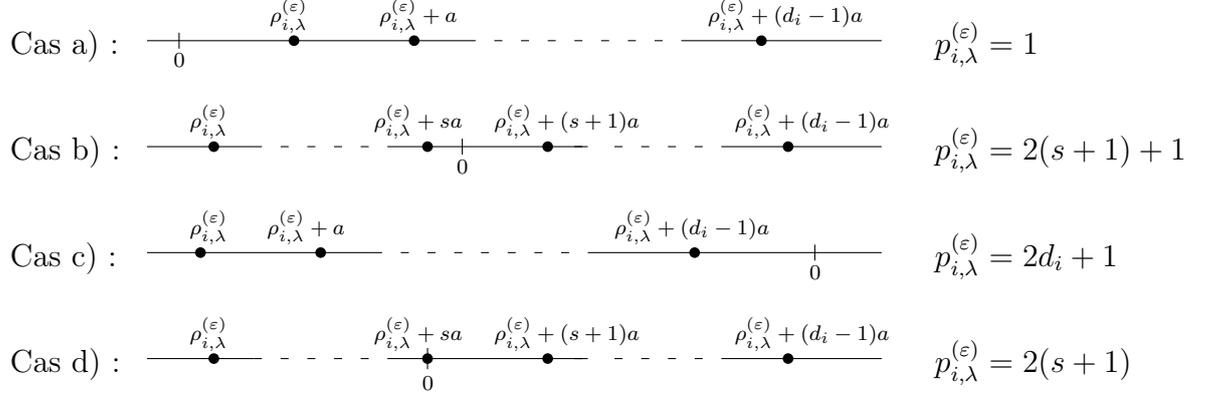


FIGURE 3.1 – Position du zéro dans  $\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$

Comme  $\Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} = -\Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)}$ , on a

$$p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + p_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} = 2d_i + 2. \quad (3.2)$$

**Exemple 3.2.11.** On reprend l'Exemple 1.3.9 où on considère

$$h := \text{diag}(5, 3, 1, -1, -3, -5, 2, 0, -2, 1, -1).$$

Il s'ensuit que les valeurs propres de  $\text{ad } t$  sont

$$-4, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 4.$$

On note  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  les sous-espaces propres avec  $d_i = i$ . Les couples  $(i, \lambda)$  pour  $\lambda \neq 0$  sont alors

$$(8, \pm \frac{1}{2}), (6, \pm \frac{1}{2}), (4, \pm \frac{1}{2}), (4, \pm \frac{7}{2}), (2, \pm \frac{7}{2}), (7, \pm 4), (5, \pm 4).$$

On obtient donc

$$p_{8, -\frac{1}{2}}^{(1)} = 9, p_{6, -\frac{1}{2}}^{(1)} = 7, p_{4, -\frac{1}{2}}^{(1)} = 5, p_{4, -\frac{7}{2}}^{(1)} = 7, p_{2, -\frac{7}{2}}^{(1)} = 5, p_{7, -4}^{(1)} = 11, p_{5, -4}^{(1)} = 9.$$

Les autres valeurs s'obtiennent grâce à l'égalité (3.2).

**Proposition 3.2.12.** Soient  $\varepsilon, \varepsilon' \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$  tels que  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}| \leq 1$  pour tous  $i$  et  $\lambda$ . Alors les graduations  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$  sont adjacentes.

*Démonstration.* On cherche une paire  $e$ -admissible  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  commune à  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$  de la forme suivante :

$$\mathbf{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{n}_{i,\lambda}$$

### 3 . Problème d'isomorphisme

telle que pour tous  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ , les sous-espaces  $\mathbf{m}_{i,\lambda}$  et  $\mathbf{n}_{i,\lambda}$  sont  $\Gamma^{(\varepsilon)}$ -gradués et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$ -gradués dans  $\mathbf{V}_{i,\lambda}$  et vérifient les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) du Lemme 1.4.5 appliqué à la décomposition  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}$  et aux deux graduations  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$ .

Soient  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ . Pour la construction de  $\mathbf{m}_{i,\lambda}$  et  $\mathbf{n}_{i,\lambda}$ , on distingue deux cas : le cas où  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}$  et le cas où  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}| = 1$ .

**Cas I :**  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}$ . Dans ce cas,  $\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon')}$  et  $\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{< 0}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{< 0}^{(\varepsilon')}$ . On distingue trois sous-cas.

(a) Si  $\lambda = 0$ , on pose

$$\mathbf{m}_{i,0} := \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)}, \quad \mathbf{n}_{i,0} := \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}_{< 0}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)}.$$

(b) Si  $\lambda \neq 0$  et si  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  est pair ou appartient à  $\{1, 2d_i + 1\}$ , on pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)}.$$

(c) Supposons  $\lambda \neq 0$  et  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  impair de la forme  $2k + 1$  où  $k \in \{1, \dots, d_i - 1\}$ .

Si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (k - 1)a \leq \rho_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} + (d_i - k - 1)a$ , on pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{< 0}^{(\varepsilon)} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)}.$$

Si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (k - 1)a > \rho_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} + (d_i - k - 1)a$ , on pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{< 0}^{(\varepsilon)}.$$

Dans chacun des sous-cas, les conditions (C1), (C2) et (C3) sont vérifiées par construction. De plus, la condition (C4) est satisfaite. En effet, si  $\lambda = 0$ ,

$$\dim \mathbf{m}_{i,0} + \dim \mathbf{n}_{i,0} = (d_i - 1)m_{i,0} = \dim \mathbf{V}_{i,0} - \dim(\mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}^e)$$

d'après (3.1). Si  $\lambda \neq 0$ ,

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e)$$

d'après (3.1). On constate aussi que dans tous les sous-cas, on a par construction

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}, \mathbf{n}_{i,\lambda} \subseteq \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')}. \quad (3.3)$$

**Cas II :**  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}| = 1$ . Il existe  $k \in \{1, \dots, d_i\}$  tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- (i)  $(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}, p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}) = (2k, 2k - 1)$ ;
- (ii)  $(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}, p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}) = (2k, 2k + 1)$ ;
- (iii)  $(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}, p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}) = (2k + 1, 2k)$ ;
- (iv)  $(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}, p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}) = (2k - 1, 2k)$ .

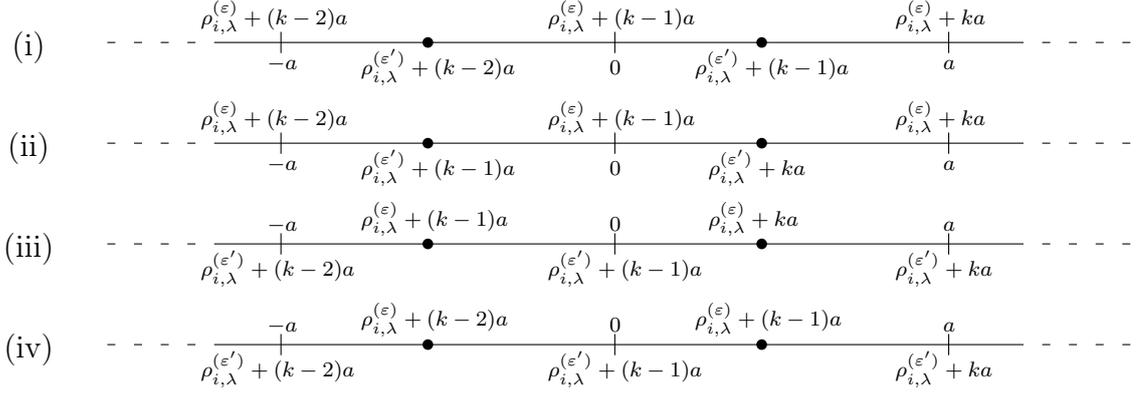


FIGURE 3.2 – Placement du zéro dans les sous-cas (i), (ii), (iii) et (iv)

On représente sur la Figure 3.2 la position du zéro dans chacun des sous-cas (i), (ii), (iii) et (iv).

On pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l. \quad (3.4)$$

La condition (C2) est vérifiée car

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=1}^{d_i-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l = [\mathbf{n}_{i,\lambda}, e].$$

Par construction, la condition (C3) est satisfaite. De plus, la condition (C4) l'est aussi car

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim V_{i,\lambda} - \dim(V_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e)$$

d'après (3.1). Pour chacun des sous-cas (i), (ii), (iii) et (iv), on représente dans la Table 3.1 les sous-espaces  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$ ,  $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$ ,  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$ . Ceci nous permet de conclure que la condition (C1) est vérifiée. On constate enfin que

Cas II.	$\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$	$\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$	$\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$	$\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$
(i)	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$
(ii)	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$
(iii)	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$
(iv)	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$

TABLE 3.1 – Cas II.

### 3 . Problème d'isomorphisme

dans les sous-cas (i) et (ii), on a

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)}. \quad (3.5)$$

Dans les sous-cas (iii) et (iv), on a

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon')}. \quad (3.6)$$

**Conclusion.** On pose

$$\mathbf{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{n}_{i,\lambda}.$$

D'après le Lemme 1.4.5, la paire  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6). D'après (3.3), (3.5) et (3.6),  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{n}$  sont deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  et vérifient (A5). Ceci nous permet de conclure que  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  est une paire admissible pour  $e$  commune aux graduations  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$ .  $\square$

Soient  $\varepsilon, \varepsilon' \in [0, 1]$  tels que  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}| \leq 1$  pour tous  $i$  et  $\lambda$  et  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  la paire admissible pour  $e$  commune aux graduations  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$  donnée par la Proposition 3.2.12. Le lemme suivant sera utilisé dans la section suivante.

**Lemme 3.2.13.** *Supposons que  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} = \{0\}$  et  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')} = \{0\}$  et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

- \*  $|\varepsilon - \varepsilon'|$  est suffisamment petit ;
- \*  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}$  pour tous  $i$  et  $\lambda$ .

Alors on a

$$\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \subseteq \mathbf{m} \subseteq \mathbf{n} \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')} \subseteq \mathbf{m} \subseteq \mathbf{n} \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')}$$

*Démonstration.* On reprend les notations de la Proposition 3.2.12. Il suffit de montrer que

$$\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda} \subseteq \mathbf{m}_{i,\lambda} \subseteq \mathbf{n}_{i,\lambda} \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda}$$

et

$$\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda} \subseteq \mathbf{m}_{i,\lambda} \subseteq \mathbf{n}_{i,\lambda} \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda}.$$

Dans le cas I, d'après (3.3), on a les inclusions à droite. Pour les inclusions à gauche, cela résulte de la construction, de la Remarque 3.2.9 et du fait que  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} = \{0\}$  et  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')} = \{0\}$ .

Considérons le cas II. Pour les sous-cas (i) et (ii), on a d'après (3.5)

$$\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda}.$$

Plaçons-nous dans le sous-cas (i). On a

$$|\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon')} + (k-1)a - (\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (k-1)a)| = |(\varepsilon' - \varepsilon)\lambda|.$$

Comme  $\varepsilon'$  est suffisamment proche de  $\varepsilon$ , cette différence est  $< \frac{a}{2}$ . Par conséquent,

$$\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon')} + (k-2)a < -(\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon')} + (k-1)a) = \rho_{i,-\lambda}^{(\varepsilon')} + (d_i - k)a < 0,$$

car  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon')} + (k-2)a + \rho_{i,-\lambda}^{(\varepsilon')} + (d_i - k)a = -a$ . En particulier,  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon')} + (k-2)a < -\frac{a}{2}$ . D'après la Remarque 3.2.9,

$$\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathfrak{m}_{i,\lambda} = \mathfrak{n}_{i,\lambda} = \mathfrak{g}_{\leq-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')} \cap \mathbf{V}_{i,\lambda}.$$

On raisonne de même dans le sous-cas (ii) ainsi que dans les sous-cas (iii) et (iv). Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Proposition 3.2.14.** *Il existe une chaîne de rationnels  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = 1$  telle que*

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon_s = 1$$

avec pour tout  $k \in \{0, \dots, s-1\}$  et pour tout  $(i, \lambda)$  on a

- (1)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}$  pour tous  $\varepsilon, \varepsilon' \in ]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$ ;
- (2)  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)}| \leq 1$  pour tout  $\varepsilon \in ]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$ ;
- (3)  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_{k+1})}| \leq 1$  pour tout  $\varepsilon \in ]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$ .

*Démonstration.* Observons que  $p_{i,\lambda}^{(0)} = d_i + 1$ . De plus, on remarque que  $p_{i,0}^{(\varepsilon)} = d_i + 1$  pour tout  $\varepsilon$ . D'autre part, lorsque  $\lambda \neq 0$ , on a

$$p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 2k \Leftrightarrow 0 = \rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (k-1)a \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{a}{2}(d_i - 1) - (k-1)a \right).$$

Il en résulte que lorsque  $\lambda \neq 0$ ,  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  n'est pair que pour un nombre fini de valeurs de  $\varepsilon$ . L'application  $\varepsilon \mapsto (p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)})_{i,\lambda}$  converge vers  $(d_i + 1)_{i,\lambda}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. De plus, l'ensemble des couples  $(i, \lambda)$  est fini et, pour  $(i, \lambda)$  fixé, l'ensemble des valeurs des  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  est contenu dans  $\{1, \dots, 2d_i + 1\}$ . On en déduit qu'il existe  $0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon_s = 1$  tels que

- \* pour tout  $k \in \{1, \dots, s-1\}$ , il existe  $(i, \lambda)$  tel que  $\lambda \neq 0$  et  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)}$  soit pair ;
- \* pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$  différent de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ ,  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  est impair pour tout  $\lambda \neq 0$ .

L'assertion est alors claire.  $\square$

**Exemple 3.2.15.** *On reprend l'Exemple 3.2.11 et on conserve les mêmes notations. Par des calculs directs, on vérifie sans peine que  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = i + 1$  pour  $\lambda \in \{-\frac{1}{2}, 0\}$  et pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]$ . De plus,*

$$p_{i,-4}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} i+1 & \text{si } \varepsilon = 0; \\ i+2 & \text{si } 0 < \varepsilon < \frac{3}{4}; \\ i+3 & \text{si } \varepsilon = \frac{3}{4}; \\ i+4 & \text{si } \frac{3}{4} < \varepsilon \leq 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad p_{i,-\frac{7}{2}}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} i+1 & \text{si } 0 \leq \varepsilon < \frac{3}{7}; \\ i+2 & \text{si } \varepsilon = \frac{3}{7}; \\ i+3 & \text{si } \frac{3}{7} < \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

On en déduit que la suite  $0 < \frac{3}{7} < \frac{3}{4} < 1$  vérifie les propriétés de la Proposition 3.2.14.

**Théorème 3.2.16.** *Toute  $\mathbb{Q}$ -gradation admissible pour  $e$  est connexe à la graduation de Dynkin.*

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  une  $\mathbb{Q}$ -graduation admissible pour  $e$ . D'après la Proposition 3.2.1, on peut supposer que  $\Gamma$  est une  $\mathbb{Z}$ -graduation admissible pour  $e$  et il suffit de montrer que  $\Gamma$  est connexe à  $\Gamma^{(0)}$ . Considérons les rationnels  $\varepsilon_k$  donnés par la Proposition 3.2.14 et la suite

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'_1 < \cdots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon'_{s-1} < \varepsilon_s = 1.$$

Pour tous  $(i, \lambda)$  et  $k \in \{0, \dots, s-1\}$ , on a

$$|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon'_k)}| \leq 1 \quad \text{et} \quad |p_{i,\lambda}^{(\varepsilon'_k)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_{k+1})}| \leq 1.$$

D'après la Proposition 3.2.12, d'une part les graduations  $\Gamma^{(\varepsilon_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$  sont adjacentes pour tout  $k \in \{0, \dots, s-1\}$  et d'autre part, les graduations  $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon_{k+1})}$  le sont aussi. Le théorème s'ensuit.  $\square$

*Démonstration du Théorème 3.2.7.* Si  $\Gamma, \Gamma' \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  alors d'après le théorème précédent, elles sont toutes les deux connexes à la graduation de Dynkin. En particulier, elles sont connexes entre elles.  $\square$

### 3.3 Conséquences

On conserve les notations de la section précédente.

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  avec  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq 2$ . Supposons qu'il existe  $b \in ]0, a[$  tel que  $\mathfrak{g}_{\leq -b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Alors  $\mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $(i, \lambda)$  et tout  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$  on a

$$\mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\} \iff |\varepsilon\lambda| < \frac{a}{2}(d_i - 1) + b.$$

Comme  $\mathfrak{g}_{\leq -b}^{(1)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , on a  $|\lambda| < \frac{a}{2}(d_i - 1) + b$ . Or, pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$  on a  $|\varepsilon\lambda| \leq |\lambda|$ . On en déduit que  $|\varepsilon\lambda| < \frac{a}{2}(d_i - 1) + b$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Définition 3.3.2.** *Soit  $b > 0$ . Une  $\mathbb{Q}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  est dite  **$b$ -maximale** si  $\mathfrak{g}_{\leq -b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  et s'il existe  $a \in \mathbb{N}$ , avec  $a \geq 2$ , tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ .*

**Remarque 3.3.3.** (1) *Soient  $b > b' > 0$  et  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une graduation  $b'$ -maximale telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ . Alors  $\Gamma$  est  $b$ -maximale.*

(2) *Si  $\Gamma$  est  $b$ -maximale et  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\lambda\Gamma$  est  $\lambda b$ -maximale.*

(3) *Une graduation  $b$ -maximale est admissible pour  $e$ . Cela provient du Théorème 1.4.4.*

(4) *Une bonne graduation pour  $e$  est 1-maximale.*

D'après le Corollaire 1.3.11, si la graduation  $\Gamma$  est  $b$ -maximale, alors la paire  $(\mathfrak{g}_{< b-a}, \mathfrak{g}_{\leq -b})$  est admissible pour  $e$  avec  $a$  comme dans la Définition 3.3.2.

**Définition 3.3.4.** *Lorsque la graduation  $\Gamma$  est  $b$ -maximale, on dira que la paire  $(\mathfrak{g}_{< b-a}, \mathfrak{g}_{\leq -b})$  est  **$b$ -maximale**.*

**Proposition 3.3.5.** *Soit  $\Gamma$  une  $\mathbb{Q}$ -graduation  $b$ -maximale. Alors il existe une suite de rationnels  $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_s = 1$  telle que pour tout  $i \in \{0, \dots, s-1\}$ , il existe  $(\mathbf{m}_i, \mathbf{n}_i) \in PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma^{(\varepsilon_i)}) \cap PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma^{(\varepsilon_{i+1})})$  vérifiant*

$$\mathfrak{g}_{<b-a}^{(\varepsilon_i)} \subset \mathbf{m}_i \subset \mathbf{n}_i \subset \mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon_i)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{<b-a}^{(\varepsilon_{i+1})} \subset \mathbf{m}_i \subset \mathbf{n}_i \subset \mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon_{i+1})}.$$

*Démonstration.* Soit  $a \in \mathbb{N}$ , avec  $a \geq 2$ , tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ . Comme  $b - a \leq -\frac{a}{2} \leq -b$ , pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$  on a

$$\mathfrak{g}_{<b-a}^{(\varepsilon)} \subset \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \subset \mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon)}.$$

Il suffit alors de démontrer la proposition pour  $a = 2b$ . Comme  $\Gamma$  est  $b$ -maximale, on a  $\mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ . En particulier,  $\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Considérons les rationnels  $\varepsilon_k$  donnés par la Proposition 3.2.14 et la suite

$$\varepsilon_0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon''_1 < \varepsilon_1 < \varepsilon'_1 < \dots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon'_{s-1} < \varepsilon''_s < \varepsilon_s = 1$$

où, pour tout  $k \in \{0, \dots, s-1\}$ ,  $\varepsilon'_k$  est suffisamment proche de  $\varepsilon_k$  et, pour tout  $k \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\varepsilon''_k$  est suffisamment proche de  $\varepsilon_k$ . D'après le Lemme 3.2.13 et la Proposition 3.2.12, pour tout  $k \in \{0, \dots, s-1\}$ , il existe une paire  $(\mathbf{m}_k, \mathbf{n}_k)$  admissible pour  $e$  commune aux graduations  $\Gamma^{(\varepsilon_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$  qui vérifie

$$\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon_k)} \subseteq \mathbf{m}_k \subseteq \mathbf{n}_k \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon_k)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon'_k)} \subseteq \mathbf{m}_k \subseteq \mathbf{n}_k \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon'_k)}.$$

D'autre part, pour tout  $k \in \{0, \dots, s-1\}$ , il existe une paire  $(\mathbf{m}'_k, \mathbf{n}'_k)$  admissible pour  $e$ , commune aux graduations  $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon''_{k+1})}$  qui vérifie

$$\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon'_k)} \subseteq \mathbf{m}'_k \subseteq \mathbf{n}'_k \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon'_k)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon''_{k+1})} \subseteq \mathbf{m}'_k \subseteq \mathbf{n}'_k \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon''_{k+1})}.$$

Enfin, pour tout  $k \in \{1, \dots, s\}$  il existe une paire  $(\mathbf{m}''_k, \mathbf{n}''_k)$  admissible pour  $e$  commune aux graduations  $\Gamma^{(\varepsilon''_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon_k)}$  qui vérifie

$$\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon''_k)} \subseteq \mathbf{m}''_k \subseteq \mathbf{n}''_k \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon''_k)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon_k)} \subseteq \mathbf{m}''_k \subseteq \mathbf{n}''_k \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon_k)}.$$

La proposition s'ensuit.  $\square$

**Théorème 3.3.6.** *Les paires  $b$ -maximales sont équivalentes à la paire optimale d'une graduation de Dynkin. En particulier, elles sont équivalentes entre elles.*

*Démonstration.* Soit  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  telle que  $\Gamma$  soit  $b$ -maximale avec  $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ . En appliquant la Proposition 3.3.5 à  $\Gamma$ , on a la suite

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0) & & (\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) & & \dots & & (\mathbf{m}_s, \mathbf{n}_s) \\ & \searrow \preccurlyeq_1 & & \downarrow \succcurlyeq_1 & & \searrow \preccurlyeq_2 & & \downarrow \succcurlyeq_{s-1} & & \searrow \preccurlyeq_s \\ & & (\mathfrak{g}_{<b-a}^{(\varepsilon_1)}, \mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon_1)}) & & (\mathfrak{g}_{<b-a}^{(\varepsilon_2)}, \mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon_2)}) & & (\mathfrak{g}_{<b-a}^{(\varepsilon_{s-1})}, \mathfrak{g}_{\leq -b}^{(\varepsilon_{s-1})}) & & (\mathfrak{g}_{<b-a}, \mathfrak{g}_{\leq -b}) \end{array}$$

où  $\preccurlyeq_i$  et  $\succcurlyeq_i$  désignent respectivement  $\preccurlyeq_{\Gamma^{(\varepsilon_i)}}$  et  $\succcurlyeq_{\Gamma^{(\varepsilon_i)}}$ . D'après la Proposition 3.2.1 et l'Exemple 3.1.2,  $(\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0) \sim (\mathfrak{g}'_{\leq -2}, \mathfrak{g}'_{<0})$  relativement à une graduation de Dynkin  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j$ . Le théorème s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 3.3.7.** *Les  $W$ -algèbres associées aux paires admissibles  $b$ -maximales sont isomorphes.*

**Remarque 3.3.8.** *Dans le cas particulier où  $b = \frac{a}{2}$ , la notion de graduation  $b$ -maximale coincide avec la notion de graduation  $a$ -bonne pour  $e$  introduite par Brundan et Goodwin dans [3]. La paire  $\frac{a}{2}$ -maximale est dans ce cas  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{\leq-\frac{a}{2}})$ . Les paires  $e$ -admissibles considérées dans [3] sont construites comme expliqué dans la Remarque 1.2.10 où on prend  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{l}^{\perp\omega}$  dans  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ . De telles paires  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  admissibles pour  $e$  vérifient*

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{\leq-\frac{a}{2}}).$$

*D'après le Théorème 3.3.6, les paires  $e$ -admissibles considérées dans [3] sont équivalentes entre elles. On retrouve alors [3, Theorem 1].*

**Exemple 3.3.9.** *Supposons que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_8(\mathbb{C})$  et que  $e$  soit l'élément nilpotent de l'Exemple 3.1.4. On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple  $\frac{1}{2} \text{diag}(17, 5, -7, -19, 19, 7, -5, -17)$ . Les degrés des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont donnés sur la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & 18 & -1 & 5 & 11 & 17 \\ -6 & 0 & 6 & 12 & -7 & -1 & 5 & 11 \\ -12 & -6 & 0 & 6 & -13 & -7 & -1 & 5 \\ -18 & -12 & -6 & 0 & -19 & -13 & -7 & -1 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 0 & 6 & 12 & 18 \\ -5 & 1 & 7 & 13 & -6 & 0 & 6 & 12 \\ -11 & -5 & 1 & 7 & -12 & -6 & 0 & 6 \\ -17 & -11 & -5 & 1 & -18 & -12 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

*On remarque que  $\Gamma$  est  $\frac{3}{2}$ -maximale avec  $e \in \mathfrak{g}_6$ . Posons*

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leq-6}, \quad \mathfrak{n} := \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-5} \oplus \mathbb{C}E_{1,5} \oplus \mathbb{C}E_{2,6} \oplus \mathbb{C}E_{3,7},$$

$$\mathfrak{n}' := \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-5} \oplus \mathbb{C}E_{2,6} \oplus \mathbb{C}E_{3,7} \oplus \mathbb{C}E_{4,8}.$$

*On vérifie par un calcul que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}') \in PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma)$ . De plus, chacune d'elles est équivalente à la paire admissible  $\frac{3}{2}$ -maximale. En particulier, les algèbres  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}')$  sont isomorphes.*

On termine le chapitre en formulant une conjecture :

**Conjecture 3.3.10.** *Les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes entre elles.*

On démontrera au chapitre suivant cette conjecture dans des cas particuliers. Le Théorème 3.3.6 peut être vu comme une version plus faible de cette conjecture.

# Chapitre 4

## Classification dans quelques cas particuliers

Dans ce chapitre,  $\mathfrak{g}$  désigne une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie,  $e$  un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{s}$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  engendrée par un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$  contenant  $e$ . Lorsque  $e$  est distingué, i.e.,  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 0$ , les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles (cf. Remarque 3.1.12). On considère dans ce chapitre le cas où  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ . On tente de répondre à la question suivante :

**Question 4.0.11.** *Sous l'hypothèse que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires admissibles pour  $e$  sont-elles équivalentes entre elles ?*

D'après le Théorème 3.2.7, les graduations  $e$ -admissibles sont connexes entre elles. Par conséquent, répondre à la Question 4.0.11 équivaut à répondre à la question suivante, à laquelle nous nous intéressons désormais :

**Question 4.0.12.** *Sous l'hypothèse que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires admissibles pour  $e$  relativement à une graduation  $e$ -admissible donnée sont-elles équivalentes entre elles ?*

On répondra positivement à la Question 4.0.12 dans les cas particuliers suivants :

- \*  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  ;
- \*  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$  ou  $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$  et la partition de  $n$  associée à l'élément nilpotent  $e$  contient exactement deux parties égales ;
- \*  $\mathfrak{g}$  est de type exceptionnel  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$  sous certaines hypothèses portant sur la graduation.

Dans tous ces cas particuliers, on résout ainsi positivement la Conjecture 3.3.10. On formule une conjecture plus faible, mais plus abordable compte tenu de nos résultats (cf. Conjecture 4.6.4).

### 4.1 Description des éléments nilpotents pour lesquels $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$

#### 4.1.1 Cas classiques

Nous supposons dans ce paragraphe que  $\mathfrak{g}$  soit l'une des algèbres de Lie simples de type classique suivantes :  $\mathfrak{sl}(V)$ ,  $\mathfrak{so}(V)$ ,  $\mathfrak{sp}(V)$ , où  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Notre référence pour la théorie des orbites nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  est [15]. Rappelons que les orbites nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  sont paramétrées par certaines partitions de  $n$ . Soit  $(d_1, \dots, d_m)$  la partition de  $n$  associée à l'orbite nilpotente de  $e$ , où  $m \in \{1, \dots, n\}$  et  $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}^*$ . On décrit dans ce paragraphe les conditions sur la partition  $(d_1, \dots, d_m)$  pour que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ .

**Cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$  :** Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(V)$  formée des endomorphismes de  $V$  de trace nulle. D'après [15, §3.7, Proposition 1], on a :

**Lemme 4.1.1.** *Le rang de  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  est égal à 1 si et seulement si la partition associée à  $e$  est de la forme  $(d_1, d_2)$ . De plus,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , si  $d_1 = d_2$  et  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathbb{C}$  sinon.*

**Cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  ou  $\mathfrak{sp}(V)$  :** On désigne par  $\Phi$  une forme bilinéaire de  $V$  non dégénérée, symétrique ou alternée. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie simple formée des endomorphismes  $x$  de  $V$  qui vérifient pour tous  $v, w \in V$  :

$$\Phi(xv, w) + \Phi(v, xw) = 0.$$

On a alors  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  si  $\Phi$  est symétrique et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$  si  $\Phi$  est alternée. On note  $G$  le groupe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  formé des automorphismes  $g$  de  $V$  vérifiant pour tous  $v, w \in V$  :

$$\Phi(gv, gw) = \Phi(v, w).$$

Rappelons que d'après [15, Theorem 1.6], si  $\Phi$  est symétrique, l'ensemble des  $G$ -orbites nilpotentes dans  $\mathfrak{so}(V)$  est en bijection avec l'ensemble des partitions de  $n$  dont les parties paires ont un nombre d'occurrences pair. Si  $\Phi$  est alternée, l'ensemble des  $G$ -orbites nilpotentes dans  $\mathfrak{sp}(V)$  est en bijection avec l'ensemble des partitions de  $n$  dont les parties impaires ont un nombre d'occurrences pair. On pose, pour tout  $s \in \mathbb{N}^*$ ,  $r_s := \text{Card}(j; d_j = s)$ . Si  $\Phi$  est symétrique, d'après la remarque qui suit [15, §3.7, Proposition 2], on a l'isomorphisme

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \prod_{s \geq 1; s \text{ impair}} \mathfrak{so}_{r_s}(\mathbb{C}) \times \prod_{s \geq 1; s \text{ pair}} \mathfrak{sp}_{r_s}(\mathbb{C}).$$

Le lemme suivant s'ensuit :

**Lemme 4.1.2.** *On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ . Le rang de  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  est égal à 1 si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit pair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

*Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et  $d_j$  est impair pour tout  $j \notin \{i, i+1\}$ .*

(b)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit impair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

*Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathbb{C}$  et  $d_j$  est impair pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .*

(c)  $m \geq 3$  et il existe  $i \in \{2, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit impair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_{i-1} = d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

*Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et  $d_j$  est impair pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .*

Si  $\Phi$  est alternée, toujours d'après la remarque qui suit [15, §3.7, Proposition 2], on a l'isomorphisme

$$\mathfrak{g}^s \simeq \prod_{s \geq 1; s \text{ impair}} \mathfrak{sp}_{r_s}(\mathbb{C}) \times \prod_{s \geq 1; s \text{ pair}} \mathfrak{so}_{r_s}(\mathbb{C}).$$

Le lemme suivant s'ensuit :

**Lemme 4.1.3.** *On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ . Le rang de  $\mathfrak{g}^s$  est égal à 1 si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (a)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit impair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^s \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et  $d_j$  est pair pour tout  $j \notin \{i, i+1\}$ .

- (b)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit pair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^s \simeq \mathbb{C}$  et  $d_j$  est pair pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

- (c)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{2, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit pair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_{i-1} = d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^s \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et  $d_j$  est pair pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

### 4.1.2 Cas exceptionnels

Supposons dans ce paragraphe que  $\mathfrak{g}$  soit l'une des algèbres de Lie exceptionnelles  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{F}_4$  et  $\mathbf{E}_6$ . À l'aide de [6, Chapter 13], on détermine les éléments nilpotents  $e$  de  $\mathfrak{g}$  tels que  $\text{rk } \mathfrak{g}^e = 1$ . On liste ces éléments dans les Tables 4.1, 4.2 et 4.3, correspondantes à  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{F}_4$  et  $\mathbf{E}_6$  respectivement. Dans chacune d'elles, la première colonne donne le label de l'orbite de  $e$  dans la classification de Bala-Carter, la deuxième son diagramme de Dynkin pondéré, et la troisième sa dimension.

Label	Diagramme	$\dim G.e$
		
$A_1$	1 0	6
$\tilde{A}_1$	0 1	8

TABLE 4.1 – Type  $\mathbf{G}_2$ .

## 4.2 Quelques outils techniques

On présente dans ce paragraphe quelques outils techniques.

**Définition 4.2.1.** *Soit  $b > 0$ . Une  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  est dite **b-optimale** si  $\mathfrak{g}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  et s'il existe  $a \in \mathbb{N}$ , avec  $a \geq 2$ , tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ .*

4 . Classification dans quelques cas particuliers

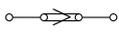
Label	Diagramme	dim $G.e$
		
$A_2 + \tilde{A}_1$	0 0 1 0	34
$\tilde{A}_2 + A_1$	0 1 0 1	36
$C_3(a_1)$	1 0 1 0	38
$B_3$	2 2 0 0	42
$C_3$	1 0 1 2	36

TABLE 4.2 – Type  $F_4$ .

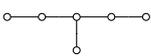
Label	Diagramme	dim $G.e$
		
$2A_2 + A_1$	1 0 1 0 1 0	54
$A_4 + A_1$	1 1 0 1 1 1	62
$A_5$	2 1 0 1 2 1	64
$D_5(a_1)$	1 1 0 1 1 2	64
$D_5$	2 0 2 0 2 2	68

TABLE 4.3 – Type  $E_6$ .

**Remarque 4.2.2.** (1) Soient  $b > b' > 0$  et  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une graduation  $b'$ -optimale telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ . Alors  $\Gamma$  est  $b$ -optimale.

(2) Si  $\Gamma$  est  $b$ -optimale et  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\lambda\Gamma$  est  $\lambda b$ -optimale.

(3) Une graduation  $b$ -optimale est admissible pour  $e$ . Cela provient du Théorème 1.4.4.

(4) Une graduation  $b$ -maximale (cf. Définition 3.3.2) est  $b$ -optimale.

D'après la Proposition 1.3.10, si la graduation  $\Gamma$  est  $b$ -optimale, alors la paire  $(\mathfrak{g}_{<b-a}, \mathfrak{g}_{<-b} \oplus U)$  est admissible pour  $e$  pour tout supplémentaire  $U$  de  $\mathfrak{g}_{-b} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{-b}$ , avec  $a$  comme dans la Définition 4.2.1.

**Définition 4.2.3.** Lorsque la graduation  $\Gamma$  est  $b$ -optimale, la paire  $(\mathfrak{g}_{<b-a}, \mathfrak{g}_{<-b} \oplus U)$  est dite  $b$ -optimale pour tout supplémentaire  $U$  de  $\mathfrak{g}_{-b} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{-b}$ .

**Lemme 4.2.4.** Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une  $\mathbb{Q}$ -graduation admissible pour  $e$  définie par un élément semisimple  $h_\Gamma$  de  $\mathfrak{g}$ . Supposons qu'il existe  $b \in ]0, \frac{a}{2}]$  vérifiant les conditions suivantes :

(T1)  $\mathfrak{g}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  ;

(T2) pour tout  $k \in \{-b, b-a, b, a-b\}$ , on a une décomposition de  $\mathfrak{g}_k$  en sous-espaces  $ad_{h_\Gamma}$ -stables,

$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_k^+ \oplus \mathfrak{g}_k^-$$

telle que

$$[e, \mathfrak{g}_{-b}^{\pm}] \subset \mathfrak{g}_{a-b}^{\pm} \quad \text{et} \quad [e, \mathfrak{g}_{b-a}^{\pm}] \subset \mathfrak{g}_b^{\pm};$$

(T3) pour tout  $k \in \{-b, b-a, b, a-b\}$ , les sous-espaces  $\mathfrak{g}_{-k}^+$  et  $\mathfrak{g}_k^-$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing;

(T4)  $\mathfrak{g}_{\leq -b} \cap \mathfrak{g}^e = \mathfrak{g}_{-b}^+ \cap \mathfrak{g}^e$  et  $\dim \mathfrak{g}_{-b}^+ \cap \mathfrak{g}^e = 1$ .

Alors les paires  $b$ -optimales sont équivalentes entre elles.

*Démonstration.* Compte tenu de la Définition 4.2.1, on a une bijection entre l'ensemble des paires  $b$ -optimales et l'ensemble  $\mathcal{E}$  des sous-espaces de  $\mathfrak{g}_{-b}$  supplémentaires de  $\mathfrak{g}_{-b} \cap \mathfrak{g}^e$ . Pour  $U \in \mathcal{E}$ , on note  $\mathbf{P}_U$  la paire  $(\mathfrak{g}_{<b-a}, \mathfrak{g}_{<-b} \oplus U)$ . Fixons  $U \in \mathcal{E}$ . On pose

$$U^+ = U \cap \mathfrak{g}_{-b}^+ \quad \text{et} \quad U^- = U \cap \mathfrak{g}_{-b}^-.$$

On obtient donc

$$\dim U^+ = \dim \mathfrak{g}_{-b}^+ - 1 \quad \text{et} \quad \dim U^- \geq \dim \mathfrak{g}_{-b}^- - 1.$$

En particulier,  $[e, \mathfrak{g}_{-b}^+] = [e, U^+]$ .

Supposons que  $b \neq \frac{a}{2}$ . L'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{b-a} \rightarrow \mathfrak{g}_b$  est injective. Il résulte du Lemme 1.3.5 que

$$\dim \mathfrak{g}_{a-b} = \dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim(\mathfrak{g}_{-b} \cap \mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}_{-b} - 1.$$

D'après (T3), on en déduit que

$$\dim \mathfrak{g}_b^+ = \dim \mathfrak{g}_{-b}^- = \dim \mathfrak{g}_{a-b}^- = \dim \mathfrak{g}_{b-a}^+$$

et

$$\dim \mathfrak{g}_b^- = \dim \mathfrak{g}_{-b}^+ = \dim \mathfrak{g}_{a-b}^+ + 1 = \dim \mathfrak{g}_{b-a}^- + 1.$$

En particulier,  $[e, \mathfrak{g}_{-b}^+] = [e, U^+] = \mathfrak{g}_{a-b}^+$ .

Supposons maintenant que  $b = \frac{a}{2}$ . Comme  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+$  et  $\mathfrak{g}_{\frac{a}{2}}^-$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing, avec  $[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-] \subset \mathfrak{g}_{\frac{a}{2}}^-$  et  $\dim[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-] = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-$ , il existe un sous-espace  $S$  de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+$  en couplage avec  $[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-]$ . Alors  $\dim S = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-$ . En particulier,  $\dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ > \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-$ . D'autre part,  $[e, U^+]$  est en couplage avec un sous-espace de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-$ . Il s'ensuit que

$$\dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ > \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^- \geq \dim[e, U^+] = \dim U^+ = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ - 1.$$

On en déduit que

$$\dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^- = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ - 1.$$

En particulier,  $U^+$  est en couplage avec  $[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-]$  et on a  $[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+] = [e, U^+] = \mathfrak{g}_{\frac{a}{2}}^+$ .

Pour  $b$  quelconque, on pose

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{<b-a} \oplus \mathfrak{g}_{b-a}^- \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} := \mathfrak{g}_{<-b} \oplus \mathfrak{g}_{-b}^-.$$

Comme  $b > 0$ ,  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ . De plus, elles vérifient les conditions (A2), (A4) et (A5). Comme  $\mathfrak{m}^{\perp} = \mathfrak{g}_{<a-b} \oplus \mathfrak{g}_{a-b}^-$ , on déduit (A3). Pour  $b \neq \frac{a}{2}$ ,

$$\dim \mathfrak{g}_{b-a}^- + \dim \mathfrak{g}_{-b}^- = \dim \mathfrak{g}_{-b}^+ - 1 + \dim \mathfrak{g}_{-b}^- = \dim \mathfrak{g}_{-b} - 1 = \dim U.$$

4 . Classification dans quelques cas particuliers

Pour  $b = \frac{a}{2}$ ,

$$2 \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^- = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^- + \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ - 1 = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} - 1 = \dim U.$$

Ainsi,

$$\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g}_{<b-a} + \dim \mathfrak{g}_{<-b} + \dim U = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e,$$

où la dernière égalité provient du fait que  $\mathbf{P}_U \in PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma)$ . Il en résulte que  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  vérifient la condition (A6). Par conséquent, la paire  $\mathbf{A} := (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma$ . La démonstration s'achève si on montre que toute paire  $b$ -optimale est équivalente à  $\mathbf{A}$ .

Montrons donc que  $\mathbf{P}_U$  est équivalente à  $\mathbf{A}$ . Lorsque  $U = U^+ \oplus U^-$ , i.e.,  $\dim U^- = \dim \mathfrak{g}_{-b}^-$ , on a  $U^- = \mathfrak{g}_{-b}^-$ . On a alors clairement que  $\mathbf{A} \preceq_{\Gamma} \mathbf{P}_U$ .

Considérons le cas où  $U \neq U^+ \oplus U^-$ , i.e.,  $\dim U^- = \dim \mathfrak{g}_{-b}^- - 1$ . Posons

$$W = U^+ \oplus U^- \quad \text{et} \quad V = \begin{cases} [e, U^-]^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{b-a}^+ & \text{si } b \neq \frac{a}{2}, \\ [e, U^-]^{\perp} \cap U^+ & \text{si } b = \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Soient

$$\mathfrak{m}' := \mathfrak{g}_{<b-a} \oplus V \quad \text{et} \quad \mathfrak{n}' := \mathfrak{g}_{<-b} \oplus W.$$

Les sous-espaces  $\mathfrak{m}'$  et  $\mathfrak{n}'$  sont deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  car  $b > 0$ . De plus, ils vérifient les conditions (A2), (A4) et (A5).

Lorsque  $b \neq \frac{a}{2}$ ,

$$\dim V = \dim \mathfrak{g}_{b-a}^+ - \dim [e, U^-] = \dim \mathfrak{g}_{-b}^- - \dim U^- = 1.$$

Il s'ensuit que

$$\dim U^+ + \dim U^- + \dim V = \dim \mathfrak{g}_{-b} - 1 = \dim U.$$

On en déduit que  $\mathfrak{m}'$  et  $\mathfrak{n}'$  vérifient (A6). Comme  $[e, U^+] = [e, \mathfrak{g}_{-b}^+] = \mathfrak{g}_{a-b}^+$ , on a

$$V^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{a-b} = \mathfrak{g}_{a-b}^+ \oplus (V^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{a-b}^-).$$

De plus,  $\dim(V^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{a-b}^-) = \dim \mathfrak{g}_{a-b}^- - 1$  et  $[e, U^-] \subset V^{\perp}$ . Il vient alors

$$\dim(V^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{a-b}) = \dim \mathfrak{g}_{a-b} - 1 = \dim \mathfrak{g}_{-b} - 2 = \dim [e, W],$$

d'où  $V^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{a-b} = [e, W]$ , et la condition (A3) s'ensuit.

Lorsque  $b = \frac{a}{2}$ ,

$$\dim([e, U^-]^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+) = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ - \dim U^- = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^- + 1 - \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^- - 1 = 2.$$

Il en résulte que  $\dim V \leq 2$ . De plus,

$$\dim V = \dim([e, U^-]^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ \cap U^+) = 2 + \dim U^+ - \dim (([e, U^-]^{\perp} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+) + U^+) \geq 1.$$

On en déduit que  $\dim V = 1$  car  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ \cap \mathfrak{g}^e \subset [e, U^-]^{\perp}$ . La condition (A6) est donc vérifiée. Par ailleurs, comme  $[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+] = [e, U^+] = \mathfrak{g}_{\frac{a}{2}}^+$ , on a

$$V^{\perp} \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}] = \mathfrak{g}_{\frac{a}{2}}^+ \oplus V^{\perp} \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-] \quad \text{et} \quad [e, U^-] \subset V^{\perp}.$$

Or,  $V \subset U^+$  et  $U^+$  est en couplage avec  $[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-]$ . Par suite,  $[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-] \not\subset V^\perp$ . On en déduit que  $\dim V^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-] = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^- - 1 = \dim[e, U^-]$ . En particulier,  $V^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-] = [e, U^-]$ . Donc  $V^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^-] = [e, W]$ , d'où la condition (A3).

En conclusion, la paire  $\mathbf{A}'$  est  $e$ -admissible pour  $b$  quelconque. En posant  $E := U^+ \oplus \mathfrak{g}_{-b}^- \in \mathcal{E}$ , on a  $\mathbf{P}_E \in PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma)$ . Alors,

$$\mathbf{P}_U \succ_{\Gamma} \mathbf{A}' \preccurlyeq_{\Gamma} \mathbf{P}_E \succ_{\Gamma} \mathbf{A}.$$

□

**Notations.** On fixe à présent quelques notations valables jusqu'à la fin du chapitre. Désormais,  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est une  $\mathbb{Z}$ -graduation admissible pour  $e$  définie par un élément semisimple  $h_{\Gamma}$  de  $\mathfrak{g}$  et  $(e, h, f)$  est un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$  tel que  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$  (cf. Lemme 1.3.1). On pose  $\mathfrak{s} := \text{Vect}(e, h, f)$  et  $t := h_{\Gamma} - \frac{a}{2}h$ . On désigne par  $\mathfrak{gl}(V)$  l'algèbre de Lie des endomorphismes de  $V$ . On suppose enfin que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ .

### 4.3 Cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$

Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(V)$  où  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après le Lemme 4.1.1, comme  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , la partition associée à  $e$  est  $(d_1, d_2)$ . L'élément  $t$  appartient à  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  et il est semisimple. En tant que  $\mathfrak{s}$ -module,  $V$  se décompose en composantes isotypiques. Comme  $t$  commute avec  $\mathfrak{s}$ , d'après le lemme de Schur,  $t$  laisse stable chaque composante isotypique. Puisque  $t$  est semisimple, sa restriction à chaque composante isotypique est semisimple. De plus, comme  $t \in \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  on a la décomposition

$$V = V_1 \oplus V_2 \tag{4.1}$$

où  $V_i$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $d_i$  et  $V_i$  est stable par  $\text{ad } t$  pour tout  $i \in \{1, 2\}$ . Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , il existe  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{ad } t|_{V_i} = \alpha_i \text{id}_{V_i}$  et on a  $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = 0$ . Rappelons l'identification en tant que  $\mathfrak{gl}(V)$ -modules

$$\mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V$$

où pour  $(\phi, v) \in V^* \times V$  l'endomorphisme  $\phi \otimes v$  de  $V$  est défini par  $\phi \otimes v(x) = \phi(x)v$  pour tout  $x \in V$ . Par suite,

$$\mathfrak{gl}(V) = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq 2} \mathbf{V}_{i,j} \quad \text{où} \quad \mathbf{V}_{i,j} := V_i^* \otimes V_j.$$

Alors  $\mathbf{V}_{i,j}$  est un  $\mathfrak{s}$ -module via l'opération adjointe dans  $\mathfrak{gl}(V)$  et il est  $\text{ad } t$ -stable, avec

$$\text{ad } t|_{\mathbf{V}_{i,j}} = (\alpha_j - \alpha_i) \text{id}_{\mathbf{V}_{i,j}}.$$

De plus on a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbf{V}_{i,j} \times \mathbf{V}_{k,l}} = 0 \quad \text{si} \quad (i, j) \neq (l, k) \quad \text{et} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbf{V}_{i,j} \times \mathbf{V}_{j,i}} \quad \text{est non dégénérée.} \tag{4.2}$$

Autrement dit,  $\mathbf{V}_{i,j}$  et  $\mathbf{V}_{j,i}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing.

On pose

$$d_{i,j} = \min(d_i, d_j), \quad D_{i,j} = \max(d_i, d_j), \quad \Delta_{i,j} = d_i + d_j = d_{i,j} + D_{i,j}.$$

D'après la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}_2$ , on a

$$\mathbf{V}_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{d_{i,j}} \mathbf{V}_{i,j}^k \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{V}_{i,j}^k$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $\Delta_{i,j} - 2k + 1$ .

### 4.3.1 Étude des valeurs propres de $\text{ad } h_\Gamma$

**Étude sur  $\mathbf{V}_{i,i}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .** L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{V}_{i,i}$  est donné par

$$\{-(d_i - 1)a, -(d_i - 3)a, \dots, -a, 0, a, \dots, (d_i - 3)a, (d_i - 1)a\}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{V}_{i,i} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \mathbf{V}_{i,i} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}. \quad (4.4)$$

De plus,

$$\dim(\mathbf{V}_{1,1} \oplus \mathbf{V}_{2,2}) \cap \mathfrak{g} - \dim(\mathbf{V}_{1,1} \oplus \mathbf{V}_{2,2}) \cap \mathfrak{g}^e = d_1(d_1 - 1) + d_2(d_2 - 1). \quad (4.5)$$

**Étude sur  $\mathbf{V}_{1,2}$  et  $\mathbf{V}_{2,1}$ .** On note  $d$ ,  $D$  et  $\Delta$  les entiers  $d_{1,2}$ ,  $D_{1,2}$  et  $\Delta_{1,2}$  respectivement. On pose  $\alpha := \alpha_2 - \alpha_1$ .

Les plus petits poids de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{V}_{1,2}$  et  $\mathbf{V}_{2,1}$  sont respectivement égaux à

$$\rho_{1,2} := a\left(1 - \frac{\Delta}{2}\right) + \alpha \quad \text{et} \quad \rho_{2,1} := a\left(1 - \frac{\Delta}{2}\right) - \alpha.$$

En particulier,  $\rho_{1,2} + \rho_{2,1} = a(2 - \Delta)$ . L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{V}_{1,2}$  (resp.  $\mathbf{V}_{2,1}$ ) est donné par les  $\rho_{1,2} + la$  (resp.  $\rho_{2,1} + la$ ) pour  $l \in \{1, \dots, \Delta - 2\}$ . Pour  $k \in \{1, \dots, d\}$ , on a

$$\mathbf{V}_{1,2}^k = \bigoplus_{l=k-1}^{\Delta-k-1} \mathbf{V}_{1,2}^k(l) \quad \text{où} \quad \mathbf{V}_{1,2}^k(l) := \mathbf{V}_{1,2}^k \cap \mathfrak{g}_{\rho_{1,2}+la}.$$

De même, on a une décomposition similaire de  $\mathbf{V}_{2,1}^k$ . On a alors

$$\langle \mathbf{V}_{1,2}^k(l), \mathbf{V}_{2,1}^{k'}(l') \rangle = \begin{cases} \{0\} & \text{si } l + l' \neq \Delta - 2 \text{ ou } k \neq k'; \\ \mathbb{C} & \text{si } l + l' = \Delta - 2 \text{ et } k = k'. \end{cases} \quad (4.6)$$

Autrement dit,  $\mathbf{V}_{1,2}^k(l)$  et  $\mathbf{V}_{2,1}^k(\Delta - 2 - l)$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing. On peut alors écrire la décomposition suivante de  $\mathbf{V}_{1,2}$  (de façon analogue on écrirait celle de  $\mathbf{V}_{2,1}$ ) :

$$\mathbf{V}_{1,2} = \bigoplus_{l=0}^{\Delta-2} \mathbf{V}_{1,2}(l) \quad \text{où} \quad \mathbf{V}_{1,2}(l) := \mathbf{V}_{1,2} \cap \mathfrak{g}_{\rho_{1,2}+la} = \bigoplus_{k=1}^d \mathbf{V}_{1,2}^k(l).$$

De plus, pour  $i, j \in \{1, 2\}$  tel que  $i \neq j$

$$\dim \mathbf{V}_{i,j}(l) = \begin{cases} l+1 & \text{si } l < d-1; \\ d & \text{si } d-1 \leq l \leq D-1; \\ \Delta-1-l & \text{si } l > D-1. \end{cases} \quad (4.7)$$

En particulier,  $\dim \mathbf{V}_{1,2}(l) = \dim \mathbf{V}_{2,1}(\Delta-l-2)$ . Pour  $i, j \in \{1, 2\}$  tel que  $i \neq j$ , on a

$$\mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}^e \subset \bigoplus_{l=D-1}^{\Delta-2} \mathbf{V}_{i,j}(l).$$

De plus, l'application  $\text{ad } e : \mathbf{V}_{i,j}(l) \rightarrow \mathbf{V}_{i,j}(l+1)$  est injective si  $l < D-1$  et surjective si  $l \geq D-1$ . En particulier,

$$\dim(\mathbf{V}_{1,2} \oplus \mathbf{V}_{2,1}) = 2dD \quad \text{et} \quad \dim(\mathbf{V}_{1,2} \oplus \mathbf{V}_{2,1}) \cap \mathfrak{g}^e = 2d. \quad (4.8)$$

Comme la graduation  $\Gamma$  est  $e$ -admissible, on a d'après le Théorème 1.4.4,  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Il s'ensuit que

$$\rho_{1,2} + (D-1)a > -a \quad \text{et} \quad \rho_{1,2} + (d-1)a < a, \quad (4.9)$$

i.e.,

$$-Da < \rho_{1,2} < a(2-d).$$

Par conséquent, lorsque  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ , on a

$$\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathbf{V}_{1,2}(D-1) \oplus \mathbf{V}_{2,1}(d-2) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathbf{V}_{1,2}(d-2) \oplus \mathbf{V}_{2,1}(D-1).$$

Dans le premier cas, les valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  sont  $\rho_{1,2} + (D-1)a$  et  $\rho_{2,1} + (d-2)a$ . Dans le deuxième cas, les valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  sont  $\rho_{1,2} + (d-2)a$  et  $\rho_{2,1} + (D-1)a$ .

### 4.3.2 Équivalence des paires admissibles.

On répond dans ce sous-paragraphe à la Question 4.0.12 pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ . Compte tenu de la Remarque 3.1.10, dans le cas particulier où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , la réponse est positive. Supposons désormais que  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ . En particulier,  $a \neq 0$ . On procède en deux étapes. Dans un premier temps, on montre que toute paire  $e$ -admissible est équivalente à une paire optimale (cf. Définition 1.2.3). Dans un deuxième temps, on montrera que les paires  $e$ -admissibles optimales sont équivalentes entre elles.

#### Première étape.

**Proposition 4.3.1.** *Toute paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  est équivalente à une paire optimale.*

*Démonstration.* Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  une paire  $e$ -admissible et  $\mathfrak{n}_0$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{g}$  supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{<0}$  contenant  $\mathfrak{n}$ . Il suffit de montrer que la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n}_0)$  est  $e$ -admissible optimale. D'après la Proposition 1.3.7, cela revient à montrer que  $\mathfrak{n}_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Compte tenu de la description précédente des valeurs propres, on peut écrire  $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus W$ , avec

$$W \subset \mathbf{V}_{1,2}(D-1) \oplus \mathbf{V}_{2,1}(d-2) \quad \text{ou} \quad W \subset \mathbf{V}_{1,2}(d-2) \oplus \mathbf{V}_{2,1}(D-1).$$

Il suffit donc de montrer que  $[W, W] \subset \mathfrak{n}$ . Supposons par exemple que  $W \subset \mathbf{V}_{1,2}(D-1) \oplus \mathbf{V}_{2,1}(d-2)$ . On a  $[\mathbf{V}_{1,2}(D-1), \mathbf{V}_{1,2}(D-1)] = \{0\} = [\mathbf{V}_{2,1}(d-2), \mathbf{V}_{2,1}(d-2)]$  car  $\pm 2\alpha$  ne sont pas des valeurs propres de  $\text{ad } t$ . De plus,

$$[\mathbf{V}_{1,2}(D-1), \mathbf{V}_{2,1}(d-2)] \subset (\mathbf{V}_{1,1} \oplus \mathbf{V}_{2,2}) \cap \mathfrak{g}_{<0} = (\mathbf{V}_{1,1} \oplus \mathbf{V}_{2,2}) \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{n}_0,$$

où l'égalité provient de (4.4). On en déduit que  $\mathfrak{n}_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . On raisonne de la même manière si  $W \subset \mathbf{V}_{1,2}(d-2) \oplus \mathbf{V}_{2,1}(D-1)$ . La proposition s'ensuit car  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n}_0)$ .  $\square$

### Deuxième étape.

**Définition 4.3.2.** *On dit qu'une paire  $e$ -admissible optimale est  $\alpha$ -universelle si elle est de la forme  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$ , avec*

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{i,j \in \{1,2\}} \mathfrak{n}_{i,j} \quad \text{où } \mathfrak{n}_{i,j} \subset \mathbf{V}_{i,j}.$$

**Exemple 4.3.3.** *Dans le cas où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{V}_{1,2}(D-1)$ , les paires  $e$ -admissibles optimales  $\alpha$ -universelles sont de la forme*

$$(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathbf{V}_{2,1}(d-2) \oplus U)$$

où  $U$  est un supplémentaire de  $\mathbf{V}_{1,2}(D-1) \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathbf{V}_{1,2}(D-1)$ .

**Proposition 4.3.4.** *Les paires  $e$ -admissibles optimales  $\alpha$ -universelles sont équivalentes entre elles.*

*Démonstration.* On distingue deux cas : le cas où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{V}_{1,2}(D-1)$  et le cas où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{V}_{2,1}(D-1)$ .

**Cas I :**  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{V}_{1,2}(D-1)$ . Dans ce cas, on a  $-a < \rho_{1,2} + (D-1)a < 0$  et  $-a < \rho_{2,1} + (d-2)a < 0$ . On pose

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathbf{V}_{2,1}(d-2).$$

Autrement dit,  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{1,1} \oplus \mathfrak{m}_{2,2} \oplus \mathfrak{m}_{1,2} \oplus \mathfrak{m}_{2,1}$ , avec

$$\mathfrak{m}_{1,1} = \mathbf{V}_{1,1} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}, \quad \mathfrak{m}_{2,2} = \mathbf{V}_{2,2} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a};$$

$$\mathfrak{m}_{1,2} = \mathbf{V}_{1,2} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} = \bigoplus_{l=0}^{D-2} \mathbf{V}_{1,2}(l), \quad \mathfrak{m}_{2,1} = \mathbf{V}_{2,1} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{d-2} \mathbf{V}_{2,1}(l).$$

Pour  $i, j \in \{1, 2\}$ , les sous-espaces  $\mathfrak{m}_{i,j}$  vérifient par construction les conditions (C1), (C2) et (C3) du Lemme 1.4.5 appliqué à la décomposition  $\mathfrak{g} = (\mathbf{V}_{1,1} \oplus \mathbf{V}_{2,2}) \cap \mathfrak{g} \oplus \mathbf{V}_{1,2} \oplus \mathbf{V}_{2,1}$ . La condition (C4) est aussi satisfaite. En effet d'une part, d'après (4.5),

$$\begin{aligned} 2(\dim \mathfrak{m}_{1,1} + \dim \mathfrak{m}_{2,2}) &= d_1(d_1 - 1) + d_2(d_2 - 1) \\ &= \dim((\mathbf{V}_{1,1} \oplus \mathbf{V}_{2,2}) \cap \mathfrak{g}) - \dim((\mathbf{V}_{1,1} \oplus \mathbf{V}_{2,2}) \cap \mathfrak{g}^e). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \dim(\mathfrak{m}_{1,2} + \mathfrak{m}_{2,1}) &= \sum_{l=0}^{D-2} \dim \mathbf{V}_{1,2}(l) + \sum_{l=0}^{d-2} \dim \mathbf{V}_{2,1}(l) \\
 &= \sum_{l=0}^{D-2} \dim \mathbf{V}_{1,2}(l) + \sum_{l=D}^{\Delta-2} \dim \mathbf{V}_{1,2}(l) \\
 &= \dim \mathbf{V}_{1,2} - \dim \mathbf{V}_{1,2}(D-1) \\
 &= d(D-1) \\
 &= \frac{1}{2}(\dim(\mathbf{V}_{1,2} \oplus \mathbf{V}_{2,1}) - \dim(\mathbf{V}_{1,2} \oplus \mathbf{V}_{2,1}) \cap \mathfrak{g}^e),
 \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de (4.8). Il en résulte que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$  vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6). De plus, comme  $[\mathbf{V}_{2,1}(d-2), \mathbf{V}_{2,1}(d-2)] = \{0\}$ , on en déduit que  $\mathfrak{m}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Ainsi,  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \in PA(e, \Gamma)$ . En particulier, pour tout supplémentaire  $U$  de  $\mathbf{V}_{1,2}(D-1) \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathbf{V}_{1,2}(D-1)$ , on a

$$\mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathbf{V}_{2,1}(d-2) \oplus U.$$

D'après l'Exemple 4.3.3,  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  pour toute paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  optimale  $\alpha$ -universelle. La proposition s'ensuit.

**Cas II.** Dans ce cas, on a  $-a < \rho_{2,1} + (D-1)a < 0$  et  $-a < \rho_{1,2} + (d-2)a < 0$ . On pose  $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathbf{V}_{1,2}(d-2)$  et on raisonne de façon analogue au cas I.  $\square$

**Proposition 4.3.5.** *Les paires  $e$ -admissibles optimales sont équivalentes entre elles.*

*Démonstration.* Supposons par exemple que  $\mathfrak{g}_{< 0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{V}_{1,2}(D-1)$ . En particulier,

$$-a < \rho_{1,2} + (D-1)a < 0 \quad \text{et} \quad -a < \rho_{2,1} + (d-2)a < 0.$$

Si  $\rho_{1,2} + (D-1)a \neq \rho_{2,1} + (d-2)a$ , alors une paire  $e$ -admissible optimale est  $\alpha$ -universelle pour des raisons de dimension. Supposons alors que  $k := \rho_{1,2} + (D-1)a = \rho_{2,1} + (d-2)a$ . On a

$$k = -\frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_k = \mathbf{V}_{1,2}(D-1) \oplus \mathbf{V}_{2,1}(d-2).$$

Alors les paires optimales sont en effet  $\frac{a}{2}$ -optimales. Pour  $b = \frac{a}{2}$ , les conditions (T1), (T2), (T3) et (T4) du Lemme 4.2.4 sont vérifiées, avec  $\mathfrak{g}_k^+ = \mathbf{V}_{1,2}(D-1)$  et  $\mathfrak{g}_k^- = \mathbf{V}_{2,1}(d-2)$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

D'après le Théorème 3.2.7, on peut conclure.

**Théorème 4.3.6.** *Lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$  et  $\text{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

## 4.4 Cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$

Supposons dans ce paragraphe que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(V)$  et que la partition associée à  $e$  vérifie l'une des conditions (a) ou (b) du Lemme 4.1.2. On peut supposer qu'elle est de la forme  $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)$ , avec  $d_1 = d_2$ , où on ne suppose plus que les  $d_i$  soient croissants.

#### 4 . Classification dans quelques cas particuliers

On conserve les notations utilisées dans la Section 4.1. La forme bilinéaire non dégénérée  $\Phi$  induit un isomorphisme  $\beta : V \rightarrow V^*$  qui associe à un élément  $v$  de  $V$  la forme linéaire  $\Phi(v, \cdot)$ . Les isomorphismes  $\beta$  et  $\beta^{-1}$  sont des isomorphismes de  $\mathfrak{so}(V)$ -modules. On a l'identification de  $\mathfrak{so}(V)$ -modules

$$\mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V \simeq V \otimes V.$$

En effet, la structure de  $\mathfrak{so}(V)$ -module sur  $\mathfrak{gl}(V)$  est donnée par l'opération adjointe dans  $\mathfrak{gl}(V)$ . De plus, pour tous  $x, v, w \in V$ , l'identification est donnée par

$$(v \otimes w)(x) = \Phi(v, x)w.$$

Pour  $v, w \in V$ , on note  $v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v$  et  $\bigwedge^2 V = \text{Vect}(v \wedge w; v, w \in V)$  la composante de degré 2 de la graduation naturelle de l'algèbre extérieure de  $V$ . On a  $v \wedge w \in \mathfrak{so}(V)$  pour tout  $v, w \in V$ . On en déduit pour des raisons de dimension

$$\mathfrak{so}(V) = \bigwedge^2 V.$$

Comme  $t$  est un élément semisimple de  $\mathfrak{g}^s$ , on a la décomposition

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$$

où pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $V_i$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $d_i$ , avec  $t|_{V_1} = \alpha_1 \text{id}_{V_1}$ ,  $t|_{V_2} = \alpha_2 \text{id}_{V_2}$  et  $t|_{V_i} = 0$  pour tout  $i \geq 3$ . Comme la trace de  $t$  est nulle,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ . On pose donc  $\alpha := \alpha_1 = -\alpha_2$ . Ici,  $V_1 \oplus V_2, V_3, \dots, V_m$  sont les composantes isotypiques du  $\mathfrak{s}$ -module  $V$ , et définissent une décomposition orthogonale par rapport à  $\Phi$ . Observons que  $V_1$  et  $V_2$  sont totalement isotropes par rapport à  $\Phi$ . On a

$$\bigwedge^2 (V_1 + V_2) = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$$

où

$$\mathbf{W}_0 = \text{Vect}(v \wedge w; v \in V_1, w \in V_2) \simeq \mathfrak{gl}(V_1),$$

$$\mathbf{W}_+ \simeq \bigwedge^2 V_1 = \text{Vect}(v \wedge w; v, w \in V_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_- \simeq \bigwedge^2 V_2 = \text{Vect}(v \wedge w; v, w \in V_2).$$

On note

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-.$$

On a donc la décomposition orthogonale

$$\mathfrak{so}(V) = \bigwedge^2 V = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1 \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq m} \mathbf{V}_{1,i} \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq m} \mathbf{V}_{2,i} \oplus \bigoplus_{3 \leq i < j \leq m} \mathbf{V}_{i,j}, \quad (4.10)$$

avec  $\mathbf{V}_{i,i} \simeq \bigwedge^2 V_i$  et  $\mathbf{V}_{i,j} \simeq V_i \otimes V_j$  pour  $i < j$ , des isomorphismes en tant que  $\mathfrak{s}$ -modules. De plus,  $\mathbf{W}_+$  et  $\mathbf{W}_-$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing.

La décomposition du produit extérieur de deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}_2$  donne

$$\mathbf{W}_+ = \bigwedge^2 V_1 = \bigoplus_{k=1}^{\lfloor \frac{d_1}{2} \rfloor} \mathbf{W}_+^k \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_- = \bigwedge^2 V_2 = \bigoplus_{k=1}^{\lfloor \frac{d_2}{2} \rfloor} \mathbf{W}_-^k,$$

où  $\mathbf{W}_+^k$  et  $\mathbf{W}_-^k$  sont deux  $\mathfrak{s}$ -modules simples de dimension  $2d_1 - 4k + 1$  chacun. De même pour  $i \geq 3$ , on a la décomposition

$$\mathbf{V}_{i,i} = \bigoplus_{k=1}^{\lfloor \frac{d_i}{2} \rfloor} \mathbf{V}_{i,i}^k,$$

où  $\mathbf{V}_{i,i}^k$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $2d_i - 4k + 1$ . De plus,

$$\mathbf{W}_0 = \bigoplus_{k=1}^{d_1} \mathbf{W}_0^k,$$

où  $\mathbf{W}_0^k$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $2d_1 - 2k + 1$ . La décomposition en  $\mathfrak{s}$ -modules simples de  $\mathbf{V}_{i,j}$  pour  $i \neq j$  est donnée par la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}_2$ , à la manière de la section précédente.

#### 4.4.1 Étude des valeurs propres de $\text{ad } h_\Gamma$

**Étude sur  $\mathbf{W}_0$ .** On sait que  $\text{ad } t|_{\mathbf{W}_0} = 0$ . Il s'ensuit que l'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{W}_0$  est inclus dans  $a\mathbb{Z}$ . Ainsi,

$$\mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} = \mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}_{< 0}. \quad (4.11)$$

De plus,

$$\dim \mathbf{W}_0 = d_1^2 \quad \text{et} \quad \dim(\mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}^e) = d_1. \quad (4.12)$$

**Étude sur  $\mathbf{V}_{i,j}$  pour  $3 \leq i \leq j \leq m$ .** On sait d'une part que  $\text{ad } t|_{\mathbf{V}_{i,j}} = 0$ . D'autre part,  $d_i$  est impair pour tout  $i \geq 3$ . Il s'ensuit que 0 est une valeur propre de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{V}_{i,j}$ . Alors

$$\mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} = \mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}_{< 0}. \quad (4.13)$$

De plus,

$$\dim \mathbf{V}_{i,j} = d_i d_j \quad \text{et} \quad \dim(\mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}^e) = \min(d_i, d_j). \quad (4.14)$$

**Étude sur  $\mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$ .** On sait que  $\text{ad } t|_{\mathbf{W}_+} = 2\alpha \text{id}_{\mathbf{W}_+}$  et  $\text{ad } t|_{\mathbf{W}_-} = -2\alpha \text{id}_{\mathbf{W}_-}$ . Les plus petits poids de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{W}_+$  et  $\mathbf{W}_-$  sont donnés respectivement par :

$$\rho_+ := 2\alpha - (d_1 - 2)a \quad \text{et} \quad \rho_- := -2\alpha - (d_1 - 2)a.$$

Alors les valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{W}_+$  (respectivement  $\mathbf{W}_-$ ) sont les  $\rho_+ + la$  (resp.  $\rho_- + la$ ) pour  $l \in \{0, \dots, 2(d_1 - 2)\}$ . Pour  $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{d_1}{2} \rfloor\}$ , on a

$$\mathbf{W}_\pm^k = \bigoplus_{l=2(k-1)}^{2(d_1-1-k)} \mathbf{W}_\pm^k(l) \quad \text{où} \quad \mathbf{W}_\pm^k(l) := \mathbf{W}_\pm^k \cap \mathfrak{g}_{\rho_\pm + la}.$$

En particulier,  $\dim \mathbf{W}_\pm^k(l) = 1$ . On remarque que

$$\langle \mathbf{W}_+^k(l), \mathbf{W}_-^{k'}(l') \rangle = \begin{cases} \{0\} & \text{si } l + l' \neq 2(d_1 - 2) \text{ ou } k \neq k'; \\ \mathbb{C} & \text{si } l + l' = 2(d_1 - 2) \text{ et } k = k'. \end{cases} \quad (4.15)$$

4 . Classification dans quelques cas particuliers

On note  $\mathbf{W}_\pm(l) := \mathbf{W}_\pm \cap \mathfrak{g}_{\rho_\pm + la}$ . Alors  $\dim \mathbf{W}_\pm(l) = \lfloor \frac{l+2}{2} \rfloor$  si  $l \leq d_1 - 2$  et  $\lfloor \frac{2d_1-l-2}{2} \rfloor$  sinon.

On distingue deux cas selon la parité de  $d_1$ .

\*  $d_1$  est pair. Dans ce cas,

$$\mathbf{W}_\pm \cap \mathfrak{g}^e \subset \bigoplus_{\substack{l=d_1-2 \\ l \text{ pair}}}^{2(d_1-2)} \mathbf{W}_\pm(l).$$

Le fait que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  implique que  $2\alpha > -a$  et  $-2\alpha > -a$ , i.e.,

$$-\frac{a}{2} < \alpha < \frac{a}{2}. \quad (4.16)$$

Il s'ensuit que  $\rho_+ + (d_1 - 3)a < 0 < \rho_+ + (d_1 - 1)a$ .

\*  $d_1$  est impair. Dans ce cas,

$$\mathbf{W}_\pm \cap \mathfrak{g}^e \subset \bigoplus_{\substack{l=d_1-1 \\ l \text{ pair}}}^{2(d_1-2)} \mathbf{W}_\pm(l).$$

Le fait que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  implique que  $2\alpha + a > -a$  et  $-2\alpha + a > -a$ , i.e.,

$$-a < \alpha < a. \quad (4.17)$$

Il s'ensuit que  $\rho_+ + (d_1 - 4)a < 0 < \rho_+ + d_1 a$ .

**Étude sur  $\mathbf{V}_{1,i} \oplus \mathbf{V}_{2,i}$  pour  $i \geq 3$ .** Dans ce cas, l'étude des valeurs propres ressemble à celle des valeurs propres sur  $\mathbf{V}_{1,2} \oplus \mathbf{V}_{2,1}$  dans le cas de  $\mathfrak{sl}(V)$ . On rappelle que  $d_{1,i} = \min(d_1, d_i)$ ,  $D_{1,i} = \max(d_1, d_i)$  et  $\Delta_{1,i} = d_1 + d_i = d_{1,i} + D_{1,i}$ . Rappelons aussi que

$$\rho_{1,i} = \left(\frac{2 - \Delta_{1,i}}{2}\right)a + \alpha \quad \text{et} \quad \rho_{2,i} = \left(\frac{2 - \Delta_{1,i}}{2}\right)a - \alpha.$$

De plus,  $(\mathbf{V}_{1,i} \oplus \mathbf{V}_{2,i}) \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  implique que

$$\rho_{1,i} + (D_{1,i} - 1)a > -a \quad \text{et} \quad \rho_{1,i} + (d_{1,i} - 1)a < a. \quad (4.18)$$

On distingue deux cas selon la parité de  $d_1$ .

\*  $d_1$  est pair. On a vu que  $-\frac{a}{2} < \alpha < \frac{a}{2}$ . Il s'ensuit que pour  $j \in \{1, 2\}$

$$\rho_{j,i} + \frac{\Delta_{1,i} - 3}{2}a < 0 < \rho_{j,i} + \frac{\Delta_{1,i} - 1}{2}a,$$

avec  $d_{1,i} - 1 < \frac{\Delta_{1,i} - 3}{2} < D_{1,i} - 1$ , i.e.,  $(\mathbf{V}_{j,i} \cap \mathfrak{g}_{<0}) \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ .

\*  $d_1$  est impair. Dans ce cas,  $-a < \alpha < a$ . Il s'ensuit que pour  $j \in \{1, 2\}$

$$\rho_{j,i} + \frac{\Delta_{1,i} - 4}{2}a < 0 < \rho_{j,i} + \frac{\Delta_{1,i}}{2}a$$

avec  $d_{1,i} - 1 < \frac{\Delta_{1,i} - 4}{2} < D_{1,i} - 1$ , i.e.,  $(\mathbf{V}_{j,i} \cap \mathfrak{g}_{<0}) \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ .

**Conclusion.** Notre objectif est d'obtenir l'équivalence des paires  $e$ -admissibles. Compte tenu de la Remarque 3.1.10, on va s'intéresser au cas où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ . Observons que dans ce cas,  $\alpha \neq 0$ . D'après l'étude précédente, on déduit que  $\dim(\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e) = 1$ , avec  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_+ \cap \mathfrak{g}_{<0}$  ou  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_- \cap \mathfrak{g}_{<0}$ . Plus précisément, dans le cas où  $d_1$  est pair, on a

$$\rho_+ + (d_1 - 2)a < 0 < \rho_+ + (d_1 - 1)a, \quad \text{i.e., } \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_+(d_1 - 2), \quad \text{i.e., } \alpha < 0;$$

ou

$$\rho_+ + (d_1 - 3)a < 0 < \rho_+ + (d_1 - 2)a, \quad \text{i.e., } \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_-(d_1 - 2), \quad \text{i.e., } \alpha > 0.$$

Dans le cas où  $d_1$  est impair, on a

$$\rho_+ + (d_1 - 1)a < 0 < \rho_+ + d_1 a, \quad \text{i.e., } \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_+(d_1 - 1), \quad \text{i.e., } \alpha < 0;$$

ou

$$\rho_+ + (d_1 - 4)a < 0 < \rho_+ + (d_1 - 3)a, \quad \text{i.e., } \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_-(d_1 - 1), \quad \text{i.e., } \alpha > 0.$$

On résume dans la Table 4.4 l'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$  dans chacun des sous-espaces  $\mathbf{W}_+$ ,  $\mathbf{W}_-$ ,  $\mathbf{V}_{1,i}$  et  $\mathbf{V}_{2,i}$ .

$d_1$	$\alpha$	$\mathbf{W}_+$	$\mathbf{W}_-$	$\mathbf{V}_{1,i}$	$\mathbf{V}_{2,i}$
pair	$] - \frac{a}{2}, 0[$	$2\alpha$	$-2\alpha - a$	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$
pair	$] 0, \frac{a}{2}[$	$2\alpha - a$	$-2\alpha$	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$
impair	$] - a, -\frac{a}{2}[$	$2\alpha + a$	$-2\alpha - 2a$	$\alpha$	$-a - \alpha$
impair	$] \frac{a}{2}, a[$	$2\alpha - 2a$	$-2\alpha + a$	$-a + \alpha$	$-\alpha$

TABLE 4.4 – Valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  dans  $] - a, 0[$  pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ .

#### 4.4.2 Équivalence des paires $e$ -admissibles dans des cas particuliers

On distingue deux cas : le cas où le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$  est égal à 4, et le cas où il est strictement inférieur à 4.

**Cas I :** le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$  est égal à 4.

**Définition 4.4.1.** On dit qu'une paire  $e$ -admissible optimale est  $\alpha$ -universelle si elle est de la forme  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$ , avec

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_\pm \oplus \bigoplus_{i \geq 3} (\mathfrak{n}_{1,i} \oplus \mathfrak{n}_{2,i}) \oplus \bigoplus_{3 \leq i < j \leq m} \mathfrak{n}_{i,j}$$

où  $\mathfrak{n}_0 \subset \mathbf{W}_0$ ,  $\mathfrak{n}_\pm \subset \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$  et  $\mathfrak{n}_{i,j} \subset \mathbf{V}_{i,j}$  pour tous  $i, j$ .

**Remarque 4.4.2.** D'après notre hypothèse, les paires  $e$ -admissibles optimales sont  $\alpha$ -universelles pour des raisons de dimension. Par exemple, si  $d_1$  est pair et  $\alpha < 0$ , d'après notre hypothèse, on a

$$\mathbf{W}_+(d_1 - 2) = \mathfrak{g}_{2\alpha}, \quad \mathbf{W}_-(d_1 - 3) = \mathfrak{g}_{-a-2\alpha},$$

4 . Classification dans quelques cas particuliers

$$\bigoplus_{i \geq 3} \mathbf{V}_{1,i}(\frac{\Delta_{1,i} - 3}{2}) = \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha} \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i \geq 3} \mathbf{V}_{2,i}(\frac{\Delta_{1,i} - 3}{2}) = \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}.$$

Dans ce cas, si  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  est une paire  $e$ -admissible optimale, alors  $\mathfrak{n}$  est de la forme

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \oplus \mathfrak{g}_{-a-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}$$

où  $U$  est un sous-espace gradué supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ .

**Proposition 4.4.3.** *Une paire  $e$ -admissible est équivalente à une paire  $e$ -admissible optimale.*

*Démonstration.* Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  une paire  $e$ -admissible et  $\mathfrak{n}_0$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{g}$  supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{<0}$  contenant  $\mathfrak{n}$ . Montrons que la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n}_0)$  est  $e$ -admissible optimale. La proposition s'ensuit. Il suffit pour cela, d'après la Proposition 1.3.7, de montrer que  $\mathfrak{n}_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Supposons par exemple que  $d_1$  soit pair et que  $\alpha < 0$ . Comme dans la Remarque 4.4.2,  $\mathfrak{n}_0$  est de la forme

$$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \oplus \mathfrak{g}_{-a-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}$$

où  $U$  est un sous-espace gradué supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ . Il suffit alors de remarquer d'une part que

$$[\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha}, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha}] \subset \mathfrak{g}_{-a+2\alpha} \subset \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{n}_0,$$

et d'autre part que

$$[\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}] \subset \mathfrak{g}_{-a-2\alpha} \subset \mathfrak{n}_0,$$

où l'égalité provient de notre hypothèse sur les valeurs propres. On en déduit que  $\mathfrak{n}_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Grâce à un raisonnement similaire, on montre qu'il en est de même dans les autres cas de la Table 4.4.  $\square$

**Proposition 4.4.4.** *Les paires  $e$ -admissibles optimales sont équivalentes entre elles.*

*Démonstration.* On pose pour tous  $3 \leq i \leq j \leq m$

$$\mathfrak{m}_{i,j} := \mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_0 := \mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}.$$

Lorsque  $\alpha < 0$ , on pose de plus pour  $i \geq 3$  :

$$\mathfrak{m}_{1,i} := \mathbf{V}_{1,i} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}, \quad \mathfrak{m}_{2,i} := \mathbf{V}_{2,i} \cap \mathfrak{g}_{<0} \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_{\pm} := \mathbf{W}_+ \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathbf{W}_- \cap \mathfrak{g}_{<0}.$$

Lorsque  $\alpha > 0$ , on pose pour  $i \geq 3$  :

$$\mathfrak{m}_{1,i} := \mathbf{V}_{1,i} \cap \mathfrak{g}_{<0}, \quad \mathfrak{m}_{2,i} := \mathbf{V}_{2,i} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_{\pm} := \mathbf{W}_+ \cap \mathfrak{g}_{<0} \oplus \mathbf{W}_- \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}.$$

Les sous-espaces  $\mathfrak{m}_0$ ,  $\mathfrak{m}_{\pm}$  et  $\mathfrak{m}_{i,j}$  vérifient par construction les conditions (C1), (C2) et (C3) du Lemme 1.4.5 appliqué à la décomposition (4.10). De plus,

$$\dim \mathfrak{m}_0 = \frac{d_1(d_1 - 1)}{2} = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{W}_0 - \dim(\mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}^e))$$

et, pour  $3 \leq i \leq j \leq m$

$$2 \dim \mathfrak{m}_{i,j} = d_i d_j - \min(d_i, d_j) = \dim \mathbf{V}_{i,j} - \dim(\mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}^e).$$

Dans le cas où  $d_1$  est pair et  $\alpha < 0$ , on a

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{m}_{\pm} &= \sum_{l=0}^{d_1-3} \dim \mathbf{W}_+(l) + \sum_{l=0}^{d_1-3} \dim \mathbf{W}_-(l) = \sum_{l=0}^{d_1-3} \dim \mathbf{W}_+(l) + \sum_{l=d_1-1}^{2(d_1-2)} \dim \mathbf{W}_+(l) \\ &= \dim \mathbf{W}_+ - \dim \mathbf{W}_+(d_1-2) = \frac{d_1(d_1-1)}{2} - \left\lfloor \frac{d_1}{2} \right\rfloor \\ &= \frac{1}{2} \left( \dim(\mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-) - \dim(\mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-) \cap \mathfrak{g}^e \right) \end{aligned}$$

car  $\left\lfloor \frac{d_1}{2} \right\rfloor = \frac{d_1}{2}$  comme  $d_1$  est pair. D'autre part, pour  $i \geq 3$

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{m}_{1,i} \oplus \mathfrak{m}_{2,i}) &= \sum_{l=0}^{\frac{\Delta_{1,i}-5}{2}} \dim \mathbf{V}_{1,i}(l) + \sum_{l=0}^{\frac{\Delta_{1,i}-3}{2}} \dim \mathbf{V}_{2,i}(l) \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{\Delta_{1,i}-5}{2}} \dim \mathbf{V}_{1,i}(l) + \sum_{l=\frac{\Delta_{1,i}-1}{2}}^{\frac{\Delta_{1,i}-2}{2}} \dim \mathbf{V}_{1,i}(l) \\ &= \dim \mathbf{V}_{1,i} - \dim \mathbf{V}_{1,i}\left(\frac{\Delta_{1,i}-3}{2}\right) \\ &= d_{1,i}(D_{1,i} - 1) \\ &= \dim(\mathbf{V}_{1,i} \oplus \mathbf{V}_{2,i}) - \dim(\mathbf{V}_{1,i} \oplus \mathbf{V}_{2,i}) \cap \mathfrak{g}^e. \end{aligned}$$

Pour les autres cas, des calculs similaires nous montrent donc que la condition (C4) du Lemme 1.4.5 est vérifiée. On pose

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_{\pm} \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq j \leq m} \mathfrak{m}_{i,j} \oplus \bigoplus_{i \geq 3} (\mathfrak{m}_{1,i} \oplus \mathfrak{m}_{2,i}).$$

On en déduit que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$  vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6) de la Définition 1.2.1. Par ailleurs, on vérifie que  $\mathfrak{m}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . En effet, dans le cas où  $d_1$  est pair et  $\alpha < 0$ , il suffit de remarquer que

$$[\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}-\alpha}, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{-a-2\alpha} \subset \mathfrak{m}.$$

Il en est de même pour le reste des cas. On conclut donc que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$  est  $e$ -admissible. De plus, par construction,  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  pour toute paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  optimale. La proposition s'ensuit.  $\square$

En conclusion, sous l'hypothèse que le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  appartenant à  $] -a, 0[$  est égal à 4, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles.

**Cas II :** le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  appartenant à  $] -a, 0[$  est strictement inférieur à 4. On représente dans la Table 4.5 les différentes possibilités.

Lorsque  $\alpha \in \{\pm \frac{a}{6}, \pm \frac{2a}{3}\}$ , on a

$$\mathfrak{g}_{< \frac{a}{3}-a} = \mathfrak{g}_{< -\frac{2a}{3}} = \mathfrak{g}_{\leq -a}.$$

Il s'ensuit que les paires  $e$ -admissibles optimales sont en effet  $\frac{a}{3}$ -optimales. De plus,  $\mathfrak{g}_{< 0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}}$  et tout supplémentaire gradué de  $\mathfrak{g}_{< 0} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{< 0}$  s'écrit

$$\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{2a}{3}} \oplus U \quad \text{où } U \oplus (\mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}} \cap \mathfrak{g}^e) = \mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}}.$$

4 . Classification dans quelques cas particuliers

$d_1$	$\alpha$	$\mathbf{W}_+$	$\mathbf{W}_-$	$\mathbf{V}_{1,i}$	$\mathbf{V}_{2,i}$
pair	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$
pair	$-\frac{a}{6}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$
pair	$\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{3a}{4}$
pair	$\frac{a}{6}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$
impair	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$
impair	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$
impair	$\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{3a}{4}$
impair	$\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$

TABLE 4.5 – Possibilités du cas II pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ .

Par suite, tout supplémentaire gradué de  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{<0}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . On en déduit que toute paire  $e$ -admissible est équivalente à une paire  $e$ -admissible optimale. D'autre part, pour  $b = \frac{a}{3}$ , les conditions (T1), (T2), (T3) et (T4) du Lemme 4.2.4 sont vérifiées. On précise que, par exemple lorsque  $d_1$  est pair et  $\alpha = -\frac{a}{6}$ , on a

$$\mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}}^+ = \mathbf{W}_+ \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}}, \quad \mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}}^- = \bigoplus_{i \geq 3} \mathbf{V}_{2,i} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}};$$

$$\mathfrak{g}_{-\frac{2a}{3}}^+ = \mathbf{W}_- \cap \mathfrak{g}_{-\frac{2a}{3}}, \quad \mathfrak{g}_{-\frac{2a}{3}}^- = \bigoplus_{i \geq 3} \mathbf{V}_{1,i} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{2a}{3}};$$

$$\mathfrak{g}_{\frac{a}{3}}^+ = \bigoplus_{i \geq 3} \mathbf{V}_{1,i} \cap \mathfrak{g}_{\frac{a}{3}}, \quad \mathfrak{g}_{\frac{a}{3}}^- = \mathbf{W}_- \cap \mathfrak{g}_{\frac{a}{3}};$$

$$\mathfrak{g}_{\frac{2a}{3}}^+ = \bigoplus_{i \geq 3} \mathbf{V}_{2,i} \cap \mathfrak{g}_{\frac{2a}{3}}, \quad \mathfrak{g}_{\frac{2a}{3}}^- = \mathbf{W}_+ \cap \mathfrak{g}_{\frac{2a}{3}}.$$

On en déduit alors que les paires  $e$ -admissibles  $\frac{a}{3}$ -optimales, i.e., optimales, sont équivalentes entre elles.

Considérons ensuite les cas où  $\alpha \in \{\pm\frac{a}{4}, \pm\frac{3a}{4}\}$ . On a

$$\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{4}}.$$

**Proposition 4.4.5.** *Toute paire  $e$ -admissible équivalente à une paire  $\frac{a}{2}$ -optimale.*

*Démonstration.* Tout d'abord, il existe  $r \in \{1, 2\}$  tel que

$$\mathfrak{g}_{-\frac{a}{4}} = \bigoplus_{i \geq 3} (\mathbf{V}_{r,i} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{4}}), \quad \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}} = \bigoplus_{i \geq 3} (\mathbf{V}_{3-r,i} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} = (\mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-) \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}.$$

De plus,  $\dim(\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} \cap \mathfrak{g}^e) = 1$  et les applications  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{-\frac{a}{4}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\frac{3a}{4}}$  et  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\frac{a}{4}}$  sont injectives. Il s'ensuit que

$$\dim \mathfrak{g}_{\frac{a}{4}} = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{4}} = \dim \mathfrak{g}_{\frac{3a}{4}} = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}.$$

Soit  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  une paire  $e$ -admissible. On peut alors écrire

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{n}_3 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_1$$

où  $\mathfrak{m}_k \subset \mathfrak{n}_k \subset \mathfrak{g}_{-\frac{ka}{4}}$  pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Comme  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ , on a

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2, \quad [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_3, \quad [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1] \subset \mathfrak{n}_2 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] \subset \mathfrak{n}_3.$$

Les conditions (A3), (A4) et (A5) entraînent que

- \*  $[\mathfrak{n}_1, e] = \mathfrak{m}_3^\perp \cap \mathfrak{g}_{\frac{3a}{4}}$ ,  $[\mathfrak{n}_3, e] = \mathfrak{m}_1^\perp \cap \mathfrak{g}_{\frac{a}{4}}$  et  $[\mathfrak{n}_2, e] = \mathfrak{m}_2^\perp \cap [\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}, e]$ ;
- \*  $\mathfrak{n}_2 \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ ;
- \*  $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2$ ,  $[\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_3$  et  $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_3$ .

D'après ce qui précède, et compte tenu de la condition (A6), on obtient que

$$\dim \mathfrak{n}_1 = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}} - \dim \mathfrak{m}_3, \quad \dim \mathfrak{n}_3 = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{4}} - \dim \mathfrak{m}_1,$$

et

$$\dim \mathfrak{n}_2 = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} - \dim \mathfrak{m}_2 - 1.$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}' &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{m}_2, & \mathfrak{n}' &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}} \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_1; \\ \mathfrak{m}'' &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}} \oplus \mathfrak{m}_2, & \mathfrak{n}'' &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}} \oplus \mathfrak{n}_2; \\ \mathfrak{m}''' &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}, & \mathfrak{n}''' &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}} \oplus U, \end{aligned}$$

où  $U$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ . Compte tenu des propriétés décrites ci-dessus, on obtient par des calculs directs que  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$ ,  $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'')$  et  $(\mathfrak{m}''', \mathfrak{n}''')$  sont des paires  $e$ -admissibles. On remarque que la paire  $(\mathfrak{m}''', \mathfrak{n}''')$  est  $\frac{a}{2}$ -optimale. La paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est alors équivalente à la paire  $(\mathfrak{m}''', \mathfrak{n}''')$  via la suite

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \succeq_{\Gamma} (\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'') \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}''', \mathfrak{n}''').$$

La proposition s'ensuit. □

**Proposition 4.4.6.** *Les paires  $e$ -admissibles  $\frac{a}{2}$ -optimales sont équivalentes entre elles.*

*Démonstration.* Pour  $b = \frac{a}{2}$ , les conditions (T1), (T2), (T3) et (T4) du Lemme 4.2.4 sont vérifiées, d'où la proposition. On précise que lorsque  $\alpha < 0$ ,  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ = \mathbf{W}_+ \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ . Lorsque  $\alpha > 0$ ,  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ = \mathbf{W}_- \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ . □

En conclusion, sous l'hypothèse que le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  appartenant à  $] -a, 0[$  est strictement inférieur à 4, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles.

D'après le Théorème 3.2.7, on peut conclure :

**Théorème 4.4.7.** *Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  et si la partition associée à  $e$  vérifie l'une des conditions (a) ou (b) du Lemme 4.1.2, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

## 4.5 Cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$

Supposons dans ce paragraphe que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}(V)$  et que la partition associée à  $e$  vérifie l'une des conditions (a) ou (b) du Lemme 4.1.3. On peut supposer qu'elle est de la forme  $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)$ , avec  $d_1 = d_2$ , où on ne suppose plus que les  $d_i$  soient croissants. La stratégie suivie dans ce paragraphe est analogue à celle du paragraphe précédent dont on reprend les grandes lignes en expliquant seulement les changements nécessaires.

On conserve les notations utilisées dans la Section 4.1. L'isomorphisme  $\beta : V \rightarrow V^*$  qui associe à un élément  $v$  de  $V$  la forme linéaire  $\Phi(v, \cdot)$  est un isomorphisme de  $\mathfrak{sp}(V)$ -modules. Comme dans la section précédente, on peut identifier  $\mathfrak{gl}(V)$  avec  $V \otimes V$ . Pour  $v, w \in V$ , on note  $v \cdot w = v \otimes w + w \otimes v$  et  $S^2V = \text{Vect}(v \cdot w; v, w \in V)$  la composante de degré 2 de la graduation naturelle de l'algèbre symétrique de  $V$ . On a  $v \cdot w \in \mathfrak{sp}(V)$  pour tout  $v, w \in V$ . On en déduit pour des raisons de dimension

$$\mathfrak{sp}(V) = S^2V.$$

Comme  $t$  est un élément semisimple de  $\mathfrak{g}^s$ , on a la décomposition

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

où pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $V_i$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $d_i$ , avec  $t|_{V_1} = \alpha_1 \text{id}_{V_1}$ ,  $t|_{V_2} = \alpha_2 \text{id}_{V_2}$  et  $t|_{V_i} = 0$  pour tout  $i \geq 3$ . Comme la trace de  $t$  est nulle,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ . On pose donc  $\alpha := \alpha_1 = -\alpha_2$ . Ici,  $V_1 \oplus V_2, V_3, \dots, V_m$  sont les composantes isotypiques du  $\mathfrak{s}$ -module  $V$ , et définissent une décomposition orthogonale par rapport à  $\Phi$ . Observons que  $V_1$  et  $V_2$  sont totalement isotropes par rapport à  $\Phi$ . On a

$$S^2(V_1 + V_2) = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$$

où

$$\mathbf{W}_0 = \text{Vect}(v \cdot w; v \in V_1, w \in V_2) \simeq \mathfrak{gl}(V_1),$$

$$\mathbf{W}_+ \simeq S^2V_1 = \text{Vect}(v \cdot w; v, w \in V_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_- \simeq S^2V_2 = \text{Vect}(v \cdot w; v, w \in V_2).$$

On note

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-.$$

On a donc la décomposition orthogonale

$$\mathfrak{sp}(V) = S^2V = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1 \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq m} \mathbf{V}_{1,i} \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq m} \mathbf{V}_{2,i} \oplus \bigoplus_{3 \leq i < j \leq m} \mathbf{V}_{i,j}, \quad (4.19)$$

avec  $\mathbf{V}_{i,i} \simeq S^2V_i$  et  $\mathbf{V}_{i,j} \simeq V_i \otimes V_j$ , pour  $i < j$ , sont des isomorphismes en tant que  $\mathfrak{s}$ -modules. De plus,  $\mathbf{W}_+$  et  $\mathbf{W}_-$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing.

La décomposition du produit symétrique de deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}_2$  donne

$$\mathbf{W}_+ = S^2V_1 = \bigoplus_{k=1}^{\lfloor \frac{d_1+1}{2} \rfloor} \mathbf{W}_+^k \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_- = S^2V_2 = \bigoplus_{k=1}^{\lfloor \frac{d_1+1}{2} \rfloor} \mathbf{W}_-^k,$$

où  $\mathbf{W}_+^k$  et  $\mathbf{W}_-^k$  sont deux  $\mathfrak{s}$ -modules simples de dimension  $2d_1 - 4k + 3$  chacun. De même pour  $i \geq 3$ , on a la décomposition

$$\mathbf{V}_{i,i} = \bigoplus_{k=1}^{\lfloor \frac{d_i+1}{2} \rfloor} \mathbf{V}_{i,i}^k,$$

où  $\mathbf{V}_{i,i}^k$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $2d_i - 4k + 3$ . Enfin, les décompositions de  $\mathbf{W}_0$  et de  $\mathbf{V}_{i,j}$  pour  $i \neq j$  sont les mêmes que pour  $\mathfrak{so}(V)$ .

### 4.5.1 Étude des valeurs propres de $\text{ad } h_\Gamma$

**Étude sur  $\mathbf{W}_0$ .** Les mêmes arguments que pour  $\mathfrak{so}(V)$  donnent

$$\mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} = \mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}_{< 0}. \quad (4.20)$$

De plus,

$$\dim \mathbf{W}_0 = d_1^2 \quad \text{et} \quad \dim(\mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}^e) = d_1. \quad (4.21)$$

**Étude sur  $\mathbf{V}_{i,j}$  pour  $3 \leq i \leq j \leq m$ .** On sait que  $\text{ad } t|_{\mathbf{V}_{i,j}} = 0$ . D'autre part,  $d_i$  est pair pour tout  $i \geq 3$ . Il s'ensuit que 0 est une valeur propre de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{V}_{i,j}$ . Alors

$$\mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} = \mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}_{< 0}. \quad (4.22)$$

De plus,

$$\dim \mathbf{V}_{i,j} = d_i d_j \quad \text{et} \quad \dim(\mathbf{V}_{i,j} \cap \mathfrak{g}^e) = \min(d_i, d_j). \quad (4.23)$$

**Étude sur  $\mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$ .** On sait que  $\text{ad } t|_{\mathbf{W}_+} = 2\alpha \text{id}_{\mathbf{W}_+}$  et  $\text{ad } t|_{\mathbf{W}_-} = -2\alpha \text{id}_{\mathbf{W}_-}$ . Les plus petits poids de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{W}_+$  et  $\mathbf{W}_-$  sont donnés respectivement par :

$$\rho_+ := 2\alpha - (d_1 - 1)a \quad \text{et} \quad \rho_- := -2\alpha - (d_1 - 1)a.$$

Alors les valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{W}_+$  (resp.  $\mathbf{W}_-$ ) sont les  $\rho_+ + la$  (resp.  $\rho_- + la$ ) pour  $l \in \{0, \dots, 2(d_1 - 1)\}$ . Pour  $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{d_1+1}{2} \rfloor\}$ , on a

$$\mathbf{W}_\pm^k = \bigoplus_{l=2(k-1)}^{2(d_1-k)} \mathbf{W}_\pm^k(l) \quad \text{où} \quad \mathbf{W}_\pm^k(l) := \mathbf{W}_\pm^k \cap \mathfrak{g}_{\rho_\pm + la}.$$

En particulier,  $\dim \mathbf{W}_\pm^k(l) = 1$ . On remarque que

$$\langle \mathbf{W}_+^k(l), \mathbf{W}_-^{k'}(l') \rangle = \begin{cases} \{0\} & \text{si } l + l' \neq 2(d_1 - 1) \text{ ou } k \neq k'; \\ \mathbb{C} & \text{si } l + l' = 2(d_1 - 1) \text{ et } k = k'. \end{cases} \quad (4.24)$$

On note  $\mathbf{W}_\pm(l) := \mathbf{W}_\pm \cap \mathfrak{g}_{\rho_\pm + la}$ . Alors  $\dim \mathbf{W}_\pm(l) = \lfloor \frac{l+2}{2} \rfloor$  si  $l \leq d_1 - 1$  et  $\lfloor \frac{2d_1-l}{2} \rfloor$  sinon.

On distingue deux cas selon la parité de  $d_1$ .

\*  $d_1$  est impair. Dans ce cas,

$$\mathbf{W}_\pm \cap \mathfrak{g}^e \subset \bigoplus_{\substack{l=d_1-1 \\ l \text{ pair}}}^{2(d_1-1)} \mathbf{W}_\pm(l).$$

4 . Classification dans quelques cas particuliers

Le fait que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  implique que  $2\alpha > -a$  et  $-2\alpha > -a$ , i.e.,

$$-\frac{a}{2} < \alpha < \frac{a}{2}. \quad (4.25)$$

Il s'ensuit que  $\rho_+ + (d_1 - 2)a < 0 < \rho_+ + d_1 a$ .

\*  $d_1$  est pair. Dans ce cas,

$$\mathbf{W}_{\pm} \cap \mathfrak{g}^e \subset \bigoplus_{\substack{l=d_1 \\ l \text{ pair}}}^{2(d_1-2)} \mathbf{W}_{\pm}(l).$$

Le fait que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  implique que  $2\alpha + a > -a$  et  $-2\alpha + a > -a$ , i.e.,

$$-a < \alpha < a. \quad (4.26)$$

Il s'ensuit que  $\rho_+ + (d_1 - 3)a < 0 < \rho_+ + (d_1 + 1)a$ .

**Étude sur  $\mathbf{V}_{1,i} \oplus \mathbf{V}_{2,i}$  pour  $i \geq 3$ .** Dans ce cas, l'étude des valeurs propres ressemble à celle des valeurs propres sur  $\mathbf{V}_{1,2} \oplus \mathbf{V}_{2,1}$  dans le cas de  $\mathfrak{sl}(V)$ . On rappelle que  $d_{1,i} = \min(d_1, d_i)$ ,  $D_{1,i} = \max(d_1, d_i)$  et  $\Delta_{1,i} = d_1 + d_i = d_{1,i} + D_{1,i}$ . Rappelons aussi que

$$\rho_{1,i} = \left(\frac{2 - \Delta_{1,i}}{2}\right)a + \alpha \quad \text{et} \quad \rho_{2,i} = \left(\frac{2 - \Delta_{1,i}}{2}\right)a - \alpha.$$

De plus,  $(\mathbf{V}_{1,i} \oplus \mathbf{V}_{2,i}) \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  implique que

$$\rho_{1,i} + (D_{1,i} - 1)a > -a \quad \text{et} \quad \rho_{1,i} + (d_{1,i} - 1)a < a. \quad (4.27)$$

On distingue deux cas selon la parité de  $d_1$ .

\*  $d_1$  est impair. On a vu que  $-\frac{a}{2} < \alpha < \frac{a}{2}$ . Il s'ensuit que pour  $j \in \{1, 2\}$

$$\rho_{j,i} + \frac{\Delta_{1,i} - 3}{2}a < 0 < \rho_{j,i} + \frac{\Delta_{1,i} - 1}{2}a,$$

avec  $d_{1,i} - 1 < \frac{\Delta_{1,i} - 3}{2} < D_{1,i} - 1$ , i.e.,  $(\mathbf{V}_{j,i} \cap \mathfrak{g}_{<0}) \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ .

\*  $d_1$  est pair. Dans ce cas,  $-a < \alpha < a$ . Il s'ensuit que pour  $j \in \{1, 2\}$

$$\rho_{j,i} + \frac{\Delta_{1,i} - 4}{2}a < 0 < \rho_{j,i} + \frac{\Delta_{1,i}}{2}a$$

avec  $d_{1,i} - 1 < \frac{\Delta_{1,i} - 4}{2} < D_{1,i} - 1$ , i.e.,  $(\mathbf{V}_{j,i} \cap \mathfrak{g}_{<0}) \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ .

**Conclusion.** Compte tenu de la Remarque 3.1.10, on va s'intéresser au cas où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ . Observons que dans ce cas,  $\alpha \neq 0$ . D'après l'étude précédente, on en déduit que  $\dim(\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e) = 1$ , avec  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_+ \cap \mathfrak{g}_{<0}$  ou  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_- \cap \mathfrak{g}_{<0}$ . Plus précisément, dans le cas où  $d_1$  est impair, on a

$$\rho_+ + (d_1 - 1)a < 0 < \rho_+ + d_1 a, \quad \text{i.e.,} \quad \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_+(d_1 - 1), \quad \text{i.e.,} \quad \alpha < 0;$$

ou

$$\rho_+ + (d_1 - 2)a < 0 < \rho_+ + (d_1 - 1)a, \quad \text{i.e.,} \quad \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_-(d_1 - 1), \quad \text{i.e.,} \quad \alpha > 0.$$

Dans le cas où  $d_1$  est pair, on a

$$\rho_+ + d_1 a < 0 < \rho_+ + (d_1 + 1)a, \quad \text{i.e., } \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_+(d_1), \quad \text{i.e., } \alpha < 0;$$

ou

$$\rho_+ + (d_1 - 3)a < 0 < \rho_+ + (d_1 - 2)a, \quad \text{i.e., } \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \subset \mathbf{W}_-(d_1), \quad \text{i.e., } \alpha > 0.$$

On résume dans la Table 4.6 l'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$  dans chacun des sous-espaces  $\mathbf{W}_+, \mathbf{W}_-, \mathbf{V}_{1,i}$  et  $\mathbf{V}_{2,i}$ .

$d_1$	$\alpha$	$\mathbf{W}_+$	$\mathbf{W}_-$	$\mathbf{V}_{1,i}$	$\mathbf{V}_{2,i}$
impair	$] - \frac{a}{2}, 0[$	$2\alpha$	$-2\alpha - a$	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$
impair	$] 0, \frac{a}{2}[$	$2\alpha - a$	$-2\alpha$	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$
pair	$] - a, -\frac{a}{2}[$	$2\alpha + a$	$-2\alpha - 2a$	$\alpha$	$-a - \alpha$
pair	$] \frac{a}{2}, a[$	$2\alpha - 2a$	$-2\alpha + a$	$-a + \alpha$	$-\alpha$

TABLE 4.6 – Valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  dans  $] - a, 0[$  lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ .

### 4.5.2 Équivalence des paires $e$ -admissibles dans des cas particuliers

Comme pour  $\mathfrak{so}(V)$ , on distingue deux cas : le cas où le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$  est égal à 4, et le cas où il est strictement inférieur à 4.

**Cas I :** le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$  est égal à 4. On procède de la même manière que pour  $\mathfrak{so}(V)$  en tenant compte des changements dans l'étude des valeurs propres faite au paragraphe précédent. On peut ainsi démontrer que, dans ce cas, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles.

**Cas II :** le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$  est strictement inférieur à 4. On peut représenter dans la Table 4.7 les différentes possibilités. On remarque que cette table ressemble à la Table 4.5. On peut par suite appliquer le même raisonnement que pour le cas II de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ . On en déduit alors que, dans ce cas également, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. D'après le Théorème 3.2.7, on peut conclure :

**Théorème 4.5.1.** *Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$  et si la partition associée à  $e$  vérifie l'une des conditions (a) ou (b) du Lemme 4.1.3, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

## 4.6 Cas où $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$ ou $\mathbf{E}_6$

Supposons que  $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$ . Comme  $\mathfrak{g}$  est un  $\mathfrak{s}$ -module,  $\mathfrak{g}$  se décompose en composantes isotypiques de  $\mathfrak{s}$ -modules simples. L'élément  $t$  est semisimple et appartient à  $\mathfrak{g}^s$ . Il laisse donc stable chaque composante isotypique. Puisque  $t$  est

$d_1$	$\alpha$	$\mathbf{W}_+$	$\mathbf{W}_-$	$\mathbf{V}_{1,i}$	$\mathbf{V}_{2,i}$
impair	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$
impair	$-\frac{a}{6}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$
impair	$\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{3a}{4}$
impair	$\frac{a}{6}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$
pair	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$
pair	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$
pair	$\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{3a}{4}$
pair	$\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$

TABLE 4.7 – Possibilités du cas II pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ .

semisimple, sa restriction à chaque composante isotypique est semisimple. De nouveau comme  $t \in \mathfrak{g}^s$ , on a une décomposition de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{s}$ -modules simples stables par  $\text{ad } t$ . En conclusion,  $\mathfrak{g}$  se décompose en  $\text{ad } t$ -espaces propres

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathbf{W}_{\lambda}.$$

Pour  $\lambda \neq 0$ ,  $\mathbf{W}_{\lambda}$  et  $\mathbf{W}_{-\lambda}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing. De plus, chaque  $\text{ad } t$ -espace propre se décompose en  $\mathfrak{s}$ -modules simples.

Afin de répondre à la Question 4.0.12, on traite séparément les orbites nilpotentes des Tables 4.1, 4.2 et 4.3. Pour chacune d'entre elles, on peut expliciter les décompositions ci-dessus à l'aide du logiciel GAP4. On étudie ensuite les valeurs propres de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  sur les espaces propres  $\mathbf{W}_{\lambda}$ . On distingue les cas où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ . On considère la propriété suivante :

( $\mathcal{P}$ ) : les  $\rho_{\lambda}$  sont deux à deux distinctes

où  $\rho_{\lambda}$  désigne la valeur propre (si elle existe) de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  sur  $\mathbf{W}_{\lambda}$  appartenant à  $] -a, 0[$ . Enfin, on montre l'équivalence des paires  $e$ -admissibles dans le cas où la propriété ( $\mathcal{P}$ ) est vérifiée.

Nous décrivons la stratégie pour l'orbite  $2A_2 + A_1$  de  $\mathbf{E}_6$ . On omet les détails pour les autres orbites. Elles se traitent de manière similaire. On a  $\dim G \cdot e = 54$  et  $\dim \mathfrak{g}^e = 24$ . L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } t$  est

$$\{-3\alpha, -2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha\}$$

où  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

**Description de  $\mathbf{W}_0$ .** On a

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_{0,5} \oplus \mathbf{W}_{0,3} \oplus \mathbf{W}_{0,1}$$

où  $\mathbf{W}_{0,5}$  est la somme de deux  $\mathfrak{s}$ -modules simples de dimension 5 chacun,  $\mathbf{W}_{0,3}$  est la somme de trois  $\mathfrak{s}$ -modules simples de dimension 3 chacun, et  $\mathbf{W}_{0,1}$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension 1. L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  sur  $\mathbf{W}_0$  est

$$\{-2a, -a, 0, a, 2a\}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}_{<0} = \mathbf{W}_0 \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}.$$

**Description de  $\mathbf{W}_\alpha$  et  $\mathbf{W}_{-\alpha}$ .** On a

$$\mathbf{W}_{\pm\alpha} = \mathbf{W}_{\pm\alpha,6} \oplus \mathbf{W}_{\pm\alpha,4} \oplus \mathbf{W}_{\pm\alpha,2}$$

où  $\mathbf{W}_{\pm\alpha,6}$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension 6,  $\mathbf{W}_{\pm\alpha,4}$  est la somme de deux  $\mathfrak{s}$ -modules simples de dimension 4 chacun, et  $\mathbf{W}_{\pm\alpha,2}$  est la somme de deux  $\mathfrak{s}$ -modules simples de dimension 2 chacun. L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{W}_{\pm\alpha}$  est

$$\left\{ -\frac{5a}{2} \pm \alpha, -\frac{3a}{2} \pm \alpha, -\frac{a}{2} \pm \alpha, \frac{a}{2} \pm \alpha, \frac{3a}{2} \pm \alpha, \frac{5a}{2} \pm \alpha \right\}.$$

De plus,

$$\mathbf{W}_{\pm\alpha} \cap \mathfrak{g}^e = \mathbf{W}_{\pm\alpha} \cap \left( \mathfrak{g}_{\frac{a}{2} \pm \alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\frac{3a}{2} \pm \alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\frac{5a}{2} \pm \alpha} \right).$$

**Description de  $\mathbf{W}_{2\alpha}$  et  $\mathbf{W}_{-2\alpha}$ .** On a

$$\mathbf{W}_{\pm 2\alpha} = \mathbf{W}_{\pm 2\alpha,5} \oplus \mathbf{W}_{\pm 2\alpha,3} \oplus \mathbf{W}_{\pm 2\alpha,1}$$

où  $\mathbf{W}_{\pm 2\alpha,5}$ ,  $\mathbf{W}_{\pm 2\alpha,3}$  et  $\mathbf{W}_{\pm 2\alpha,1}$  sont des  $\mathfrak{s}$ -modules simples de dimensions respectives 5, 3 et 1. L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{W}_{\pm 2\alpha}$  est

$$\{-2a \pm \alpha, -a \pm 2\alpha, \pm 2\alpha, a \pm 2\alpha, 2a \pm 2\alpha\}.$$

De plus,

$$\mathbf{W}_{\pm 2\alpha} \cap \mathfrak{g}^e = \mathbf{W}_{\pm 2\alpha} \cap \left( \mathfrak{g}_{2a \pm 2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{a \pm 2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\pm 2\alpha} \right).$$

**Description de  $\mathbf{W}_{3\alpha}$  et  $\mathbf{W}_{-3\alpha}$ .** Chacun des sous-espaces  $\mathbf{W}_{3\alpha}$  et  $\mathbf{W}_{-3\alpha}$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension 2. L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{W}_{\pm 3\alpha}$  est

$$\left\{ -\frac{a}{2} \pm 3\alpha, \frac{a}{2} \pm 3\alpha \right\}.$$

De plus,

$$\mathbf{W}_{\pm 3\alpha} \cap \mathfrak{g}^e = \mathbf{W}_{\pm 3\alpha} \cap \mathfrak{g}_{\frac{a}{2} \pm 3\alpha}.$$

**Conclusion.** Le fait que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  équivaut à  $2\alpha > -a$  et  $-2\alpha > -a$ , i.e.,

$$-\frac{a}{2} < \alpha < \frac{a}{2}.$$

Il s'ensuit que

- \*  $(\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathbf{W}_{\pm\alpha}) \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  car  $-\frac{a}{2} \pm \alpha < 0 < \frac{a}{2} \pm \alpha$ ;
- \*  $-a + 2\alpha < 0 < a + 2\alpha$ .

Comme on s'intéresse au cas où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ ,  $\alpha \neq 0$ . On distingue alors quatre sous-cas :

- (a)  $\alpha < 0$  et  $\frac{a}{2} + 3\alpha < 0$ ;
- (b)  $\alpha < 0$  et  $\frac{a}{2} + 3\alpha > 0$ ;
- (c)  $\alpha > 0$  et  $-\frac{a}{2} + 3\alpha > 0$ ;
- (d)  $\alpha > 0$  et  $-\frac{a}{2} + 3\alpha < 0$ .

4 . Classification dans quelques cas particuliers

Cas	$\mathbf{W}_\alpha$	$\mathbf{W}_{-\alpha}$	$\mathbf{W}_{2\alpha}$	$\mathbf{W}_{-2\alpha}$	$\mathbf{W}_{3\alpha}$	$\mathbf{W}_{-3\alpha}$
(a)	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$	$2\alpha$	$-a - 2\alpha$	$\frac{a}{2} + 3\alpha$	aucune
(b)	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$	$2\alpha$	$-a - 2\alpha$	$-\frac{a}{2} + 3\alpha$	$-\frac{a}{2} - 3\alpha$
(c)	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$	$-a + 2\alpha$	$-2\alpha$	aucune	$\frac{a}{2} - 3\alpha$
(d)	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$	$-a + 2\alpha$	$-2\alpha$	$-\frac{a}{2} + 3\alpha$	$-\frac{a}{2} - 3\alpha$

TABLE 4.8 – Valeurs propres dans  $] - a, 0[$ , cas de l'orbite  $2A_2 + A_1$  de  $\mathbf{E}_6$ .

Pour chacun de ces sous-cas, on décrit dans la Table 4.8 les valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$ .

Supposons désormais que la propriété  $(\mathcal{P})$  soit vérifiée. Cela est équivalent à dire que le nombre des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] - a, 0[$  est exactement égal à 5 dans les cas (a) et (c), et exactement égal à 6 dans les cas (b) et (d).

**Remarque 4.6.1.** *Par exemple, dans le cas (a), d'après  $(\mathcal{P})$ , si  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  est une paire optimale, alors  $\mathfrak{n}$  est de la forme*

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus (\mathbf{W}_\alpha \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha}) \oplus (\mathbf{W}_{-\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}) \oplus U \oplus (\mathbf{W}_{-2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-a - 2\alpha}),$$

où  $U$  est un supplémentaire de  $\mathbf{W}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathbf{W}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{2\alpha}$ . Dans ce cas particulier,  $(\mathcal{P})$  est vérifiée si et seulement si  $\alpha \notin \{-\frac{3a}{10}, -\frac{a}{4}, -\frac{a}{6}\}$ .

**Proposition 4.6.2.** *Une paire  $e$ -admissible est équivalente à une paire  $e$ -admissible optimale.*

*Démonstration.* Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  une paire  $e$ -admissible et  $\mathfrak{n}_0$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{g}$  supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{<0}$ . Il suffit de montrer que la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n}_0)$  est  $e$ -admissible optimale. La proposition s'ensuit. D'après la Proposition 1.3.7, cela revient à montrer que  $\mathfrak{n}_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Considérons par exemple le cas (a). Comme dans la remarque précédente,  $\mathfrak{n}_0$  est de la forme

$$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus (\mathbf{W}_\alpha \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha}) \oplus (\mathbf{W}_{-\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}) \oplus U \oplus (\mathbf{W}_{-2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-a - 2\alpha}),$$

où  $U$  est un supplémentaire de  $\mathbf{W}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathbf{W}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{2\alpha}$ . Il suffit alors de remarquer que

$$[\mathbf{W}_\alpha \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha}, \mathbf{W}_\alpha \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha}] \subset \mathfrak{g}_{-a + 2\alpha} \subset \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{n}_0,$$

et d'autre part que

$$[\mathbf{W}_{-\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}, \mathbf{W}_{-\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} - \alpha}] \subset \mathfrak{g}_{-a - 2\alpha} = \mathbf{W}_{-2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-a - 2\alpha} \subset \mathfrak{n}_0,$$

où l'égalité provient de  $(\mathcal{P})$ . On en déduit que  $\mathfrak{n}_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Grâce à un raisonnement similaire, on montre qu'il en est de même dans les autres cas de la Table 4.8.  $\square$

Cas	$\mathfrak{m}$
(a)	$\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus (\mathbf{W}_\alpha \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}+\alpha}) \oplus (\mathbf{W}_{-2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-a-2\alpha})$
(b)	$\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus (\mathbf{W}_\alpha \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}+\alpha}) \oplus (\mathbf{W}_{-2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-a-2\alpha}) \oplus (\mathbf{W}_{3\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}+3\alpha})$
(c)	$\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus (\mathbf{W}_\alpha \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}+\alpha}) \oplus (\mathbf{W}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-a+2\alpha})$
(d)	$\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus (\mathbf{W}_\alpha \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}+\alpha}) \oplus (\mathbf{W}_{2\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-a+2\alpha}) \oplus (\mathbf{W}_{-3\alpha} \cap \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}-3\alpha})$

 TABLE 4.9 – Choix de  $\mathfrak{m}$ 

**Proposition 4.6.3.** *Les paires  $e$ -admissibles optimales sont équivalentes entre elles.*

*Démonstration.* Pour chacun des quatre sous-cas, on représente sur la Table 4.9 le choix d'un sous-espace  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$  :

Grâce à l'étude des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  et la description des décompositions en  $\mathfrak{s}$ -modules, on vérifie sans peine par des calculs directs que  $\mathfrak{m}$  est une sous-algèbre  $e$ -admissible de  $\mathfrak{g}$ . De plus,

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \preceq_\Gamma (\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$$

pour toute paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  optimale. La proposition s'ensuit.  $\square$

D'après le Théorème 3.2.7, on peut conclure :

**Conclusion.** Dans le cas de l'orbite  $2A_2 + A_1$  de  $\mathbf{E}_6$  et sous l'hypothèse que  $(\mathcal{P})$  est vérifiée, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.

Pour les autres orbites nilpotentes de  $\mathbf{E}_6$ , ainsi que pour les orbites de  $\mathbf{G}_2$  et  $\mathbf{F}_4$  listées dans les Tables 4.3, 4.1 et 4.2, on montre l'équivalence des paires  $e$ -admissibles par un raisonnement similaire lorsque  $(\mathcal{P})$  est vérifiée.

Compte tenu des résultats obtenus dans ce chapitre, on formule pour conclure une conjecture :

**Conjecture 4.6.4.** *Si le rang de  $\mathfrak{g}^s$  est égal à 1, alors les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

Résoudre cette conjecture serait une première étape dans la résolution de la Conjecture 3.3.10.

#### 4 . Classification dans quelques cas particuliers

# Bibliographie

- [1] K. Baur, S. Ghandour and A. Moreau,  $\chi$ -admissible subalgebras and finite  $W$ -algebras, préprint 2010 (communication privée).
- [2] K. Baur and N. Wallach, *Nice parabolic subalgebras of reductive Lie algebras*, Represent. Theory **9** (2005), 1–29.
- [3] J. Brundan and S.M. Goodwin, *Good grading polytopes*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **94** (2007), no. 1, 155–180.
- [4] J. Brundan and A. Kleshchev, *Shifted Yangians and finite  $W$ -algebras*, Adv. Math. **200** (2006), no. 1, 136–195.
- [5] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press (1956).
- [6] R.W. Carter, *Finite groups of Lie type : Conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience, New York (1985).
- [7] C. Chevalley and S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 85–124.
- [8] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.
- [9] D. Collingwood and W. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, MA, 1993.
- [10] A.G. Elashvili and V.G. Kac, *Classification of good gradings of simple Lie algebras*, in Lie groups and invariant theory (E.B. Vinberg ed.), Amer. Math. Soc. Transl. **213** (2005), 85–104.
- [11] W.L. Gan and V. Ginzburg, *Quantization of Slodowy slices*, Int. Math. Res. Not. (2002), 243–255.
- [12] A. Grothendieck, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publication IHES, tome 29 (1966), 95–103.
- [13] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, no. 52.
- [14] G. Hochschild, *Cohomology of Algebraic Linear Groups*, Illinois J. Math., **5** (1961), 492–519.
- [15] J.C. Jantzen, *Nilpotent Orbits in Representation Theory*, Progress in Mathematics, **228** Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [16] V. Kac, S. Roan and M. Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, Comm. Math. Phys. **241** (2003), 307–342.
- [17] M. Kashiwara and P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag (2006)

## BIBLIOGRAPHIE

- [18] B. Kostant, *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. Math. **48** (1978), 101–184.
- [19] I. Losev, *Finite  $W$ -algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hindustan Book Agency, New Delhi, vol.III (2010), 1281–1307.
- [20] T.E. Lynch, *Generalized Whittaker vectors and representation theory*, Ph.D. Thesis, M.I.T., 1979.
- [21] A. Premet, *Special transverse slices and their enveloping algebras*, With an appendix by Serge Skryabin. Adv. Math. **170** (2002), no. 1, 1–55.
- [22] E. Ragoucy and P. Sorba, *Yangian realisations from finite  $W$ -algebras*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), 551–572.
- [23] S. Skryabin, An appendix to [21].
- [24] P. Tauvel and R.W.T. Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer-Verlag (2005)
- [25] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Mathematics, **118**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.



# Paires admissibles d'une algèbre de Lie simple complexe et $W$ -algèbres finies

## Résumé

Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple complexe et  $e$  un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . Nous nous intéressons dans ce mémoire à la question (soulevée par Premet) d'isomorphisme entre les  $W$ -algèbres finies construites à partir de certaines sous-algèbres nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  dites  *$e$ -admissibles*. Nous introduisons les notions de *paire et graduation  $e$ -admissibles*. Nous montrons ensuite que la  $W$ -algèbre associée à une paire  $e$ -admissible possède des propriétés similaires à celle introduite par Gan et Ginzburg. De plus, nous définissons une relation d'équivalence sur l'ensemble des paires admissibles. Nous montrons alors que si deux paires sont équivalentes, alors les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes. Nous introduisons enfin les notions de *graduation et paire admissibles  $b$ -maximales* et nous montrons que les paires admissibles  $b$ -maximales sont équivalentes entre elles. Comme conséquence de ce résultat, nous retrouvons un résultat de Brundan et Goodwin sur les bonnes graduations. Dans une dernière partie, nous considérons des cas particuliers pour lesquels nous pouvons apporter une réponse complète à la question d'isomorphisme.

**Mots clés :**  $W$ -algèbre finie, Paire admissible, Graduation admissible.

---

## Admissible pairs of a complex simple Lie algebra and finite $W$ -algebras

### Abstract

Let  $\mathfrak{g}$  be a complex simple Lie algebra and  $e$  a nilpotent element of  $\mathfrak{g}$ . We are interested to answer the isomorphism question (raised by Premet) between the finite  $W$ -algebras constructed from some nilpotent subalgebras of  $\mathfrak{g}$  called  *$e$ -admissible*. We introduce the concept of  *$e$ -admissible pair* and  *$e$ -admissible grading*. We show then that the  $W$ -algebra associated to an  $e$ -admissible pair admits similar properties to that introduced by Gan and Ginzburg. Moreover, we define an equivalence relation on the set of admissible pairs and we show that if two admissible pairs are equivalent, it follows that the associated  $W$ -algebras are isomorphic. We introduce later the concepts of  *$b$ -maximal admissible pair* and  *$b$ -maximal admissible grading* and show that  $b$ -maximal admissible pairs are equivalent. As a consequence to this result, we recover a result of Brundan and Goodwin on the good gradings. In a final part, we consider some particular cases where we may find a complete answer to the isomorphism question.

**Keywords :** Finite  $W$ -algebra, Admissible pair, Admissible grading.