Un corrigé de l'épreuve de CAPES externe de mathématiques session 2007 - Deuxième composition

(rédigé par Anne Moreau)

Partie I.

I.1.a) On a $n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha} = 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}.2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = 4\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|^2}.\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\beta\|^2} = 4\left(\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|.\|\beta\|}\right).\left(\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|.\|\beta\|}\right) = 4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})$, d'où $\boxed{n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha} = 4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})}$.

I.1.b) Puisque R est un système de racines, $n_{\alpha,\beta}$ et $n_{\alpha,\beta}$ sont des entiers relatifs. D'autre part, on a $|\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})| \leq 1$. On déduit alors de la question **I.1.a)** que $n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha}$ est un entier compris entre 0 et 4. Autrement dit les seules valeurs possibles pour $\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})$ sont $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Par suite, les seules valeurs possibles pour $\cos(\theta_{\alpha,\beta})$ sont $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$. Conclusion : $\boxed{\text{les seules valeurs possibles pour } \theta_{\alpha,\beta} \text{ sont } \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \text{ et } \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \text{ et } \frac{5\pi}{6}, 0 \text{ et } \pi.}$

I.1.c) Dans chacune des configurations de **I.1.c)**, on a $\cos^2\theta_{\alpha,\beta} = 1$, i.e. $\cos\theta_{\alpha,\beta} = \pm 1$, d'après la question **I.1.a)**. Par suite α et β sont colinéaires. Comme α, β appartiennent à un système de racines, il en résulte que $\beta = \pm\alpha$. Or $n_{\alpha,\beta} = 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 2\frac{\|\alpha\|.\|\beta\|\cos\theta_{\alpha,\beta}}{\|\alpha\|^2} = 2\cos\theta_{\alpha,\beta}\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$. On en déduit que $n_{\alpha,\beta}$ vaut ± 2, ce qui est impossible dans les configurations de **1.c)**. Par conséquent, <u>aucune de ces configurations n'est possible</u>.

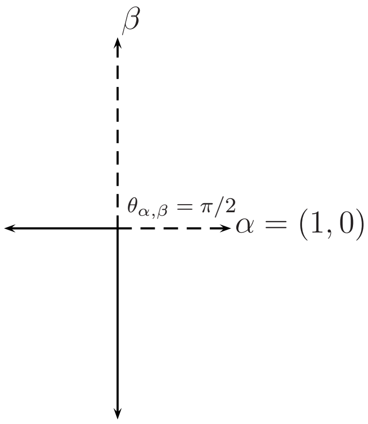
I.1.d) Si $\theta_{\alpha,\beta} \neq \frac{\pi}{2}$, alors $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$ est non nul et $\frac{n_{\beta,\alpha}}{n_{\alpha,\beta}} = \frac{2\cos\theta_{\alpha,\beta}\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}}{2\cos\theta_{\alpha,\beta}\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2}$. De plus, d'après les questions **I.1.a)** et **I.1.c)**, les valeurs possibles pour le couple $(n_{\beta,\alpha}, n_{\alpha,\beta})$ sont $(\pm1,\pm1)$, $(\pm1,\pm2)$, $(\pm2,\pm1)$, $(\pm1,\pm3)$, $(\pm3,\pm1)$, et $(\pm2,\pm2)$. On en déduit que les valeurs possibles pour le rapport $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ sont 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

I.1.e) On suppose $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, i.e. $n_{\beta,\alpha} \leq n_{\alpha,\beta}$, d'après la question **I.1.d)**. Remarquons tout d'abord que $\langle\alpha,\beta\rangle$ et $\langle\beta,\alpha\rangle$ sont de même signe ; par suite $n_{\alpha,\beta}$ et $n_{\beta,\alpha}$ sont de même signe également. D'après la question précédente, les couples possibles pour $(n_{\beta,\alpha}, n_{\alpha,\beta})$ sont donc $(0,0)$, $(\varepsilon\times1, \varepsilon\times1)$, $(\varepsilon\times2, \varepsilon\times1)$, $(\varepsilon\times3, \varepsilon\times1)$, $(\varepsilon\times2, \varepsilon\times2)$ avec $\varepsilon \in \{-1,+1\}$. À l'aide des questions précédentes, on établit alors le tableau suivant :

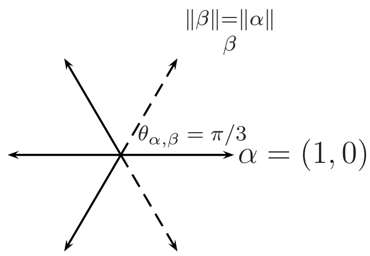
$n_{\alpha,\beta}$	$n_{\beta,\alpha}$	$\theta_{\alpha,\beta}$	$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	quelconque
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
2	1	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
-2	-1	$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
3	1	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
-3	-1	$\frac{5\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
2	2	0	1
-2	-2	π	1

Remarque : On a $n_{\alpha,\beta} = n_{\beta,\alpha} = \pm 2$ si et seulement si $\alpha = \pm\beta$ puisqu'alors α et β sont colinéaires.

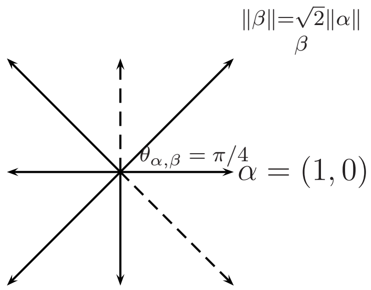
I.2. L'interprétation des pointillés est donnée à la question **III.5.** et n'intervient pas dans cette question.



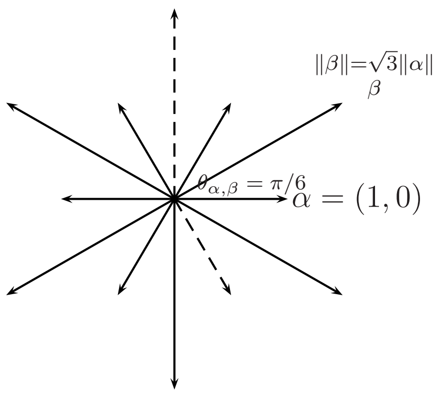
$A_1 \times A_1$



A_2



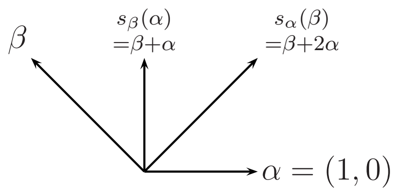
B_2



G_2

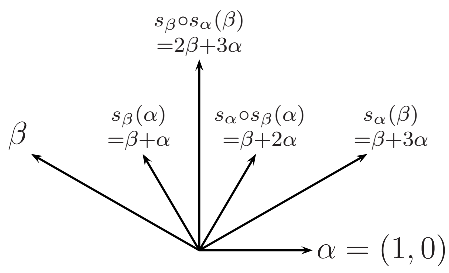
I.3.a) Puisque α et β ne sont pas colinéaires, on a $\langle\alpha,\beta\rangle \neq 0$ d'où $n_{\alpha,\beta} \neq 0$. Si $\gamma = s_\alpha(\beta)$ alors, par définition de s_α, on a $n_{\alpha,\gamma} = 2\langle\alpha, \beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha\rangle \times \frac{1}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} - 4\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = -n_{\alpha,\beta}$. Conclusion : $\boxed{n_{\alpha,\gamma} = -n_{\alpha,\beta}.}$

I.3.b) cas 1 : On suppose $\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{3\pi}{4}$. On a $s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha = \beta - 2\sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{4})\alpha = \beta + 2\alpha$ et $s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}\beta = \alpha - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{4})\alpha = \alpha + \beta$. Conclusion : $\boxed{s_\alpha(\beta) = \beta + 2\alpha \text{ et } s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta.}$



Comme $-\alpha$, $-\beta$, $-s_\alpha(\beta)$ et $-s_\beta(\alpha)$ appartiennent à R, on déduit la question **I.2.** que B_2 est contenu dans R. Supposons par l'absurde qu'il existe $\gamma \in R \setminus B_2$. Quitte à remplacer γ par $-\gamma \in R \setminus B_2$ on peut supposer que l'ordonnée de γ est positive. Si l'angle $\theta_{\alpha,\gamma}$ appartient à l'ensemble $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$, alors γ est colinéaire à l'une des racines de B_2, d'où $\gamma \in B_2$ ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, on a $\theta_{\alpha,\gamma} \in [0, \pi] \setminus \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$. Par conséquent il existe une racine α' de B_2 telle que $\theta_{\alpha,\alpha'} \leq \frac{\pi}{8}$. Ceci est impossible d'après la question **1.e)** car l'angle le plus petit possible entre deux racines non colinéaires de R est $\frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{8}$. Conclusion : $\boxed{R = B_2.}$

I.3.c) cas 2 : On suppose $\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{5\pi}{6}$. En procédant comme dans la question précédente pour les calculs, on obtient : $s_\alpha(\beta) = \beta + 3\alpha$ et $s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta$ puis $s_\beta \circ s_\alpha(\beta) = s_\beta(\beta + 3\alpha) = -\beta + 3(\alpha + \beta) = 2\beta + 3\alpha$ et $s_\alpha \circ s_\beta(\alpha) = s_\alpha(\alpha + \beta) = -\alpha + (\beta + 3\alpha) = 2\alpha + \beta$. Conclusion : $\boxed{s_\alpha(\beta) = \beta + 3\alpha,\ s_\beta(\alpha) = \beta + \alpha,\ s_\beta \circ s_\alpha(\beta) = 2\beta + 3\alpha \text{ et } s_\alpha \circ s_\beta(\alpha) = \beta + 2\alpha.}$



En raisonnant toujours comme dans la question précedente, on montre que $G_2 \subset R$ puis que $R = G_2$ (ici, on obtiendrait que $\theta_{\alpha,\alpha'} \leq \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{6}$). Conclusion : $\boxed{R = G_2.}$

I.3.d) cas 3 : On suppose $\|\beta\| = \|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{2\pi}{3}$. Un rapide calcul donne : $\boxed{s_\alpha(\beta) = \beta + \alpha.}$ Par suite, α, $-\alpha$, β, $-\beta$, $\alpha + \beta$ et $-\alpha - \beta$ appartiennent à R, d'où $A_2 \subset R$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\gamma \in R \setminus A_2$. On peut supposer que l'ordonnée de γ est positive. En raisonnant comme dans la question **I.3.b)**, on montre qu'il existe une racine α' de A_2 telle que l'angle entre γ et α' soit inférieur ou égal à $\frac{\pi}{6}$. En utilisant la question **I.1.e)**, on en déduit que $\theta_{\alpha',\gamma} = \frac{\pi}{6}$. Il résulte alors de la question **I.1.e)** que l'on a : $\|\gamma\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$ car α est de norme minimale. Quitte a effectuer une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$, on peut donc supposer que $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{5\pi}{6}$. En effet une telle rotation laisse invariante le système A_2. On est donc dans la situation de la question **I.3.c)**. Par suite, $R = G_2$. Conclusion : $\boxed{R = A_2 \text{ ou } R = G_2.}$

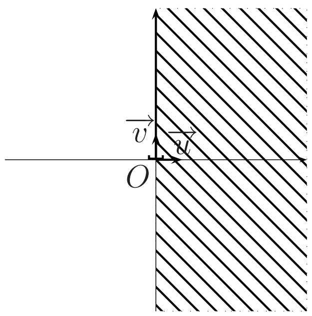
I.4. On vérifie tout d'abord que les ensembles $A_1 \times A_1$, A_2, B_2 et G_2 réprésentés à la question **I.2.** forment des systèmes de racines de $\mathbb{R}^2$. (On ne détaillera pas ce point ici mais il faudrait vérifier soigneusesement que chacun de ces ensembles satisfait aux conditions d'un système de racines.) Ces systèmes de racines sont clairement deux à deux non isomorphes (ils sont par exemple de cardinaux différents). Puis, d'après la question **I.3.**, ce sont les seuls systèmes de racines de $\mathbb{R}^2$ à isomorphismes près.

Partie II.

II.1.a) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^-$ tel que $x \preceq y$. Montrons $\lambda y \preceq \lambda x$. D'après la première proprieté de la relation $\preceq$ appliquée à $z=-y$, on a : $x-y \preceq 0$. Puis, avec $z=-x$, on obtient : $-y \preceq -x$. La deuxième propriété appliquée à $-\lambda \in \mathbb{R}^+$ donne alors $(-\lambda)\times(-y) \preceq (-\lambda)\times(-x)$, d'où $\lambda y \preceq \lambda x$. Conclusion : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^-, (x \preceq y \Longrightarrow \lambda y \preceq \lambda x)}$.
II.1.b) Montrons tout d'abord que $\preceq'$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^n$.
Reflexibilité : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x \preceq x$ puisque $\preceq$ est une relation d'ordre, donc $\varphi(x) \preceq \varphi(x)$, d'où $x \preceq' x$.
Antisymétrie : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $x \preceq' y$ et $y \preceq' x$. Alors $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ et $\varphi(y) \preceq \varphi(x)$. Donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ par antisymétrie de $\preceq$, d'où $x=y$ puisque φ est bijective.
Transitivité : Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^n)^3$ tel que $x \preceq' y$ et $y \preceq' z$. Alors $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ et $\varphi(y) \preceq \varphi(z)$. Par transitivité de $\preceq$, on a donc $\varphi(x) \preceq \varphi(z)$, d'où $x \preceq' z$.

De plus la relation $\preceq'$ est une relation d'ordre total. En effet si $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ alors $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ ou $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ puisque $\preceq$ est une relation d'ordre total. Donc $x \preceq' y$ ou $y \preceq' x$.

Il reste à vérifier la compatibilité avec la structure d'espace vectoriel. Soient $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^n)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Supposons $x \preceq' y$. Alors $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$, d'où $\varphi(x)+\varphi(z) \preceq \varphi(y)+\varphi(z)$ et $\lambda\varphi(x) \preceq \lambda\varphi(y)$ car $\preceq$ est compatible. On en déduit $\varphi(x+z) \preceq \varphi(y+z)$ et $\varphi(\lambda x) \preceq \varphi(\lambda y)$ car φ est linéaire, c'est-à-dire $x+z \preceq' y+z$ et $\lambda x \preceq' \lambda y$. Conclusion : $\boxed{\preceq' \text{ est une relation d'ordre total sur } \mathbb{R}^n \text{ comptabible avec la structure d'espace vectoriel.}}$
II.2.a) La partie correspond à la zone hachurée sur la figure (demi-droite $\{0\} \times [0,+\infty[$ incluse) :



II.2.b) On vérifie tout d'abord que la relation $\preceq$ est une relation d'ordre total (reflexibilité, antisymétrie, transitivité, ordre total : on omet les détails dans ce corrigé). Soient $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^n)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On suppose $x \preceq y$. Si $x=y$ alors $x+z \preceq y+z$. Sinon, on a

$x_k < y_k$ où k est le plus petit entier i de $\{1,\dots,n\}$ tel que $x_i \neq y_i$. Alors $x_k + z_k < y_k + z_k$ et $\lambda x_k < \lambda y_k$ si $\lambda > 0$. De plus k est le plus petit entier i de $\{1,\dots,n\}$ tel que $(x+z)_i \neq (y+z)_i$, donc $x + y \preceq y + z$ et $\lambda x \preceq \lambda y$. Si $\lambda = 0$, alors $\lambda x = \lambda y = 0$, d'où $\lambda x \preceq \lambda y$. Conclusion : $\boxed{\preceq \text{ est une relation d'ordre total sur } \mathbb{R}^n \text{ comptabible avec la structure d'espace vectoriel.}}$

Partie III.

III.1.a) Soit $\alpha \in R^+$. Si α n'appartient pas à B, alors il existe deux racines positives β et γ telles que $\alpha = \beta + \gamma$. Il suffit de montrer : $\alpha \succ \beta$ et $\alpha \succ \gamma$. On a $\alpha - \beta = \gamma \succ 0$ puisque $\gamma \in R^+$. Par compatibilié de la relation $\preceq$, on en déduit : $(\alpha - \beta) + \beta \succeq \beta$, d'où $\alpha \succeq \beta$. Or $\alpha \neq \beta$ puisque $\gamma \neq 0$. Ainsi $\alpha \succ \beta$. De même, on montrerait la relation $\alpha \succ \gamma$. Conclusion : $\boxed{\text{tout élément de } R^+ \text{ est soit dans } B\text{, soit somme de 2 éléments de } R^+ \text{ strictement plus petits.}}$

III.1.b) Notons ℓ le cardinal de B et r celui de R^+. Puisque $\preceq$ est une relation d'odre, on peut ordonner les éléments de R^+. Soient $0 \prec \alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \cdots \prec \alpha_r$ les éléments de R^+. Montrons par récurrence sur $j \in \{1,\dots,r\}$ la propriété suivante : $\mathcal{P}_j = \{\exists\,(n_1,\dots,n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \ ;\ \alpha_j = \sum_{k=1}^{\ell} n_k\beta_k\}$.

Propriété $\mathcal{P}_1$: $\alpha_1 \in B$ sinon il existerait une racine positive strictement plus petite que α_1 d'après la question **III.1.a)** ce qui contredirait le choix de α_1, d'où $\mathcal{P}_1$.

Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour tout $k \in \{1,\dots,j\}$ et montrons $\mathcal{P}_{j+1}$: Si $\alpha_{j+1} \in B$, alors $\mathcal{P}_{j+1}$ est vraie. Sinon, d'après la question **III.1.a)**, il existe $(j_1, j_2) \in \{1,\dots,j\}$ tel que $\alpha_{j+1} = \alpha_{j_1} + \alpha_{j_2}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(n_1,\dots,n_\ell,m_1,\dots,m_\ell) \in \mathbb{N}^{2\ell}$ tel que $\alpha_{j_1} = \sum_{k=1}^{\ell} n_k\beta_k$ et $\alpha_{j_2} = \sum_{k=1}^{\ell} m_k\beta_k$. Ainsi, $\alpha_{j+1} = \sum_{k=1}^{\ell}(n_k + m_k)\beta_k$ et on a obtenu $\mathcal{P}_{j+1}$.

$\boxed{\text{Par récurrence, la propriété } \mathcal{P}_j \text{ est vraie pour tout } j \in \{1,\dots,r\}.}$

III.2.a) Remarquons tout d'abord que si $n_{\alpha,\beta}$ est strictement positif, alors $n_{\beta,\alpha}$ est strictement positif aussi. Puis, d'après la question **I.1.e)**, on sait que $n_{\alpha,\beta}$ ou $n_{\beta,\alpha}$ est égal à 1 car α et β sont distinctes (voir la remarque à la suite de la question **I.1.e)**). Supposons $n_{\alpha,\beta} = 1$. Comme $s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = \beta - \alpha$, on en déduit que $\beta - \alpha$ est une racine, puis que $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$ est une racine également. Si $n_{\beta,\alpha} = 1$, alors $s_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\beta,\alpha}\beta = \alpha - \beta$. Par conséquent $\alpha - \beta \in R$. Dans les deux cas, on conclut : $\boxed{\alpha - \beta \in R.}$

III.2.b) Si $\alpha, \beta \in B$ alors $\alpha - \beta$ n'appartient pas à R sinon α ou β serait somme de deux racines positives, ce qui est impossible par définition d'une racine simple. De plus $n_{\alpha,\beta} \leq 0$ sinon, d'après la question précédente, $\alpha - \beta$ serait une racine.

Concusion : $\boxed{\alpha - \beta \notin R \text{ et } n_{\alpha,\beta} \leq 0.}$

III.3. Avec les notations de la question, posons $v = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r$ et calculons $\langle v, v\rangle$. On a $v = \lambda_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s$, d'où $\langle v, v\rangle = \langle \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r, \lambda_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_s\alpha_s\rangle = \sum_{\substack{1\leq i\leq r\\ r+1\leq j\leq s}} \lambda_i\lambda_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$. Comme les racines α_k, pour $k = 1,\dots s$, sont deux à deux distinctes, il résulte de la question **III.2.b)** que tous les termes $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$ sont négatifs ou nuls (n_{α_i,α_j} et $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$ sont de même signe), d'où $\langle v, v\rangle \leq 0$. Par ailleurs, $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 \geq 0$, d'où $\langle v, v\rangle = 0$. Puisque tous les termes $\lambda_i\lambda_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$ sont négatifs ou nuls, on en déduit : $\lambda_i\lambda_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$ et tout $j \in \{r+1,\dots,s\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe

$i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Alors d'après ce qui précède, on a $\lambda_j \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$ pour tout $j \in \{r+1, \ldots, s\}$. Soit $j \in \{r+1, \ldots, s\}$. Si $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \neq 0$ alors $\lambda_j = 0$. Sinon, $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$. Quitte à réordonner les éléments de B, on peut donc supposer que l'on a $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_{r'} \alpha_{r'} = \lambda_{t+1} \alpha_{t+1} + \cdots + \lambda_{s'} \alpha_{s'}$ avec $r' \leq r$, $t \geq r+1$, $s' \leq s$, $\lambda_i > 0, \forall i \in \{1, \ldots, r', t+1, \ldots, s'\}$ et $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r'\}$ et tout $j \in \{t+1, \ldots, s'\}$. La relation précédente entraine $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_{r'} \alpha_{r'} = 0$ et $\lambda_{t+1} \alpha_{t+1} + \cdots + \lambda_{s'} \alpha_{s'} = 0$ puisque ces deux élements sont orthogonaux entre eux. Comme la relation $\preceq$ est compatible, on en déduit : $0 = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_{r'} \alpha_{r'} \succ 0$ car les α_i sont des racines positives, ce qui est aburde. On a donc obtenu que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Ainsi $0 = \lambda_{r+1} \alpha_1 + \cdots + \lambda_s \alpha_s$. Comme précédemment, on utilise la compatibilité de la relation $\preceq$ pour montrer que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \{r+1, \ldots, s\}$. Conclusion : $\boxed{\lambda_i = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, s\}.}$

III.4. D'après la question **III.3.**, B est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. En effet, supposons $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \alpha_i = 0$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in B$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, alors, quitte à réordonner les éléments de B, on peut supposer que les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont positifs et que les scalaires $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_s$ sont négatifs ; on se trouve alors dans la situation de **III.3.** et on en déduit que tous les λ_i sont nuls. D'autre part, d'après la question **III.1.b)**, B est une partie génératrice de $\mathbb{R}^n$ car les éléments de R engendrent $\mathbb{R}^n$. Conclusion : $\boxed{B \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.}$

III.5. Les bases demandées sont représentées par les flèches en pointillées sur les figures de la question **I.2.**

Partie IV.

IV.1. Il suffit de montrer que $s_{\varphi(a)}$ et $\varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1}$ coïncident sur $\varphi(a)$ et $\varphi(a)^\perp$. On a $s_{\varphi(a)}(\varphi(a)) = -\varphi(a)$ et $\varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1}(\varphi(a)) = \varphi \circ s_a(a) = \varphi(-a) = -\varphi(a)$. Soit $x \in \varphi(a)^\perp$. Alors $s_{\varphi(a)}(x) = x$. D'autre part, comme $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$, $0 = \langle x, \varphi(a) \rangle = \langle \varphi^{-1}(x), a \rangle$. Par suite, $\varphi^{-1}(x) \in a^\perp$ et $\varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$. Conclusion : $\boxed{s_{\varphi(a)} = \varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1}.}$

IV.2. Les éléments du groupe de Weyl sont bijectifs et laissent invariant l'ensemble R. Comme R est un ensemble fini, on en déduit que W est contenu dans le groupe symétrique de cardinal $|R|$, le cardinal de R. Or le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{|R|}$ est un groupe fini.
Conclusion : $\boxed{\text{le groupe de Weyl } W \text{ est un groupe fini.}}$

IV.3.a) Soit $\alpha \in R^+ \setminus B$. D'après la question **III.1.b)**, α est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls d'éléments de B, soit $\alpha = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta$ avec $n_\beta \in \mathbb{N}$ pour tout $\beta \in B$. Supposons par l'absurde que $\langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$ pour tout $\beta \in B$. On aurait $0 < \|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{\beta \in B} n_\beta \langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$, ce qui est absurde. Conslusion : $\boxed{\text{il existe } \beta \in B \text{ tel que } \langle \beta, \alpha \rangle > 0.}$ On en déduit qu'$\boxed{\text{il existe } \beta \in B \text{ tel que } n_{\beta,\alpha} > 0}$ puis, d'après la question **III.2.a)**, que $\alpha - \beta \in R$. Comme $\beta \in B \subset R^+$, on a nécessairement $\alpha - \beta \in R^+$ d'après la question **III.1.b)**, d'où : $\boxed{\alpha - \beta \in R^+.}$

IV.3.b) On a $s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta} \alpha$. Comme α et β sont des racines positives, il résulte de la question **III.1.b)** que $n_{\alpha,\beta}$ est négatif ou nul. On en déduit alors immédiatement que $s_\alpha(\beta)$

est une racine positive. Conclucion : $\boxed{s_\alpha(\beta) \in R^+.}$
IV.4.a) Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha_0 \in R^+$ tel que $\alpha_0 \notin S$. Comme $B \subset S$, on a $\alpha_0 \in R^+ \setminus B$. D'après la question **IV.3.a)**, il existe $\beta_0 \in B$ tel que $n_{\alpha_0,\beta_0} > 0$. Puis, d'après la question **IV.3.b)**, $s_{\beta_0}(\alpha_0) \in R^+$. Comme d'autre part, $\alpha_0 \notin S$, on a $s_{\beta_0}(\alpha_0) \in R^+ \setminus B$. De plus $\alpha_1 = s_{\beta_0}(\alpha_0) = \alpha_0 - n_{\beta_0,\alpha_0}\beta_0 \neq \alpha_0$ car $n_{\beta_0,\alpha_0} > 0$. En appliquant ce qui précède à α_1, on en déduit qu'il existe $\beta_1 \in B$ tel que $n_{\alpha_1,\beta_1} > 0$ et $s_{\beta_1}(\alpha_1) \in R^+ \setminus S$. On a $\alpha_2 = s_{\alpha_1}(\alpha_1) = \alpha_1 - n_{\beta_1,\alpha_1}\beta_1 = \alpha_0 - n_{\beta_0,\alpha_0}\beta_0 - n_{\beta_1,\alpha_1}\beta_1$. Comme $n_{\alpha_0,\beta_0} > 0$, $n_{\alpha_1,\beta_1} > 0$ et que B est une base de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que $\alpha_2 \notin \{\alpha_0, \alpha_1\}$. Par récurrence, on construirait ainsi une suite infinie d'éléments de R^+ deux à deux distincts, ce qui impossible puisque R^+ est fini. Conslusion : $\boxed{R^+ \subset S.}$
IV.4.b) Soit $\alpha \in R^-$. Comme $-\alpha \in R^+$, il existe d'après la question **IV.4.a)** $w \in W_B$ et $\beta \in B$ tels que $-\alpha = w(\beta)$. Or $s_\beta(\beta) = -\beta$ donc $\alpha = w(s_\beta(\beta)) = (w \circ s_\beta)(\beta) \in S$. On a ainsi montré $R^- \subset S$. D'après la question **IV.4.a)**, on a par ailleurs $R^+ \subset S$. Comme S est clairement contenu dans R, on conclut : $\boxed{R = S.}$
IV.4.c) Il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in R$, la symétrie s_α appartient à W_B. Soit $\alpha \in R$. D'après la question **IV.4.b)**, il existe $w \in W_B$ et $\beta \in B$ tel que $\alpha = w(\beta)$. On a, d'après la question **IV.1.** , $s_{w(\beta)} = w \circ s_\beta \circ w^{-1}$ donc $s_\alpha \in W_B$. Puisque W_B est clairement contenu dans W, on conclut : $\boxed{W = W_B.}$

Partie V.

V.1.a) Tout d'abord, la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{p}$ est clairement contenue dans C_p. Réciproquement, soit r un élément de C_p. Comme r laisse invariant le polygône $\mathcal{P}_p$, on a $r(O) = O$. Par suite, r est une rotation du plan affine E. Comme r permute les sommets de $\mathcal{P}_p$, on en déduit que l'angle de la rotation r est un multiple de $\frac{2\pi}{p}$. Autrement dit $r = \rho^i$ avec $i \in \mathbb{Z}$. Comme ρ est d'ordre p, on en déduit que C_p est le groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ. Conclusion : $\boxed{C_p = \{\rho^i\ ;\ i \in \{0, \ldots, p-1\}\}.}$
V.1.b) Soit Δ la médiatrice du segment $[M_0, M_{p-1}]$ et soit σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ. $\boxed{\text{La symétrie orthogonale } \sigma \text{ appartient à } D_{2p}.}$
V.1.c) On a $\{\rho^i \circ \sigma^i\ ;\ i \in \{0, \ldots, p-1\},\ j \in \{0,1\}\} \subset D_{2p}$ d'après les questions **V.1.a)** et **V.1.b)**. Réciproquement, soit $w \in D_{2p}$. Si w est une isométrie directe, la question **V.1.a)** nous dit que $w = \rho^i$, avec $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Sinon, alors $w \circ \sigma$ est une isométrie directe de D_{2p}. Par ce qui précède, il existe $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ tel que $w \circ \sigma = \rho^i$, d'où $w = \rho^i \circ \sigma$. Conclusion : $\boxed{D_{2p} = \{\rho^i \circ \sigma^i\ ;\ i \in \{0, \ldots, p-1\},\ j \in \{0,1\}\}.}$
V.1.d) Soit $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Il suffit que montrer que $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma$ et ρ^{p-k} coïncident sur (O, M_0, M_{p-1}) puisque $(O, \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_{p-1}})$ forme un repère affine de E. Si $k = 0$, le résultat est clair. On peut donc supposer que $k \geq 1$. On a $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma(O) = \rho^{p-k}(O) = O$. On vérifie sans peine que $\sigma(M_i) = M_{p-i-1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ (on omet ici les détails nécessaires). On a alors $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma(M_0) = \sigma \circ \rho^k(M_{p-1}) = \sigma(\rho^{k-1}(M_0)) = \sigma(M_{k-1}) = M_{p-k}$ et $\rho^{p-k}(M_0) = M_{p-k}$. De même, on a $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma(M_{p-1}) = \sigma \circ \rho^k(M_0) = \sigma(M_k) = M_{p-k-1}$ et $\rho^{p-k}(M_{p-1}) = \rho^{p-k-1}M_0 = M_{p-k-1}$. Conclusion : $\boxed{\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}.}$

V.2.a) Il suffit de montrer que s' est engendré par r et s. On a $s' = s^2 s' = s(ss') = sr$ car $s^2 = e$. Par suite $\boxed{G \text{ est engendré par } r \text{ et } s.}$

V.2.b) On a $r^{-1} = s's$ donc $s' = sr = r^{-1}s$ car $s^2 = e$, d'où $\boxed{sr = r^{-1}s}$. Par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, montrons : $sr^k = r^{p-k}s$ pour tout k de $\{0, \ldots, p-1\}$. La propriété est vraie pour $k = 0$ d'après ce qui précède. Supposons qu'elle soit vraie pour $k-1$ pour un certain $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. On a $sr^k = (sr)r^{k-1} = (r^{-1}s)r^{k-1} = r^{-1}(r^{p-k+1}s) = r^{p-k}s$ d'après la propriété au rang 0 et au rang $k-1$. Par récurrence, on a montré : $\boxed{sr^k = r^{p-k}s \text{ pour tout } k \in \{0, \ldots, p-1\}.}$ D'après la question **V.2.a)**, tout élément g de G s'ecrit $g = r^{i_1}s^{j_1} \cdots r^{i_k}s^{j_k}$ avec $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k) \in \{0, \ldots, p-1\}^k \times \{0,1\}^k$. D'après la question **V.2.b)**, tout élément g de G s'ecrit donc $r^i s^j$ avec $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $j \in \{0,1\}$. Conclusion : $\boxed{G = \{r^i s^j \ ; \ i \in \{0, \ldots, p-1\}, \ j \in \{0,1\}\}.}$

V.2.c) Supposons par l'absurde que $s = r^k$ avec $k \in \{0, \ldots, p-1\}$. Alors on aurait $G = \{r^i \ ; \ i \in \{0, \ldots, p-1\}\}$ d'après la question **V.2.b)**. En particulier G serait commutatif. On aurait donc $r^2 = (ss')(ss') = (ss')(s's) = e$ et r serait d'ordre 2, d'où finalement $G = \{e, r\}$. Ceci est absurde car G contient par hypothèse au moins trois éléments distincts e, s et s'. Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } k \in \{0, \ldots, p-1\} \text{ on a } s \neq r^k.}$ D'après la question **V.2.b)**, l'ordre de G est au plus $p \times 2 = 2p$. Or, d'après ce qui précède, les éléments $e, r, \ldots, r^{p-1}, s, sr, \ldots, sr^{p-1}$ sont deux à deux distincts car r est d'ordre p. Conclusion : $\boxed{G \text{ est d'ordre } 2p.}$

V.2.d) Soit Φ l'application de D_{2p} dans G qui à l'élément $\rho^i \circ \sigma^j$ de D_{2p} pour $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $j \in \{0,1\}$ associe l'élément $r^i s^j$ de G. D'après les questions **V.1.b)** et **V.2.c)**, Φ définit clairement un isomorphisme de groupes. Conclusion : $\boxed{G \text{ est isomorphe à } D_{2p}.}$

V.2.e) Pour chacun des systèmes de racines de $\mathbb{R}^2$, le groupe de Weyl W contient deux éléments d'ordre 2 distincts : les symétries s_α et s_β où $B = (\alpha, \beta)$. Il résulte alors de la question **V.2.d)** que $W \simeq D_{2p}$ où p est l'ordre de $s_\alpha \circ s_\beta$. Or $s_\alpha \circ s_\beta$ est une rotation de centre O et d'angle $2\theta_{\alpha,\beta}$. On vérifie alors sans difficulté dans chacun des systèmes de racines de $\mathbb{R}^2$ que p est le cardinal de R^+. Conclusion : $\boxed{W \simeq D_{2p} \text{ où } p \text{ est le cardinal de } R^+.}$.

Partie VI.

VI.1. L'ensemble P_α est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'espace vectoriel. Comme R est fini, on en déduit que l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, $\boxed{\Omega \text{ est une partie ouverte de } \mathbb{R}^n.}$

VI.2. Soit $C_1, \ldots, C_q$ les chambres de Weyl de R. D'après la question **VI.1.** on a $\Omega = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_q$. Comme C est incluse dans Ω, on a donc $C = (C \cap C_1) \sqcup \ldots \sqcup (C \cap C_q)$. Puis, comme C est une partie connexe de Ω, on en déduit qu'il existe $i \in \{1, \ldots, q\}$ tel que $C \subseteq C_q$. Conclusion : $\boxed{C \text{ est contenue dans une chambre de Weyl de } R.}$

VI.3. Puisque les symétries s_α $(\alpha \in R)$ permutent les éléments de R, le groupe de Weyl permute les éléments de R également.
Par conséquent, $\boxed{W \text{ permute les hyperplans } P_\alpha \ (\alpha \in R), \text{ ainsi que les chambres de Weyl.}}$

VI.4.a) Puisque W est fini, il existe un élément $w \in W$ tel que $\|x_1 - w(x_2)\| = \{\|x_1 - w'(x_2)\| \ ; \ w' \in W\}$.

VI.4.b) On a $x_1 \in I$ et $x_1 \in C_1$. Supposons par l'absurde que I n'est pas contenu dans C_1. Alors il existe $\alpha \in R$ tel que $I \cap P_\alpha \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\langle t_0 x_1 + (1-t_0)w(x_2), \alpha\rangle = 0$. On a de plus $t_0 \in \,]0,1[$ car $x_1 \notin P_\alpha$ et $x_2 \notin P_\alpha$. Calculons $\|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 - \|x_1 - w(x_2)\|^2$. Comme $s_\alpha(w(x_2)) = w(x_2) - 2\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$, on a $\|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 - \|x_1 - w(x_2)\|^2 = \|x_1 - w(x_2) + 2\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha\|^2 - \|x_1 - w(x_2)\|^2 = 4\langle x_1 - w(x_2), \frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha\rangle + 4\frac{\langle \alpha, w(x_2)\rangle^2}{\langle \alpha,\alpha\rangle} = \frac{4}{\langle \alpha,\alpha\rangle} \times \langle \alpha, w(x_2)\rangle\langle x_1, \alpha\rangle$. De l'inégalité $\langle t_0 x_1 + (1-t_0)w(x_2), \alpha\rangle = 0$ on tire $-t_0\langle x_1, \alpha\rangle = (1-t_0)\langle w(x_2), \alpha\rangle$. Comme $0 < t_0 < 1$ et $0 < 1 - t_0 < 1$, on en déduit que le produit $\langle \alpha, w(x_2)\rangle\langle x_1, \alpha\rangle$ est strictement négatif. D'après ce qui précède, on a donc : $\|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 < \|x_1 - w(x_2)\|^2$. Mais ceci est en contradiction avec le choix de w dans la question **VI.4.a)**. Conclusion : $\boxed{I \subset C_1.}$

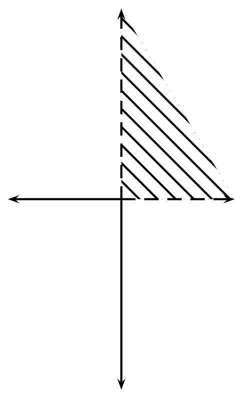
VI.4.c) Montrons l'inclusion $w(C_2) = C_1$. Soit $x_2 \in C_2$. Fixons $x_1 \in C_1$. D'après la question **VI.4.b)**, $tx_1 + (1-t)w(x_2)$ appartient à C_1 pour tout $t \in [0,1]$. En particulier, avec $t = 0$, on obtient que $w(x_2) \in C_1$. On a donc montré : $w(C_2) \subset C_1$. Or w permute les chambres de Weyl de R d'après la question **VI.3.**. On en déduit : $\boxed{w(C_2) = C_1.}$

VI.5.a) Soient $x \in C(B)$ et $\alpha \in R$. D'après la question **III.1.b)** et la définition de $C(B)$, le réel $\langle x, \alpha\rangle$ est ou bien strictement positif, ou bien strictement négatif. En conséquence, $C(B) \cap P_\alpha = \emptyset$ pour tout $\alpha \in R$, d'où : $\boxed{C(B) \subset \Omega.}$ D'autre part, $C(B)$ est une partie étoilée de $\mathbb{R}^n$; elle est donc connexe. En effet, si $x, y \in C(B)$, alors $\langle tx + (1-t)y, \beta_i\rangle > 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et tout $t \in [0,1]$, d'où $[x,y] \subset C(B)$. Comme $C(B)$ est non vide (par exemple $\beta'_1 + \cdots + \beta'_n \in C(B)$), la question **VI.2.** assure qu'il existe une chambre de Weyl C telle que $C(B) \subset C$. Conclusion : $\boxed{\text{il existe une chambre de Weyl } C \text{ telle que } C(B) \subset C.}$

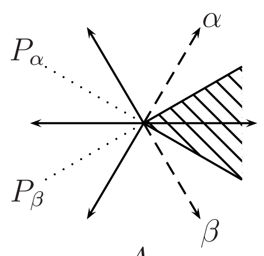
VI.5.b) Les ensembles $\mathbb{R}^n \setminus C_i^+ = \{x \in C \ ; \ \langle x, \beta_i\rangle \leq 0\}$ et $\mathbb{R}^n \setminus C_i^- = \{x \in C \ ; \ \langle x, \beta_i\rangle \geq 0\}$ sont clairement des parties fermées de $\mathbb{R}^n$, donc C_i^+ et C_i^- sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$. De plus, par définition on a : $C_i^+ \cap C_i^- = \emptyset$ et $C_i^+ \cup C_i^- = C$. Comme C est une partie connexe de $\mathbb{R}^n$, ou bien $C = C_i^+$, ou bien $C = C_i^-$. Mais $C(B) \subset C \cap C_i^+$ d'après la question **VI.5.a)** et $C(B)$ est une partie non vide, donc $\boxed{C = C_i^+.}$

VI.5.c) La question **VI.5.b)** s'applique à tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, ce qui signifie que $C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^+ = C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \langle x, \beta_1\rangle > 0, \ldots, \langle x, \beta_n\rangle > 0\}$. Par définition de $C(B)$ et d'après la question **VI.5.a)**, on vient donc d'établir la relation $\boxed{C(B) = C.}$

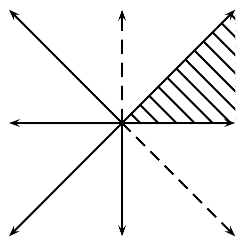
VI.6. Pour chacun des systèmes de racines de $\mathbb{R}^2$, la chambre de Weyl fondamentale relativement à la base B (représentée par les flèches en poitillés) correspond à la zone hachurée (la partie n'est pas bornée par la ligne en pointillés très fins) :



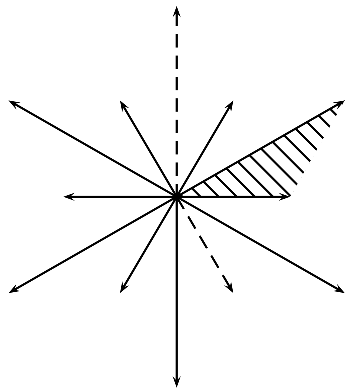
$A_1 \times A_1$



A_2



B_2



G_2

VI.7.a) Soit C une chambre de Weyl. Fixons une base B_0 de R (voir la remarque à la fin du corrigé). D'après la question **VI.5.c)**, l'ensemble $C(B_0)$ est une chambre de Weyl. Or d'après la question **VI.4.c)**, le groupe de Weyl opère transitivement sur les chambres de Weyl. Il existe donc $w \in W$ tel que $w(C(B_0)) = C$. D'après la définition d'une base d'un système de racines, il est clair que $w(B_0)$ est encore une base de R. De plus on a $w(C(B_0)) = C(w(B_0))$. En effet, si $B_0 = \{\beta_1^{(0)}, \ldots, \beta_n^{(0)}\}$, alors : $x \in C(w(B_0)) \iff \langle x, w(\beta_1^{(0)})\rangle > 0, \ldots, \langle x, w(\beta_n^{(0)})\rangle > 0 \iff \langle w^{-1}(x), \beta_1^{(0)}\rangle > 0, \ldots, \langle w^{-1}(x), \beta_n^{(0)}\rangle > 0 \iff w^{-1}(x) \in C(B_0) \iff x \in w(C(B_0))$. Conclusion : $\boxed{C = C(B) \text{ où } B \text{ est la base } B = w(B_0) \text{ de } R.}$

VI.7.b) L'application qui à une base B de R associe la chambre de Weyl $C(B)$ est surjective d'après la question précédente. Montrons qu'elle est injective. Soit B et $\widetilde{B}$ deux bases de R telles que $C(B) = C(\widetilde{B})$. D'après la question **III.1.b)**, tout élément de $\widetilde{B}$ s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients entiers tous de même signe d'éléments de B. Puisque $C(B) = C(\widetilde{B})$, le signe de ces coefficients est nécessairement positif. Ainsi, tous les éléments de $\widetilde{B}$ sont des racines positives relativement à la base B. Il s'ensuit que les racines positives relativement à la base $\widetilde{B}$ coïncident avec les racines positives relativement à la base B

(d'après la question **III.1.b)**). Par suite, les racines simples relativement à ce système commun de racines positives sont les mêmes pour B et $\widetilde{B}$, autrement dit $B = \widetilde{B}$. Conclusion : $\boxed{\text{l'application qui à une base } B \text{ associe la chambre de Weyl } C(B) \text{ est bijective.}}$

VI.8.a) Posons $\alpha_p = \beta_p$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, posons $\alpha_i = s_{\beta_i} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p)$. On a $\alpha_p \in R^+$ et, par hypothèse, $\alpha_1 \in R^-$. Soit q le plus petit entier i de $\{1, \ldots, p-1\}$ tel que $\alpha_{i+1} \in R^+$. Alors $\alpha_{q+1} \in R^+$ et $s_{\beta_q}(\alpha_{q+1}) \in R^-$. D'après la question **IV.3.b)**, on a donc $\alpha_{q+1} = \beta_q$. Posons $w = s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}$. La question **IV.1.** donne $w \circ s_{\beta_p} \circ w^{-1} = s_{w(\beta_p)}$. Or $w(\beta_p) = \alpha_{q+1} = \beta_q$ d'après ce qui précède, d'où $w \circ s_{\beta_p} \circ w^{-1} = s_{\beta_q}$. On a donc obtenu : $s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}} \circ s_{\beta_p} \circ s_{\beta_{p-1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q+1}} = s_{\beta_q}$, d'où il vient $s_{\beta_q} \circ \cdots \circ s_{\beta_p} = s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}$ puis $\boxed{s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_p} = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q-1}} \circ s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}.}$

VI.8.b) Soit $w \in W$, $w \neq id$. Soit p l'entier minimal tel qu'il existe $\beta_1, \ldots, \beta_p$ dans B avec $w = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_p}$. Si $p = 1$, alors $w(\beta_p) \in R^-$. On peut donc supposer que $p > 1$. On suppose par l'absurde que $w(\beta) \in R^+$ pour tout $\beta \in B$. En particulier on a $w(\beta_p) \in R^+$. Donc $-w(\beta_p) = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}(-s_{\beta_p}(\beta_p)) = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p)$ appartient à R^-. D'après la question précédente, il existe donc $q \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $w = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_p} = s_{\beta_1} \circ \cdots \circ s_{\beta_{q-1}} \circ s_{\beta_{q+1}} \circ \cdots \circ s_{\beta_{p-1}}$ ce qui contredit la minimalité de p. Conclusion : $\boxed{\text{il existe } \beta \in B \text{ tel que } w(\beta) \in R^-.}$

VI.9.a) Comme il l'a été remarqué au cours de la question **VI.7.a)**, le groupe de Weyl préserve les bases de R ; ainsi W opère sur les bases de R. Soient B et B' deux bases de R. D'après les questions **VI.4.c)** et **VI.7.c)**, il existe $w \in W$ tel que $w(C(B)) = C(B')$, i.e. $C(w(B)) = C(B')$ (cf. question **VI.7.c)**). Par suite $w(B) = B'$ d'après la question **VI.7.c)**. L'opération est donc transitive. Montrons qu'elle est simple. Il suffit de montrer que si $w(B) = B$, pour B une base de R, alors $w = id$. Si $w \neq id$, alors d'après la question **VI.8.b)**, il existe $\beta \in B$ tel que $w(\beta) \in R^-$ où R^- est le système de racines négatives relativement à B. Ceci est impossible car $w(\beta) \in B \subset R^+$, donc $w = id$.
Conclusion : $\boxed{W \text{ opère simplement transitivement sur l'ensemble des bases de } R.}$

VI.9.b) On sait déjà que le groupe de Weyl orpère transitivement sur les chambres de Weyl (cf. question **VI.4.c)**). Soit C une chambre de Weyl telle que $w(C) = C$. Montrons que $w = id$. Il existe une base B de R telle que $C = C(B)$ d'après la question **VI.7.a)**. On a donc $C(w(B)) = w(C(B)) = C(B)$. De la question **VI.7.b)**, on déduit $w(B) = B$, puis de la question **VI.9.a)**, on déduit $w = id$.
Conclusion : $\boxed{W \text{ opère simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl.}}$

* * *

Remarque sur le sujet : il faudrait justifier dans ce problème (notamment pour la question **VI.7.a)**) qu'il existe effectivement des bases pour un système de racines donné de $\mathbb{R}^n$. Nous l'avons seulement remarqué pour le cas $n = 2$.