Espaces euclidiens et hermitiens

rédigé par Anne Moreau

Table des matières

Chapitre 1

Espaces euclidiens

On va généraliser ici la notion d'orthogonalité connue pour les vecteurs du plan ou de l'espace.

1.1 Formes bilinéaires

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle* **forme bilinéaire** *sur E toute application $f\colon E\times E\to\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout $a\in E$, l'application $E\to\mathbb{K}$, $y\to f(a,y)$ est linéaire, i.e.,*

$$\forall\,(u,v)\in E\times E,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad f(a,u+\lambda v)=f(a,u)+\lambda f(a,v).$$

(ii) *Pour tout $b\in E$, l'application $E\to\mathbb{K}$, $x\to f(x,b)$ est linéaire. i.e.,*

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\ \forall\,\alpha\in\mathbb{K},\quad f(x+\alpha y,b)=f(x,b)+\alpha f(v,b).$$

Autrement dit, pour tous $a\in E$ et $b\in E$, les applications $y\mapsto f(a,y)$ et $x\mapsto f(x,b)$ sont des formes linéaires, d'où le terme « forme ».

Soit f une application de $E\times E$ dans $\mathbb{K}$. Compte tenu des définitions, dire que f est bilinéaire signifie que pour tous $\alpha,\beta,\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ et tous $x,y,u,v\in E$,

$$f(\alpha x+\beta y,\lambda u+\mu v)=\alpha\lambda f(x,u)+\alpha\mu f(x,v)+\beta\lambda f(y,u)+\beta\mu f(y,v)$$

Exemples.

1) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$f\colon E\times E\to\mathbb{R}\ ,\ (u,v)\to\int_0^1 u(t)v(t)\,dt$$

est une forme bilinéaire sur E.

2) Supposons $E = \mathbb{K}^n$, et soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont des vecteurs de E, posons :

$$f(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p.$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire sur E.
3) On suppose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(E), \quad f(A, B) = \mathrm{Tr}(AB).$$

Alors f est une forme bilinéaire sur E.

♦ **Exercice 1.** Vérifier dans chacun des exemples ci-dessus que f est en effet une forme bilinéaire.

1.1.2 Interprétation matricielle

Supposons que E soit de dimension finie $n > 0$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, posons $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, et soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_n, e_1) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

On dit que A est la ***matrice de f dans la base*** $\mathcal{E}$, et on écrit $A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{E})$.

⚠ **Attention** : on écrit $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{E})$ bien que f ne soit pas une application linéaire. Il s'agit seulement d'une notation.

Soient $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathcal{E}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de la définition 1.1.1, il vient :

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j = {}^t X A Y.$$

Définition 1.1.2. *La forme f est dite* **symétrique** *si l'on a $f(x, y) = f(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. D'après ce qui précède, f est symétrique si et seulement si la matrice A est* **symétrique**, *i.e., $A = {}^t A$.*

♦ **Exercice 2.** Vérifier les assertions précédentes.

1.2 Produit scalaire

On suppose désormais que $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

Définition 1.2.1. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme bilinéaire.*

(i) *On dit que f est* **positive** *(resp.* **négative***) si $f(x, x) \geqslant 0$ (resp. $f(x, x) \leqslant 0$) pour tout $x \in E$.*

(ii) *On dit que f est* **définie positive** *(resp.* **définie négative***) si elle est positive (resp. négative) et si $f(x,x) = 0$ si et seulement si x est nul.*

♦ **Exercice 3.** Reprendre les exemples de l'exercice 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quels sont ceux pour lesquels f est positive ? définie positive ?

Définition 1.2.2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle* **produit scalaire (euclidien)** *sur E toute forme bilinéaire sur E qui est symétrique et définie positive. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un* **espace (vectoriel) euclidien***.*

> ***Euclide*** *(en grec ancien Εὐκλείδης / Eukleidês), né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie, est un mathématicien de la Grèce antique, auteur des « Éléments », qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques.*

♦ **Exercice 4.** Reprendre les exemples de l'exercices 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quels sont ceux pour lesquels f est un produit scalaire ?

Remarque. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie possède toujours au moins un produit scalaire mais il en a en général plusieurs !

Exemple fondamental. Dans $\mathbb{R}^n$, l'exemple 2) de l'exercices 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé le ***produit scalaire canonique***. Cet exemple sera crucial dans le cours et nous commencerons bon nombre d'exercices par : « On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. . . » ou « Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. . . », etc.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ a d'autres produits scalaires : considérons une base quelconque $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et posons, pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$,

$$f(x, y) = \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_n\mu_n.$$

On vérifie que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, en général différent du produit scalaire canonique.

1.3 Premières propriétés

Désormais, E désigne un espace vectoriel euclidien ; en particulier, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $x, y \in E$, on note $(x \,|\, y)$ le produit scalaire de x et y. L'application

$$E \times E \to \mathbb{R} \ , \ (x, y) \to (x \,|\, y)$$

est donc une forme bilinéaire symétrique et définie positive sur E. On a $(x \,|\, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. On peut donc considérer :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Proposition 1.3.1. *Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
(ii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \,|\, y) + \|y\|^2$;
(iii) $|(x \,|\, y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)* ;
(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)* ;
(v) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$;
(vi) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ *(identité de la médiane).*

Augustin Louis, baron Cauchy, *né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.*

Hermann Amandus Schwarz, *né le 25 janvier 1843 à Hermsdorf, en Silésie (aujourd'hui la ville de Jerzmanowa en Pologne) et mort le 30 novembre 1921 à Berlin est un mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.*

♦ **Exercice 5.** * Démontrer cette proposition.

Théorème 1.3.2. *L'application $x \to \|x\|$ vérifie pour tout scalaire λ et tous vecteurs x, y de E les propriétés suivantes :*

(i) $\|x\| \geqslant 0$ *(positivité) ;*

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *(homogénéité) ;*

(iii) $\|x\| = 0$ *si et seulement $x = 0$ (caractère « définie ») ;*

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

On dit que l'application $x \to \|x\|$ est une **norme** *sur E.*

Remarques. 1) On dit que $x \in E$ est ***unitaire*** si $\|x\| = 1$.
2) Il existe des normes sur E qui ne sont pas issues d'un produit scalaire mais cela dépasse un peu le programme...

♦ **Exercice 6.** Démontrer ce théorème.

Définition 1.3.3. *Soit E un espace euclidien.*

(i) *On dit que des vecteurs x, y de E sont* **orthogonaux** *si $(x \,|\, y) = 0$ (ce qui équivaut à $(y \,|\, x) = 0$).*

(ii) *Deux parties non vides A, B de E sont dites* **orthogonales** *si, pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, x et y sont orthogonaux.*

Proposition 1.3.4. *Soit A une partie non vide de E. L'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E, noté $A^\perp$, et appelé l'***orthogonal** *de A (dans E).*

♦ **Exercice 7.** 1) Démontrer cette proposition.
2) Quel est l'orthogonal de E dans E ? l'orthogonal de $\{0_E\}$ dans E ?

Exercice 1. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\,({}^t AB).$$

1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ant}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices diagonales (resp. symétriques, antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$, $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})^\perp$ et $\mathrm{Ant}_n(\mathbb{R})^\perp$.

Définition 1.3.5. *Soit $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.*

(i) *On dit que $\mathcal{X}$ est* **orthogonale** *si $(x_i \,|\, x_j) = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tels que $i \neq j$.*

(ii) *On dit que $\mathcal{X}$ est* **orthonormée** *ou* **orthonormale** *si elle est orthogonale et si tous les vecteurs x_i sont unitaires (i.e., $\forall\, i \in \{1, \dots, p\}$, $\|x_i\| = 1$).*

Théorème 1.3.6 (Théorème de Pythagore)**.** *Soit $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.*

(i) *On suppose que la famille $\mathcal{X}$ est orthogonale. On a :*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{p} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2.$$

(ii) *Si la famille $\mathcal{X}$ est orthogonale et si $x_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, alors $\mathcal{X}$ est libre. En particulier, si $\mathcal{X}$ est orthonormée, alors $\mathcal{X}$ est libre.*

> ***Pythagore** (en grec ancien Πυθαγόρας / Pythagóras) est un philosophe, mathématicien et scientifique présocratique qui serait né aux environs de 580 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée au Sud-Est de la ville d'Athènes ; on établit sa mort vers 495 av. J.-C., à l'âge de 85 ans.*

♦ **Exercice 8.** Démontrer ce théorème.

1.4 Bases orthonormées

1.4.1 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt et ses conséquences

> ***Jørgen Pedersen Gram** est un mathématicien danois né le 27 juin 1850 à Nustrup (près de Haderslev) et mort le 29 avril 1916 à Copenhague.*
>
> ***Erhard Schmidt** (13 janvier 1876 - 6 décembre 1959) était un mathématicien allemand né à Dorpat, en Allemagne (aujourd'hui Tartu, en Estonie).*

Théorème 1.4.1 (procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une base $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E possédant les propriétés suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est une famille orthonormée, i.e., $(f_i \,|\, f_j) =$ pour tout $i \neq j$ et $\|f_i\| = 1$ pour tout i ;*

(ii) *Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_j) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.*

De plus, on construit les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ par récurrence, selon un procédé appelé le **procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt**, *comme suit :*

1) *On pose*

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

2) *On suppose avoir construit une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_j)$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ telle que $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ pour tout $k \leqslant j$. On définit alors f_{j+1} par :*

$$f_{j+1} = \frac{e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} (e_{j+1} \,|\, f_k) f_k}{\|e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} (e_{j+1} \,|\, f_k) f_k\|}.$$

♦ **Exercice 9.** Démontrer ce théorème et illustrer la construction par une figure.

Exercice 2. 1) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer, grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 2, 1)$.

2) Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer, grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où

$$\varepsilon_1 = (1,0,1,0), \quad \varepsilon_2 = (-1,1,2,0), \quad \varepsilon_3 = (-2,0,0,0).$$

Le résultat suivant est évident d'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt mais repose sur l'existence (non triviale) de bases dans un espace vectoriel de dimension finie :

Corollaire 1.4.1. *Si E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$, il possède des bases orthonormées.*

Ce corollaire est crucial. Grâce à lui, il sera désormais légitime de commencer un énoncé par « Soient E un espace euclidien et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E... » ce que nous ferons très souvent.

⚠ **Attention** : Comme pour les espaces vectoriels de dimension finie, un espace vectoriel euclidien n'a pas une unique base orthonormée. La phrase « Soit $\mathcal{E}$ la base orthonormée de E... » n'a donc aucun sens !

Exemple fondamental. Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

♦ **Exercice 10.** Vérifier cette assertion et donner d'autres exemples de bases orthonormées dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Supposons E de dimension finie $n > 0$, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathcal{E}$. On a alors :

$$(x \,|\, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (e_i | e_j).$$

La base $\mathcal{E}$ étant orthonormée, il vient donc :

$$(x \,|\, y) = \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_n \mu_n = {}^t XY = {}^t YX.$$

Théorème 1.4.2. *Soit E un espace euclidien de dimension finie non nulle n.*

(i) *Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$, avec $1 \leqslant p < n$, une famille orthonormée de vecteurs de E. Il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n \in E$ tels que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.*

(ii) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :*

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

En particulier :

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

Remarque. l'assertion (i) est parfois appelée le « théorème de la base orthonormée incomplète ».

♦ **Exercice 11.** Démontrer ce théorème à l'aide du théorème de la base inccomplète « classique ».

Exercice 3. Soient E un espace euclidien et F et G deux sous-espaces de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux ;
(ii) $F^\perp \subseteq G$;
(iii) $G^\perp \subseteq F$.

1.4.2 Projections orthogonales

Soit F un sous-espace de E. On a $E = F \oplus F^\perp$. On peut donc considérer la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$. On dit que c'est la ***projection orthogonale*** de E sur F.

♦ **Exercice 12.** Réinterpréter le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projections orthogonales.

Exercice 4. * Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $a \in E$.
1) Établir, pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|a - x + \lambda y\|^2 = \|a - x\|^2 + 2\lambda(a - x \,|\, y) + \lambda^2 \|y\|^2.$$

2) En déduire que, pour $x \in F$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $||a - x|| = \inf\{||a - z|| \,;\, z \in F\}$;
(ii) $(a - x) \in F^\perp$.
3) Prouver qu'il existe un unique point x de F vérifiant les conditions de la question 2), et que c'est l'image de a par la projection orthogonale de E sur F.

Exercice 5. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad (x \,|\, f(x)) = 0.$$

Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des supplémentaires orthogonaux dans E, i.e., $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$ et $(\ker f)^\perp = \operatorname{Im} f$.

1.5 Adjoint d'un endomorphisme

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$.

Théorème 1.5.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme de E, noté u^*, et appelé l'*adjoint *de u, tel que pour tous $x, y \in E$,*

$$(u(x) \,|\, y) = (x \,|\, u^*(y))$$

Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée *de E, on a :*

$$\operatorname{Mat}(u^*; \mathcal{E}) = {}^t\operatorname{Mat}(u; \mathcal{E}).$$

⚠ **Attention** : La matrice de u^* dans la base $\mathcal{E}$ est la transposée de la matrice de u dans cette même base si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée.

♦ **Exercice 13.** Démontrer ce théorème.

Proposition 1.5.1. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$.

(ii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(iii) $(u^*)^* = u$.

(iv) *On a* $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ *et, si* $u \in GL(E)$*, alors* $u^* \in GL(E)$ *et* $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

♦ **Exercice 14.** Démontrer la proposition.

Exercice 6. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u, i.e., $u(F) \subset F$. Montrer que $F^\perp$ est stable par u^*, i.e., $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Interpréter matriciellement ce résultat.

Exercice 7. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection de E.
1) Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$.
2) Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $p = p^*$.

1.6 Endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Définition-Proposition 1.6.1. *Soient E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un* **endomorphisme orthogonal** *si l'une des deux conditions suivantes équivalentes est vérifiée :*

(i) $\forall\, x, y \in E,\ (u(x) \,|\, u(y)) = (x \,|\, y)$;

(ii) $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

Définition 1.6.2. *Une matrice $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **orthogonale** *si*

$$\Omega\,{}^t\Omega \;=\; {}^t\Omega\,\Omega \;=\; I_n.$$

En particulier, si Ω est orthogonale alors Ω est inversible et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$.

Le théorème suivant justifie l'appellation « orthogonale » de la définition précédente :

Théorème 1.6.1. *Soient E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est un endomorphisme orthogonal ;*

(ii) *$u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$;*

(iii) *il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in O(n)$;

(iv) *pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, on a* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in O(n)$;

(v) *il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E ;*

(vi) *pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.*

⚠ **Attention** : là encore, la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base $\mathcal{E}$ est orthogonale si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée.

♦ **Exercice 15.** Démontrer ce théorème.

♦ **Exercice 16.** 1) Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$. On le note $O(n)$, et on dit que c'est le ***groupe orthogonal de degré*** n.

Si $\Omega \in O(n)$, de $\Omega^t\Omega = I_n$, on déduit $(\det \Omega)^2 = 1$, donc $\det \Omega = \pm 1$. On pose :

$$SO(n) = \{\Omega \in O(n) \mid \det \Omega = 1\}, \quad O^-(n) = \{\Omega \in O(n) \mid \det \Omega = -1\}.$$

2) Montrer que l'ensemble $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé le ***groupe spécial orthogonal de degré*** n. Qu'en est-il de l'ensemble $O^-(n)$?

Il sera parfois très utile (voir par exemple l'exercice 16) d'avoir à l'esprit le résultat suivant :

Corollaire 1.6.3. *Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence : Ω est une matrice orthogonale si et seulement si Ω est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{F}$ de E.*

♦ **Exercice 17.** On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

1) Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. On dit que c'est le ***groupe orthogonal*** de E.
On rappelle que le *déterminant* d'un endomorphisme f de E est le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base de E (cette définition ne dépend pas du choix de la base : voir le cours de première année).

2) Montrer que si $u \in O(E)$, on a $\det u = \pm 1$.

On pose :

$$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}, \quad O^-(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det u = -1\}.$$

3) Vérifier que $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$. Qu'en est-il de l'ensemble $O^-(E)$?

On dit que $SO(E)$ est le ***groupe spécial orthogonal*** de E. Un élément de $SO(E)$ est appelé une ***rotation*** de E. Cette appellation sera justifiée dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$ au chapitre suivant.

⚠ **Attention** : le fait que $\det u = \pm 1$ n'implique pas que u soit un endomorphisme orthogonal de E. Par exemple, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin O(2)$ (à vérifier).

Exercice 8. Soit u un endomorphisme orthogonal de E.
1) Soit F un sous-espace de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.
2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u. Montrer : $\lambda = \pm 1$.
3) Si $\varepsilon = \pm 1$, montrer que les sous-espaces $\ker(u - \pm \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \pm \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.

1.7 Endomorphismes symétriques

Théorème-Définition 1.7.1. *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$u = u^*$;*
(ii) *il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$ soit symétrique ;*
(iii) *pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$ est symétrique.*

Si ces conditions sont réalisées, on dit que u est un endomorphisme **symétrique** *ou* **auto-adjoint** *de E.*

Exemples. 1) L'identité, l'endomorphisme nul et les homothéties vectorielles sont des endomorphismes symétriques de E.
2) Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques (cf. exercice 20).

♦ **Exercice 18.** Démontrer ce théorème.

Dans la suite, on note $\mathrm{Sym}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On désigne par $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre n qui sont symétriques.

⚠ **Attention** : la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base $\mathcal{E}$ de E n'est pas toujours symétrique ! Elle l'est si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée... D'autre part, si $\mathcal{E}$ est une base quelconque de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, il se peut que $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$ soit symétrique sans que u soit symétrique !

Exemple. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x) = \lambda_1 - \lambda_2$ où $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$. La matrice de u dans la base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ est alors $\mathrm{Mat}(u; (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pourtant, u n'est pas un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique.

♦ **Exercice 19.** Soient $u \in \mathrm{Sym}(E)$ et F un sous-espace stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.

♦ **Exercice 20.** Soient F, G des sous-espaces supplémentaires de E et p la projection sur F parallèlement à G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $p \in \mathrm{Sym}(E)$;
(ii) $G = F^\perp$.

Le théorème suivant est tout à fait fondamental, d'où le nom qu'on va lui donner dans ce cours :

Théorème 1.7.1 (Théorème fondamental)**.** *Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u.*

♦ **Exercice 21.** ⋆ Démontrer ce théorème.

La version matricielle du théorème fondamental est la suivante (ce résultat est également crucial) :

Corollaire 1.7.1. *Si $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale $\Omega \in O(n)$ telle que $\Omega^{-1} A \Omega = {}^t\Omega A \Omega$ soit diagonale. Autrement dit, une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.*

Définition 1.7.2. *On dit que $u \in \mathrm{Sym}(E)$ est* **positif** *(resp.* **défini positif***) si $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$). On note $\mathrm{Sym}^+(E)$ (resp. $\mathrm{Sym}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. symétriques définis positifs). On adopte une terminologie analogue pour les matrices, et on note $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles correspondants.*

♦ **Exercice 22.** Soient F, G des sous-espaces supplémentaires de E. Alors tout élément x de E s'écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On rappelle que la *symétrie* s par rapport à F parallèlement à G est définie par

$$\begin{array}{rccc} s: & E & \longrightarrow & E \\ & x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G. \end{array}$$

1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $s \in O(E)$;
(ii) $s \in \mathrm{Sym}(E)$.
(iii) $G = F^\perp$.

Si elles sont réalisées, on dit que s est la ***symétrie orthogonale*** par rapport à F, et on la note s_F.
Si $\dim E \geqslant 2$ et si F est un hyperplan de E, on dit que s_F est la ***réflexion*** d'hyperplan F.
2) Donner une expression simple de $s(x)$, pour $x \in E$, lorsque s est une réflexion.

Remarque. Les symétries orthogonales sont des endomorphismes à la fois symétriques et orthogonaux.

⚠ **Attention** : une symétrie (quelconque) n'est pas toujours un endomorphisme symétrique !

Exercice 9. Que dire d'une matrice $A \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ de trace nulle ?

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) Établir : $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^\perp$.
2) Établir : $\mathrm{Im}\,(u \circ u^*) = \mathrm{Im}\, u$ et $\ker(u^* \circ u) = \ker u$.
3) Supposons $u^2 = 0$. Montrer que $u + u^*$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Im}\, u = \ker u$.
4) Montrer que $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont symétriques positifs.

Exercice 11. * On dit qu'un endomorphisme u de E est ***normal*** s'il commute avec son adjoint, i.e., $u \circ u^* = u^* \circ u$. Soient u un endomorphisme normal de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u^* et par u.

Exercice 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\| .$$

1) Montrer : $\forall x \in E$, $\|u^*(x)\| \leqslant \|x\|$.
2) Prouver que $\ker(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 13. Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable. A-t-on $A \in \mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$? $A \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice 14. Soient $u \in \mathrm{Sym}^+(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathrm{Sym}^+(E)$ tel que $v^p = u$.

Exercice 15 (Décomposition polaire)**.** 1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathrm{Sym}^+(E)$ tel que : $v^2 = u^* \circ u$.
2) Soit $u \in GL(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple $(w, p) \in O(E) \times \mathrm{Sym}^+(E)$ tel que : $u = w \circ p$.

Exercice 16 (décomposition d'Iwasawa)**.** * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{T}_n^{>0}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.
1) Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\Omega \in O(n)$ et $T \in \mathcal{T}_n^{>0}$ tels que $P = \Omega T$.
Cette décomposition des matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ en produit d'une matrice orthogonale par une matrice triangulaire supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs est appelée la *décomposition d'Iwasawa*.
2) En déduire que tout $A \in \mathrm{Sym}_n^{++}$ s'écrit ${}^tTT$ où $T \in \mathcal{T}_n^{>0}$.

Exercice 17. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \min(i, j)$. Montrer que $A \in \mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Chapitre 2

Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

2.1 Étude en dimension 2

2.1.1 Description du groupe spécial $SO(2)$

Soit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2).$$

On a $\det \Omega = ad - bc = 1$. Par suite :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \Omega^{-1} = {}^t\Omega = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;,\; a^2 + b^2 = 1.$$

On sait alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, défini à 2π près, tel que :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(\theta).$$

On a donc obtenu :

Théorème 2.1.1. *Le groupe $SO(2)$ est commutatif, et $SO(2) = \{\Omega(\theta) \,;\, \theta \in \mathbb{R}\}$.*

Remarque. Le fait que $SO(2)$ soit commutatif est fondamental, tant d'un point de vue mathématique que physique.

♦ **Exercice 23.** Vérifier la première assertion du théorème.

2.1.2 Orientation

Les matrices $\Omega(\theta)$ sont appelées des *matrices de rotations.* Rappelons que les éléments de $SO(E)$, pour E un espace euclidien, sont appelés des rotations vectorielles. Justifions comme promis ici cette appellation. Considérons l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ sa base canonique, i.e.,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in SO(E)$. Alors $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in SO(2)$; c'est donc une matrice de rotation et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(\theta).$$

♦ **Exercice 24.** Représenter sur une figure les vecteurs $e_1, e_2, u(e_1), u(e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Compte tenu de la figure obtenue à l'exercice précédent, on aimerait dire que u est *la* rotation d'angle θ (et de centre $0_{\mathbb{R}_2}$) où θ est défini à 2π près. Malheureusement, pour que cette définition ait un sens, il faudrait que l'angle (même défini à 2π près) de la rotation u ne dépende pas de la base orthonormée choisie.

Or ce n'est pas le cas ! En effet, on vérifie par exemple que

$$\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}') = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(-\theta),$$

où $\mathcal{E}'$ est la base orthonormée $(-e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ (toujours muni de son produit scalaire canonique).

Cette petite discussion justifie la notion d'*orientation* que nous allons introduire maintenant (de façon plus rigoureuse que celle vue dans les classes antérieures).

Supposons $\dim E = 2$, et soit $u \in SO(E)$. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ des bases orthonormées de E, et Ω la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$. Rappelons qu'on a alors $\Omega \in O(2)$ (cf. Corollaire 1.6.3). D'autre part, comme $u \in SO(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) = \Omega(\theta)$. Alors, $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{F}) = \Omega^{-1}\Omega(\theta)\Omega$. Il y a alors deux cas possibles :

- $\Omega \in SO(2)$, et alors $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{F}) = \Omega(\theta) = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$.
- $\Omega \in O^-(2)$, et alors $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{F}) = \Omega(-\theta)$.

♦ **Exercice 25.** Justifier ces assertions.

Définition 2.1.1. *On dit que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ définissent la* **même orientation** *de E si $\Omega \in SO(E)$. Par définition,* **orienter** *E, c'est fixer une base orthonormée de E.*
Les bases orthonormées **directes** *$\mathcal{F}$ sont alors celles pour lesquelles $\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = 1$ Les bases orthonormées* **indirectes** *ou* **rétrograde** *$\mathcal{F}$ sont alors celles pour lesquelles $\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = -1$.*

Définition-Proposition 2.1.2. *Supposons toujours $\dim E = 2$, et soit $u \in SO(E)$. L'espace E étant orienté, d'après ce qui précède, il existe un réel θ, uniquement déterminé modulo 2π, tel que l'on ait $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) = \Omega(\theta)$ pour toute base orthonormée directe de E. On dit que θ est* **une mesure** *de la rotation u.*

Remarque. On dit « une » mesure d'angle de la rotation u , et non « la » mesure d'angle de la rotation u car celle-ci n'est définie qu'à 2π près. Mais les expressions « l'angle de la rotation u » ou « la mesure d'angle de la rotation u » sont tolérées ; il faut alors garder à l'esprit que la mesure d'angle n'est définie qu'à 2π près.
⚠ **Attention** : en revanche, parler d'une mesure d'angle d'une rotation u d'un espace vectoriel euclidien E n'a de sens que si E est orienté. Sur ce point, il n'y a aucune tolérance !

2.1.3 Description de l'ensemble $O^-(2)$

Soit :
$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O^-(2).$$
On a $\det \Lambda = ad - bc = -1$. Par suite :
$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} = {}^t\Lambda = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$
On en déduit :
$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ , \ a^2 + b^2 = 1.$$
On voit comme précédemment qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, défini à 2π près, tel que :
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \Lambda(\theta).$$
D'autre part, posant :
$$X_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \ , \ Y_\theta = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$
il vient :
$$\Lambda(\theta) X_\theta = X_\theta \ , \ \Lambda(\theta) Y_\theta = -Y_\theta.$$
On a donc obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.3. *On a $O^-(2) = \{\Lambda(\theta);\, \theta \in \mathbb{R}\}$, et tout élément de $O^-(2)$ est une matrice de réflexion.*

♦ **Exercice 26.** Justifier ce théorème et faire une figure (on représentera en particulier l'axe de la réflexion).

2.2 Étude en dimension 3

2.2.1 Produit mixte, produit vectoriel

Dans ce paragraphe, E est pour le moment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$. Pour toutes bases orthonormées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E, on a $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \in O(n)$ (cf. corollaire 1.6.3). Il y a donc deux cas possibles :

- ou bien $\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = 1$;
- ou bien $\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = -1$.

Ceci motive la définition suivante qui généralise la notion d'orientation vue dans le cas $n = 2$:

Définition 2.2.1. *Par définition,* **oritenter** *E, c'est choisir une base orthonormée de E. On dit aussi dans ce cas qu'on a choisi une* **orientation** *de E.*

Fixons une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, d'où une orientation de E. Soit $\mathcal{F}$ une base orthonormée de E. On dit que $\mathcal{F}$ est base orthonormée **directe** *si $\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = 1$; on dit que $\mathcal{F}$ est base orthonormée* **indirecte** *ou* **rétrograde** *si $\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = -1$.*

Désormais, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Définition-Proposition 2.2.2. *Soit $\mathcal{U} = (u, v, w)$ une famille de trois vecteurs de E. Le réel $\det_{\mathcal{E}} \mathcal{U}$ est indépendant de la base orthonormée directe de E. On dit que c'est le* **produit mixte** *de $\mathcal{U}$, et on le note $[u, v, w]$.*

♦ **Exercice 27.** Démontrer cette proposition

♦ **Exercice 28.** Démontrer les propriétés suivantes :

(i) $[u, v, w] = -[v, u, w] = -[u, w, v] = -[w, v, u]$;

(ii) pour tous $v, w \in E$, l'application $E \to \mathbb{R}$, $u \to [u, v, w]$ est linéaire.

(iii) on a $[u, v, w] = 0$ si et seulement si la famille (u, v, w) est liée.

(iv) si (u, v, w) est une base orthonormée directe (resp. indirecte) de E, alors $[u, v, w] = 1$ (resp. $[u, v, w] = -1$).

Théorème-Définition 2.2.1. *Soient $u, v \in E$. Il existe un et un seul vecteur $w \in E$ tel que*

$$[u, v, x] = (w \mid x)$$

pour tout vecteur $x \in E$. On dit que w est le **produit vectoriel** *de u et v (pris dans cet ordre), et on note $w = u \wedge v$.*

♦ **Exercice 29.** 1) Démontrer ce théorème.

2) Montrer que pour tous $u, v \in E$, on a $v \wedge u = -u \wedge v$.

3) Montrer que pour tout $u \in E$, l'application $v \mapsto u \wedge v$ est linéaire, autrement dit que pour tous $v, v' \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \wedge (v + \lambda v') = u \wedge v + \lambda\, u \wedge v'$.

♦ **Exercice 30.** Soient $u, v \in E$, $w = u \wedge v$. Montrer les propriétés suivantes :

(i) On a $w = 0$ si, et seulement si, u et v sont colinéaires.

(ii) Le vecteur w est orthogonal à u et à v.

(iii) Si la famille (u, v) est libre, alors la famille (u, v, w) est une base directe de E.

(iv) Soient $\mathcal{E}$ une base orthonormée directe de E, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les composantes de u dans cette base, et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ celles de v, i.e.,

$$\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}(v; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\mathrm{Mat}(w; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{pmatrix}$$

Remarque. D'après ce qui précède, si la famille (u, v) est orthonormée, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E. Cette remarque sera très importante dans la pratique : elle donne une méthode simple pour construire une base orthonormée directe de E dès lors qu'on a deux vecteurs unitaires orthogonaux.

♦ **Exercice 31.** Soient $u, v \in E$ de composantes $(3, 2, 2)$ et $(1, -2, 3)$. Déterminer les composantes de $u \wedge v$.

Exercice 18. Soient $u, v, w \in E$.
1) Vérifier que $u \wedge (v \wedge w) \in \mathrm{Vect}(v, w)$. En choisissant une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) telle que $v \in \mathrm{Vect}(e_1)$, $w \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, établir :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u|w)v - (u|v)w \ , \ (u \wedge v) \wedge w = (u|w)v - (v|w)u.$$

2) Prouver les formules suivantes :

$$(u \wedge v) \wedge (u \wedge w) = [u, v, w]u \ , \ [u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u] = [u, v, w]^2,$$
$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$$

Exercice 19. Soient $a, b, c, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Prouver sans calcul que

$$(a\lambda + b\mu + c\nu)^2 + (a\mu - b\lambda)^2 + (a\nu - c\lambda)^2 + (b\nu - c\mu)^2$$

est égal à :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

(ceci est appelé *l'indentité de Lagrange*).

2.2.2 Rotations en dimension 3

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

♦ **Exercice 32.** Soit $u \in SO(E)$.
1) Montrer que $1 \in \mathrm{Spec}(u)$.
2) Supposons $u \neq \mathrm{Id}_E$. Montrer que l'espace propre pour u associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

Supposons E orienté, et fixons une base orthonormée directe $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. Soit $u \in SO(E) \smallsetminus \{\mathrm{Id}_E\}$.

D'après l'exercice précédent, il existe un vecteur unitaire $f_1 \in E$, uniquement déterminé au signe près, tel que $u(f_1) = f_1$. Complétons pour obtenir une base orthonormée directe $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$. Par exemple, on prend f_2 unitaire orthogonal à f_1, et $f_3 = f_1 \wedge f_2$. Si $F = (\mathrm{Vect} f_1)^\perp = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$, alors F est stable par u (cf. exercice 8).

D'après l'étude des rotations en dimension 2, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, uniquement déterminé modulo 2π, et tel que

$$\Omega = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Définition 2.2.3. *Avec les notations précédentes, la droite* $\mathrm{Vect}(f_1)$ *orientée par le vecteur* f_1 *est appelée l'***axe** *de la rotation, et* θ *est l'***angle** *de cette rotation.*

Question. Si $u \in SO(E) \smallsetminus \{\mathrm{Id}_E\}$, comment déterminer en pratique l'axe et l'angle de la rotation u, c'est-à-dire f_1 et θ dans les notations précédentes ?

Réponse. Dans la pratique, u est donné par $A = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$. On détermine f_1 en écrivant $u(f_1) = f_1$. Autrement dit, il s'agit de rechercher la droite propre de u associée à la valeur propre 1 (cf. exercice 32). On prend alors pour f_1 n'importe quel générateur de cette droite de norme 1.

D'autre part :

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} \Omega = 1 + 2\cos\theta.$$

D'où la détermination de $\cos\theta$. Reste à déterminer $\sin\theta$. Un calcul facile montre que, pour $x \in E$:

$$(u - u^*)(x) = 2\sin\theta\,(f_1 \wedge x).$$

On voit aussi qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Mat}(u - u^*; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Enfin, si $f_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, et si $g \in \mathcal{L}(E)$ est défini par $g(x) = 2\sin\theta\,(f_1 \wedge x)$, on trouve

$$\operatorname{Mat}(g; \mathcal{E}) = 2\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

Compte tenu de (2.2.1) et (2.2.2), on détermine $\sin\theta$.

♦ **Exercice 33.** Vérifier ces assertions.

Exercice 20. * Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $u \in SO(E)$ une rotation de E. Montrer que u est le produit de deux réflexions, c'est-à-dire qu'il existe deux réflexions s_1 et s_2 telles que $u = s_1 \circ s_2$.

Exercice 21. Par des transformations orthogonales à préciser, diagonaliser les matrices symétriques réelles suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. Un espace euclidien de dimension 3 étant rapporté à une base orthonormée directe, montrer que les endomorphismes dont les matrices dans cette base sont

$$\frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

représentent des rotations. Déterminer angles et axes de ces rotations.

Exercice 23. Soit f un endomorphisme symétrique de E tel que : $\forall\, x \in E$, $(f(x)\,|\,x) = 0$. Déterminer f.

Exercice 24. Soient u un vecteur non nul de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f : E \to E, \quad x \mapsto u \wedge x.$$

1) Vérifier que f est une application linéaire puis déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
2) Déterminer f^*.
3) Montrer que f^2 est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 25. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall\, u, v \in E, \quad f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v).$$

Montrer que f est ou bien l'endomorphisme nul, ou bien une rotation.

Exercice 26. Soient $a, b \in E$, avec $a \neq 0$.
1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $(a \,|\, b) = 0\,$;
   (ii) il existe $x \in E$ tel que $a \wedge x = b$.
2) On suppose que $(a \,|\, b) = 0$. Etablir :

$$\{x \in E \mid a \wedge x = b\} = \{\frac{b \wedge a}{\|a\|^2} + \lambda a\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Chapitre 3

Formes quadratiques

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

3.1 Définitions

3.1.1 Formes bilinéaires symétriques

On rappelle qu'une *forme bilinéaire symétrique* sur E est une application $\varphi\colon E\times E \to \mathbb{K}$ telle que $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire pour tout $x \in E$ et $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tous $x, y \in E$ (voir la définition 1.1.1 au tout début du cours).

Soient $\mathcal{E}$ une base de E, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et $A = \mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{E})$, i.e.,

$$\mathrm{Mat}(\varphi;\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \cdots & \varphi(e_n,e_n). \end{pmatrix}$$

Si $x, y \in E$ ont pour matrices X et Y dans la base $\mathcal{E}$, on a vu que

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY = {}^tYAX.$$

♦ **Exercice 34.** Soient $\mathcal{F}$ une autre base de E et $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$. Exprimer la matrice B de φ dans la base $\mathcal{F}$ en fonction de A et P.

Dans les chapitres précédents, nous avons essentiellement étudier le cas où φ est un produit scalaire sur E. Nous allons dans ce chapitre considérer d'autres cas.

3.1.2 Définition

Définition 3.1.1. *Une application $Q\colon E \to \mathbb{K}$ est appelée une* **forme quadratique** *(sur E) s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que*

$$\forall\, x \in E, \quad Q(x) = \varphi(x,x).$$

On note $\mathcal{Q}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ constitué des formes quadratiques.

♦ **Exercice 35.** Vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?

♦ **Exercice 36.** Soient Q une forme quadratique sur E, et φ une forme bilinéaire symétrique sur E telle que $Q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$. Montrer la ***formule de polarisation*** :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x, y) - Q(x) - Q(y)). \tag{3.1.1}$$

2) En déduire qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que $Q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$, qu'on appelle la ***forme polaire de*** Q.

Remarques. 1) Si φ est la forme polaire de Q, on a aussi la formule

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y)). \tag{3.1.2}$$

2) Lorsque φ est un produit scalaire, alors Q est une norme sur E (cf. Théorème 1.3.2).

♦ **Exercice 37.** Donner des exemples de formes quadratiques qui ne soient pas issues de produits scalaires.

Compte tenu de l'exercice précédente on adopte pour les formes quadratiques la terminologie des formes bilinéaires symétriques. En particulier, on appelle ***matrice de*** Q ***dans une base*** $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ ***de*** E, la matrice de sa forme polaire φ dans cette base. On la note $\mathrm{Mat}(Q; \mathcal{E})$. Autrement dit,

$$\mathrm{Mat}(Q; \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \cdots & \varphi(e_n, e_n). \end{pmatrix}$$

Exercice 27. On suppose $\dim E = 2$. Soit (e_1, e_2) une base de E. Pour $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$, on pose :

$$\varphi_1(x, y) = \lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \ , \ \varphi_2(x, y) = (\lambda_1 + 3\lambda_2)(3\mu_1 + \mu_2),$$
$$\varphi_3(x, y) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 \ , \ \varphi_4(x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2.$$

1) Déterminer les applications φ_k qui sont des formes bilinéaires sur E.
2) Écrire les matrices $(\varphi_k(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$. Quelles sont les formes φ_k qui sont symétriques ? Symétriques non dégénérées ?
3) Soit $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$, avec $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 - e_1$. Écrire la matrice $(\varphi_k(f_i, f_j))_{1 \leq i,j \leq 2}$.

3.1.3 Expression analytique d'une forme quadratique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose dans ce paragraphe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $E = \mathbb{R}^n$
Soient Q est une forme quadratique, φ sa forme polaire et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Posons pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = \varphi(e_1, e_j)$. Alors pour tous $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = \sum_{j=1}^n y_j e_j = (y_1, \ldots, y_n)$ dans E, on a

$$\varphi(u, v) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j a_{i,j}$$

et

$$Q((x_1,\dots,x_n)) = Q(u) = \varphi(u,u) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2}_{\text{termes carrés}} + 2 \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j a_{i,j}}_{\text{termes rectangulaires}} .$$

Ainsi, l'application $(x_1,\dots,x_n) \mapsto Q((x_1,\dots,x_n))$ est un polynôme *homogène*, i.e., $\forall\,\lambda \in \mathbb{K}$, $Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u)$, dont tous les monômes sont des polynômes homogènes de degré 2.

⚠ **Attention** : on note ici $(x_1,\dots,x_n)$ un élément de $E = \mathbb{R}^n$; cela ne signifie pas que Q est une fonction de n variables, d'où les doubles parenthèses ! Dans la suite, on notera simplement $Q(x_1,\dots,x_n)$ pour $Q((x_1,\dots,x_n))$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si Q est un tel polynôme, alors il existe des scalaires $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, pour $i,j \in \{1,\dots,n\}$, tels que pour tout $x \in E$,

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j a_{i,j},$$

et Q est une forme quadratique dont la forme polaire est donnée par

$$\forall\, u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \forall\, v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in E, \qquad \varphi(u,v) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j a_{i,j}.$$

En conclusion, nous avons montré :

Proposition 3.1.2. *Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ sont les applications polynômes dont tous les monômes sont des polynômes homogènes de degré 2.*

Exemple. Une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx,$$

avec $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

⚠ **Attention** : de nouveau, $Q(x,y,z)$ signifie en toute rigueur $Q((x,y,z))$.

La matrice de la forme polaire φ de Q dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\operatorname{Mat}(\varphi;\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a & d/2 & f/2 \\ d/2 & b & e/2 \\ f/2 & e/2 & c \end{pmatrix},$$

et

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = axx' + byy' + czz' + \frac{d}{2}(xy' + yx') + \frac{e}{2}(yz' + zy') + \frac{f}{2}(zx' + xz').$$

3.2 Orthogonalité

Définition 3.2.1. *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E.*

(i) *Deux vecteurs x,y de E sont dits* **φ-orthogonaux**, *ou* **orthogonaux pour** *φ, si $\varphi(x,y) = 0$.*

(ii) *Un vecteur x de E est dit* **φ-isotrope** *ou* **isotrope pour** *φ, si $\varphi(x,x) = 0$.*

(iii) *Des parties F et G de E sont dites* φ-**orthogonales** *ou* **orthogonales pour** φ, *si* $\varphi(x,y) = 0$ *pour tout* $(x,y) \in F \times G$.

Si F est un sous-espace de E, on appelle φ-***orthogonal*** de F le sous-espace F° de E constitué des vecteurs $x \in E$ tels que $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $y \in F$. Le φ-orthogonal E° de E est appelé le ***noyau*** de φ, et on le note $\ker \varphi$ i.e.,

$$\ker \varphi = \{x \in E \mid \varphi(x,y) = 0 \, \forall \, y \in E\}.$$

Le ***cône isotrope*** $\mathcal{C}_\varphi$ de φ est l'ensemble des vecteurs isotropes de E :

$$\mathcal{C}_\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x,x) = 0\}.$$

⚠ **Attention** : on note $\ker \varphi$ bien que φ ne soit pas une application linéaire ; c'est toutefois, comme le noyau d'une application linéaire, un sous-espace vectoriel de E.

⚠ **Attention** : on prendra garde au fait qu'en général, $\mathcal{C}_\varphi$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. Le cône isotrope $\mathcal{C}_\varphi$ d'une forme quadratique est un « cône » au sens où pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$, si $x \in \mathcal{C}_\varphi$, alors $\lambda x \in \mathcal{C}_\varphi$.

♦ **Exercice 38.** 1) Donner des exemples de formes quadratiques où
a) le cône isotrope est un sous-espace vectoriel de E ;
b) le cône isotrope n'est pas un sous-espace vectoriel de E ;
c) le cône isotrope est réduit à $\{0_E\}$.
2) Dans le cas général, comparer $\mathcal{C}_\varphi$ et $\ker \varphi$.

Définition 3.2.2. *Soit φ une forme bilinaire symétrique sur E et $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.*

(i) *On dit que $\mathcal{X}$ est* φ-**orthogonale** *si $\varphi(x_i, x_j) = 0$ pour $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ et distincts.*

(ii) *On dit que $\mathcal{X}$ est* φ-**orthonormée** *si elle est φ-orthogonale et si $\varphi(x_i, x_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.*

Définition 3.2.3. *On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ sur E est* **dégénérée** *(resp.* **non dégénérée***) si $E^\circ \neq \{0\}$ (resp. $E^\circ = \{0\}$).*

Soient Q une forme quadratique sur E, et φ sa forme polaire. On rappelle (cf. exercice 34) que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases de E, alors

$$\mathrm{Mat}(Q; \mathcal{F}) = {}^t\!P \, \mathrm{Mat}(Q; \mathcal{E}) \, P,$$

où $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$.

⚠ **Attention** : pour une application linéaire f, la formule de changement base est $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{F}) = P^{-1} \, \mathrm{Mat}(f; \mathcal{E}) \, P$!

Remarques. 1) On dit que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ***congruentes*** s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = {}^t\!PAP$. Ainsi, deux matrices symétriques A et A' sont congruentes si et seulement si elles représentent la même forme quadratique dans des bases différentes.
2) Si $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont congruentes alors $\det(A') = (\det P)^2 \det(A)$ pour une certaine matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Si Q est une forme quadratique sur E, le signe de $\det \mathrm{Mat}(Q; \mathcal{E})$ ne dépend donc pas de la base $\mathcal{E}$ choisie.

3.3 Bases orthogonales

Soit Q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

Question. Existe-t-il des bases φ-orthogonales de E ? Autrement dit, existe-t-il une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\operatorname{Mat}(Q; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$? Si oui, comment construire en pratique de telles bases ?

On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des *formes linéaires* sur E, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel de dimension $n \times 1 = n$ appelé le ***dual*** de E.

♦ **Exercice 39.** ⋆ Soit $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\ell_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j; \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

(*Indication.* On pourra montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.). La base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est appelée la ***base duale*** de $(\ell_1, \dots, \ell_n)$.

On admet le théorème suivant :

Théorème-Définition 3.3.1. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E et Q la forme quadratique associée. On suppose que Q est <u>non nulle</u>. Alors E possède des bases φ-orthogonales. Précisément, il existe une base $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ de E^* et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i^2 ,$$

et la base duale de $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est une base φ-orthognale. De manière équivalente, il existe p formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_p$ sur E, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, et p scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ <u>non nuls</u> tels que

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ell_i^2 .$$

On admet que l'entier p ne dépend pas de la famille $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ choisie vérifiant les conditions ci-dessus ; on l'appelle le **rang** *de Q (ou de φ). Par convention, le rang de la forme quadratique nulle est 0.*

♦ **Exercice 40.** Justifier que les deux dernières assertions du théorème sont équivalentes à la première.

Remarque. Dans les notations du théorème, on a, pour tous $x, y \in E$,

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i(x) \ell_i(y).$$

3.4 Formes quadratiques réelles

Dans tout ce paragraphe, $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

3.4.1 Loi d'internie de Sylvester

Définition 3.4.1. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique, et Q la forme quadratique associée à φ.*

(i) *On dit que Q (ou φ) est* **positive** *(resp.* **négative***) si $Q(x) \geqslant 0$ (resp. $Q(x) \leqslant 0$) pour tout vecteur x de E.*

(ii) *On dit que Q (ou φ) est* **définie positive** *(resp.* **définie négative***) si $Q(x) > 0$ (resp. $Q(x) < 0$) pour tout vecteur* non nul *x de E.*

Théorème-Définition 3.4.1 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** *Soient φ une forme bilinéaire symétrique non nulle sur E et Q la forme quadratique associée.*

(i) *Il existe des entiers s et t, avec $1 \leqslant s + t \leqslant n$ et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :*

$$Q(x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 - \sum_{i=s+1}^{t} \lambda_i^2.$$

(ii) *On a $s + t = \operatorname{rang}(\varphi)$ et les entiers s et t sont définis comme suit : s (resp. t) est le maximum des dimensions des sous-espaces F de E tels que $\varphi|_{F \times F}$ soit définie positive (resp. définie négative).*

On dit que le couple (s, t) est la **signature** *de φ.*

> ***James Joseph Sylvester****, né le 3 septembre 1814 et mort le 13 mars 1897 à Londres, est un mathématicien et géomètre anglais.*

♦ **Exercice 41.** Démontrer l'assertion (i) de ce théorème. On admettra l'assertion (ii).

Le théorème suivant fait le lien avec le chapitre précédent. Il est parfois appelé le théorème de *diagonalisation simultanée* :

Théorème 3.4.2. *Soient E un espace euclidien de dimension finie non nulle et φ une forme bilinéaire symétrique (réelle). Il existe une base de E à la fois orthonormée et φ-orthogonale.*

♦ **Exercice 42.** * Démontrer ce théorème à l'aide du Théorème fondamental.

3.4.2 Orthogonalisation effective

Il faut retenir la démonstration du résultat suivant qui est connue sous le nom de ***procédé d'orthogonalisation de Gauss***.

> **Johann Carl Friedrich Gauss**, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Théorème 3.4.1. *Soit Q une forme quadratique sur E. Il existe une décomposition de Q en combinaison linéaire, à coefficients éventuellement nuls, de carrés de $n = \dim E$ formes linéaires indépendantes.*

Il ne s'agit que d'une reformulation du théorème 3.3.1 mais nous allons ici en donner une démonstration en construisant de manière explicite ces formes linéaires indépendantes. Cela nous permettra en particulier de déterminer en pratique la signature d'une forme quadratique.

Démonstration. Soit φ la forme polaire de Q. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E, le cas où $n = 1$ étant clair. Soient $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{E})$.
Pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, il vient :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j.$$

• Supposons qu'il existe un indice i tel que $a_{ii} \neq 0$. Par exemple, $a_{11} \neq 0$. Posons

$$f_1(x) = a_{11}\lambda_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\lambda_j.$$

Alors :

$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}}(f_1(x))^2 + R(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i),$$

où R est une forme quadratique sur $F = \mathbb{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des formes linéaires indépendantes $g_2, \dots, g_n$ sur F et des scalaires $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$R = \alpha_2 g_2^2 + \cdots + \alpha_n g_n^2.$$

Prolongeons g_i en un élément $f_i \in E^*$, en posant :

$$f_i(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = g_i(\lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n).$$

Il est immédiat que $f_1, \dots, f_n$ sont indépendants. Posant $\alpha_1 = a_{11}^{-1}$, il vient :

$$Q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_n f_n^2.$$

• On suppose $a_{ii} = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Le résultat étant clair pour $Q = 0$, nous supposerons, par exemple, $a_{12} \neq 0$. On a cette fois :

$$Q(x) = 2(a_{12}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 \sum_{i=3}^{n} a_{1i}\lambda_i + \lambda_2 \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\lambda_j + \sum_{3\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j).$$

Posons :

$$h_1(x) = \lambda_1 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{i=3}^{n} a_{2i}\lambda_i \ , \ h_2(x) = \lambda_2 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{i=3}^{n} a_{1i}\lambda_i.$$

Alors :

$$Q(x) = 2a_{12}h_1(x)h_2(x) + R(\lambda_3 e_3 + \cdots + \lambda_n e_n),$$

où R est une forme quadratique sur $F = \mathbb{R}e_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$. En remarquant que $4h_1h_2 = (h_1 + h_2)^2 - (h_1 - h_2)^2$, et en posant $f_1 = h_1 + h_2$, $f_2 = h_1 - h_2$, on termine alors comme dans le cas précédent en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Exemple. Considérons la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx.$$

Appliquant la méthode de Gauss, il vient :

$$Q(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz = (x - y - z)^2 + (y - z)^2 - (y + z)^2.$$

On en déduit que la forme est de rang 3, de signature $(2, 1)$, et qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}(Q; \mathcal{F}) = \mathrm{diag}(1, 1, -1).$$

Exercice 28. Pour $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = P(1)Q(1)$. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer son noyau et son rang. Déterminer une base φ-orthogonale de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 29. On suppose $\dim E = 2$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base de E, et φ une forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $F = \mathbb{K}e_1$, $G = \mathbb{K}e_2$. Déterminer $(F \cap G)^\circ$ et $F^\circ + G^\circ$.

Exercice 30. Soient $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(AB)$.
1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique. Cette forme est-elle non-dégénérée ?
2) Montrer que toute matrice symétrique est φ-orthogonale à toute matrice anti-symétrique.
3) Quelle est la signature de φ ?

Exercice 31. Par la méthode de Gauss, déterminer les signatures des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$ données par :
- a) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx)$.
- b) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 6y^2 - 4xy + 8xz$.
- c) $Q(x, y, z) = xy + yz + 2zx$.
- d) $Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy$.
- e) $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$.
- f) $Q(x, y, z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$.
- g) $Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 2xy$.
- h) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos\alpha + 2yz \cos\beta + 2xz \cos\gamma$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 32. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Étudier la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $X{}^tX$.

3.5 Coniques

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.5.1 Généralités

On muni $\mathbb{R}^2$ d'une base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, et on se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ où O est le point 0_E de l'espace affine $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.5.1. *On appelle* **conique** *de $\mathbb{R}^2$ toute courbe Γ admettant dans le repère $\mathcal{R}$ une équation de la forme $F(x, y) = 0$, où*

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Autrement dit, une courbe Γ est une conique de $\mathbb{R}^2$ s'il existe une forme quadratique Q, de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, et une forme linéaire ℓ sur $\mathbb{R}^2$, définie par $\ell(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = dx + ey$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, telles que

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = Q(x, y) + \ell(x, y) + f.$$

Remarques. 1) Posons $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. L'équation F de la conique s'écrit également sous forme matricielle :

$${}^tXAX + 2LX + f = 0.$$

2) Le terme ${}^tXAX = ax^2 + 2bxy + cy^2$ est appelé la ***partie quadratique*** de l'équation F de la conique et le terme $2L = 2dx + 2ey$ est appelé la ***partie linéaire*** de l'équation F de la conique.
3) Si F est une équation de la conique Γ, alors λF est encore une équation de la conique Γ pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4) Le cône isotrope d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ est en particulier une conique.

Soit désormais Γ une conique de $\mathbb{R}^3$ d'équation F.

Définition 3.5.2. *On dit que le point $M_0 = (x_0, y_0)$ est un* **centre de symétrie** *de Γ si*

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x - x_0, y - y_0) \in \Gamma \iff (-x + x_0, -y + y_0) \in \Gamma,$$

ou encore si

$$\forall\, M \in \mathbb{R}^2, \qquad M \in \Gamma \iff M' \in \Gamma,$$

où M' désigne le symétrique de M par rapport au point M_0.

Proposition 3.5.3. *Le point (x_0, y_0) est un centre de symétrie de la conique Γ si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) & = & 0 \end{array}\right. \quad \textit{soit encore} \quad \left\{\begin{array}{l} ax_0 + by_0 = -d \\ bx_0 + cy_0 = -e \end{array}\right. \quad \textit{ou encore} \quad A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.5.4. *La conique Γ admet un unique centre de symétrie si et seulement si* $\det A = ac - b^2 \neq 0$. *Dans ce cas, on dit que Γ est une* **conique à centre**.

♦ **Exercice 43.** Démontrer la proposition et le corollaire.

Objectif : rechercher un repère orthornormé de $\mathbb{R}^2$ dans lequel la conique Γ admette une équation plus simple, appelée ***équation réduite.***

3.5.2 Méthode de réduction

On conserve les notations précédentes. La matrice A étant symétrique réelle, il existe d'après le Théorème fondamental une matrice orthogonale $P \in O(2)$ telle que

$$^tPA\,P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

et dans ce cas, $\det A = \lambda\mu$.

Premier cas : $\underline{\det A = \lambda\mu \neq 0}$

Dans ce cas, on sait que Γ admet un unique centre de symétrie Ω dont on peut calculer les coordonnées (x_0, y_0).

Proposition 3.5.5. *Soit* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *une base orthogonale de vecteurs propres de* A*. L'équation de la conique* Γ *dans le repère* $(\Omega, (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ *est de la forme*

$$\lambda x_1^2 + \mu y_1^2 + k = 0, \qquad \textit{avec} \quad k = F(x_0, y_0).$$

- Cas $\det A = \lambda\mu > 0$:
  - $*$ k est du signe de λ et μ : $\Gamma = \varnothing$;
  - $*$ $k = 0$: $\Gamma = \{\Omega\}$;
  - $*$ k est du signe opposé à λ et μ : Γ est une ***ellipse***.
- Cas $\det A = \lambda\mu < 0$:
  - $*$ $k = 0$: Γ est la réunion de deux droites sécantes ;
  - $*$ $k \neq 0$: Γ est une ***hyperbole***.

Deuxième cas : $\underline{\det A = \lambda\mu = 0}$

Dans ce cas, l'une des valeurs propres est nulle, par exemple $\mu = 0$ (l'une seulement car $A \neq 0$).

Proposition 3.5.6. *Soit* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *une base orthogonale de vecteurs propres de* A*. L'équation de la conique* Γ *dans le repère* $(O, (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ *est de la forme*

$$\lambda x_1^2 + 2d_1 x_1 + 2e_1 y_1 + f_1 = 0.$$

On écrit cette équation sous forme canonique :

$$\lambda \left(x_1 + \frac{d_1}{\lambda} \right)^2 + 2e_1 y_1 + f_1' = 0.$$

- Cas $e_1 = 0$:
  - $*$ $\lambda f_1' > 0$: $\Gamma = \varnothing$;
  - $*$ $f_1' = 0$: Γ est une droite (double) ;
  - $*$ $\lambda f_1' < 0$: Γ est la réunion de deux droites parallèles disctinctes.
- Cas $e_1 \neq 0$: Γ est une ***parabole***. L'équation de Γ s'écrit

$$\lambda \left(x_1 + \frac{d_1}{\lambda} \right)^2 + 2e_1 \left(y_1 - \frac{f_1'}{2e_1} \right) = 0.$$

En prenant $\Omega = (-\frac{d_1}{\lambda}, \frac{f_1'}{2e_1})$ comme nouvelle origine du repère, l'équation de Γ devient :

$$\lambda x_2^2 + 2e_1 y_2 = 0.$$

3.5.3 Bilan de la classification

Proposition 3.5.7. 1) *Si* $\det A = ac - b^2 > 0$, *alors* Γ *est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.*
2) *Si* $\det A = ac - b^2 < 0$, *alors* Γ *est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.*
3) *Si* $\det A = ac - b^2 = 0$, *alors* Γ *est une parabole, la réunion de deux droites parallèles distinctes, une droite ou l'ensemble vide.*

3.6 Quadriques

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.6.1 Généralités

On muni $\mathbb{R}^3$ d'une base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, et on se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni du repère $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ où O est le point 0_E de l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.6.1. *On appelle* **quadrique** *de* $\mathbb{R}^3$ *toute surface* Σ *admettant dans le repère* $\mathcal{R}$ *une équation de la forme* $F(x, y, z) = 0$, *où*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2gx + 2hy + 2iz + j,$$

avec $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$ *tels que* $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. *Autrement dit, une surface* Σ *est une quadrique de* $\mathbb{R}^3$ *s'il existe une forme quadratique* Q, *de matrice* $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$ *dans la base* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, *et une forme linéaire* ℓ *sur* $\mathbb{R}^3$, *définie par* $\ell(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = gx + hy + iz$ *pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *telles que*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = Q(x, y, z) + \ell(x, y, z) + j.$$

Remarques. 1) Posons $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. L'équation de la quadrique s'écrit également sous forme matricielle :

$${}^tXAX + 2LX + j = 0.$$

2) Le terme ${}^tXAX = ax^2 + by^2 + cz^2$ est appelé la ***partie quadratique*** de l'équation F de la quadrique et le terme $2L = 2gx + 2hy + 2iz$ est appelé la ***partie linéaire*** de l'équation F de la quadrique.
3) Comme pour les coniques, si F est une équation de la quadrique Σ, alors λF est encore une équation de la quadrique Σ pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4) Le cône isotrope d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ est en particulier une quadrique.

Soit désormais Σ une quadrique de $\mathbb{R}^2$ d'équation F.

Proposition 3.6.2. *Le point* (x_0, y_0, z_0) *est un centre de symétrie de la conique* Σ *si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{soit encore} \quad \left\{ \begin{array}{l} ax_0 + dy_0 + fz_0 = -g \\ dx_0 + by_0 + ez_0 = -h \\ fx_0 + ey_0 + cz_0 = -i \end{array} \right. \quad \textit{ou encore} \quad A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \\ -h \\ -i \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.6.3. *La quadrique Σ admet un unique centre de symétrie si et seulement si* $\det A \neq 0$. *Dans ce cas, on dit que Σ est une* **quadrique à centre**.

3.6.2 Méthode de réduction

1) Réduction de la partie quadratique

La matrice A étant symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale $P \in O(3)$ telle que

$$ {}^tPA\,P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu; \nu \in \mathbb{R}. $$

La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale de vecteurs propres $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de $\mathbb{R}^3$. Dans le repère $(O, (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}))$, l'équation de la quadrique ne présente plus de termes en xy, yz et zx.

1) Réduction de la partie linéaire

On effectue ensuite un changement d'origine de façon à supprimer certains termes de la partie linéaire en utilisant des factorisations de la forme :

$$ ax^2 + 2bx = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a}. $$

On est alors en présence d'une quadrique dont l'équation est réduite.

3.6.3 Quadriques de référence

Pour reconnaitre une quadrique de « référence », on s'interesse aux *sections planes de la quadrique* c'est-à-dire aux intersections de la quadrique avec des plans : on peut montrer qu'il s'agit de coniques.

- **Ellipsoïde :** quadrique Σ d'équation

$$ \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad \text{avec } a, b, c > 0. $$

- **Hyperboloïde à une nappe :** quadrique Σ d'équation

$$ \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =} \qquad \text{avec } a, b, c > 0. $$

- **Hyperboloïde à deux nappes :** quadrique Σ d'équation

$$ \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1} \qquad \text{avec } a, b, c > 0. $$

- **Paraboloïde elliptique :** quadrique Σ d'équation

$$ \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z} \qquad \text{avec } a, b > 0. $$

- **Paraboloïde hyperbolique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z} \qquad \text{avec } a, b > 0.$$

- **Cône :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0} \qquad \text{avec } a, b, c > 0.$$

- **Cylindre elliptique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{avec } a, b > 0.$$

- **Cylindre hyperbolique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{avec } a, b > 0.$$

- **Cylindre parabolique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{x^2 = 2ay} \qquad \text{avec } a > 0.$$

♦ **Exercice 44.** Pour chaque quadrique de référence Σ, décrire l'intersection de Σ avec un plan (sécant à Σ) : quelle est la nature de cette conique ? Discuter les différents cas.

Remarque. Pour $a = b$, les quadriques suivantes sont des *surfaces de révolution* d'axe $\Omega + \mathbb{R}\mathbf{k}$:
- l'ellipsoïde ;
- l'hyperboloïde à une nappe ;
- l'hyperboloïde à deyx nappes ;
- le paraboloïde elliptique ;
- le cône ;
- le cylindre elliptique.

Exercice 33. Déterminer la nature des quadriques d'équations :
a) $11x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 16xy - 4xz - 20yz + 30x - 66y + 24z + 45 = 0$;
b) $2(x + y)(y - z) - 3x = 0$;
c) $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{6}xy + 2\sqrt{2}xy + 2\sqrt{3}yz + \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y + 4z + 1 = 0$.

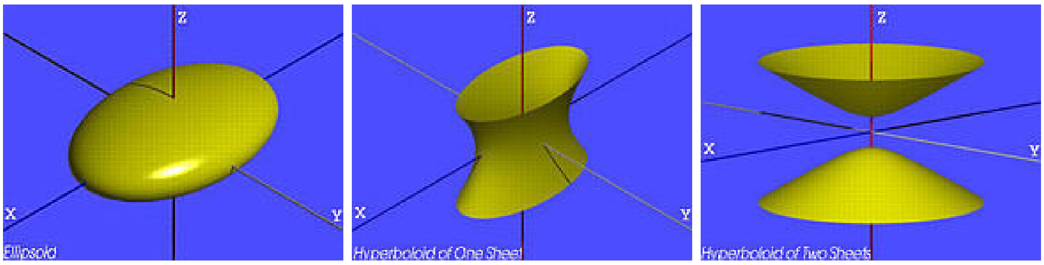

FIGURE 3.1 – Ellipsoide, hyperboloïde à une nappe et hyperboloïde à deux nappes

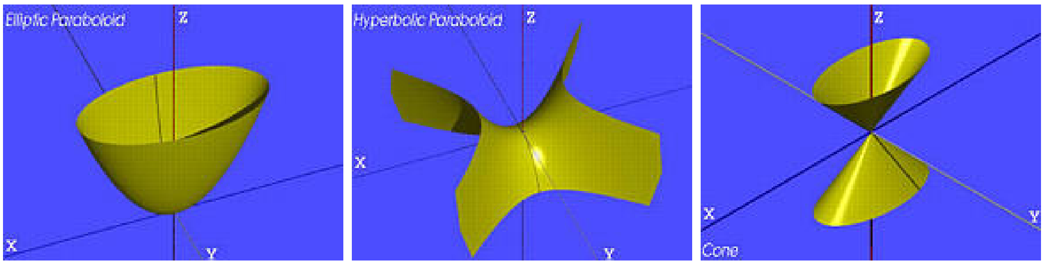

FIGURE 3.2 – paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique et cône

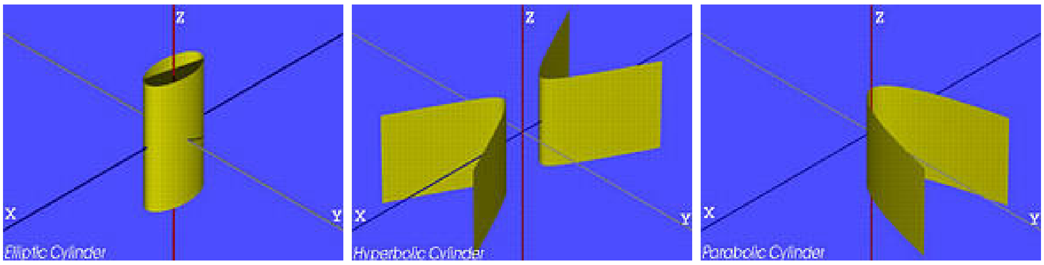

FIGURE 3.3 – Cylindre elliptique, cylindre hyperbolique et cylindre parabolique

Chapitre 4

Espaces hermitiens

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont, sauf mention du contraire, des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Ce chapitre est important, par exemple, dans l'étude des séries de Fourier.

4.1 Formes sesquilinéaires

Définition 4.1.1. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f\colon E\times E \to \mathbb{C}$. On dit que f est une* **forme sesquilinéaire** *sur E si f vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout $a \in E$, l'application $E \to \mathbb{C}$, $y \to f(a,y)$ est linéaire, i.e.,*

$$\forall\,(u,v) \in E \times E,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{C}, \quad f(a, u+\lambda v) = f(a,u) + \lambda f(a,v).$$

En d'autres termes, pour tout $a \in E$, l'application $y \to f(a,y)$ est une forme linéaire sur E.

(ii) *Pour tout $b \in E$, l'application $E \to \mathbb{C}$, $x \to f(x,b)$ est* **semi-linéaire***, i.e.,*

$$\forall\,(x,y) \in E \times E,\ \forall\,\alpha \in \mathbb{C}, \quad f(x+\alpha y, b) = f(x,b) + \overline{\alpha} f(y,b).$$

Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$. Compte tenu des définitions, dire que f est sesquilinéaire signifie que pour tous $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et tous $x, y, u, v \in E$,

$$f(\alpha x + \beta y, \lambda u + \mu v) = \overline{\alpha}\lambda f(x,u) + \overline{\alpha}\mu f(x,v) + \overline{\beta}\lambda f(y,u) + \overline{\beta}\mu f(y,v).$$

⚠ **Attention** : si f est sesquilinéaire, l'application $x \to f(x,b)$ n'est pas une forme linéaire en général ; elle l'est seulement si l'application $x \to f(x,b)$ est nulle.

Exemples. 1) Soient φ et ψ des formes linéaires sur E. L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ (x,y) \to \overline{\varphi(x)}\psi(y)$$

est une forme sesquilinéaire sur E.

2) Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ (f,g) \to \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,dt$$

est une forme sesquilinéaire sur E.
3) Supposons E de dimension finie n, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Si $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ sont des vecteurs de E, posons :

$$f(x, y) = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \cdots + \overline{\lambda_p}\mu_p.$$

On obtient ainsi une forme sesquilinéaire sur E.

♦ **Exercice 45.** Vérifier dans chacun des exemples précédents que f est en effet une forme sesquilinéaire sur E.

Supposons E de dimension finie $n > 0$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f une forme sesquilinéaire. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, posons $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, et soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est la ***matrice de f dans la base*** $\mathcal{E}$, et on écrit $A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{E})$.
Soient $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathcal{E}$.

♦ **Exercice 46.** Écrire $f(x, y)$ en fonction des matrices A, X et Y.

4.2 Produit scalaire hermitien

Définition 4.2.1. *Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire sur E. On dit que f est* **hermitienne** *si pour tous $x, y \in E$,*

$$f(y, x) = \overline{f(x, y)}.$$

> ***Charles Hermite*** *(24 décembre 1822 à Dieuze – 14 janvier 1901 à Paris) est un mathématicien français. Ses travaux concernent surtout la théorie des nombres, les formes quadratiques, les polynômes orthogonaux, les fonctions elliptiques et les équations différentielles.*

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note A^* la matrice ${}^t\bar{A}$, i.e.,

$$A^* = {}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{1,1}} & \cdots & \overline{a_{n,1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1,n}} & \cdots & \overline{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

La notation sera justifiée dans la suite du chapitre.

♦ **Exercice 47.** Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire sur E.
1) Montrer que f est hermitienne si et seulement si $A = A^*$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est ***hermitienne*** si $A = A^*$. On note $\mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n.
2) Vérifier que $\mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2. Est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Remarque. Si f est une forme sesquilinéaire hermitienne sur l'espace E, alors $f(x, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$ (à justifier).

La remarque justifie la définition suivante :

Définition 4.2.2. *Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire hermitienne sur E.*

(i) *On dit que f est* **positive** *(resp.* **négative***) si $f(x,x) \geqslant 0$ (resp. $f(x,x) \leqslant 0$) pour tout $x \in E$.*

(ii) *On dit que f est* **définie positive** *(resp.* **définie négative***) si elle est positive (resp. négative) et si $f(x,x) = 0$ si et seulement si x est nul.*

♦ **Exercice 48.** Reprendre les exemples de l'exercice 45. Parmi eux, quels sont ceux pour lesquels f est positive ? définie positive ?

Définition 4.2.3. *On appelle* **produit scalaire (hermitien)** *sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive. Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un* **espace (vectoriel) hermitien***.*

4.3 Premières propriétés

Dans la suite de ce chapitre, E est un espace vectoriel hermitien. Si x, y sont des vecteurs de E, on note $(x \,|\, y)$ le produit scalaire de x et de y (dans cet ordre). L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ \ (x,y) \to (x|y)$$

est donc une forme sesquilinéaire hermitienne et définie positive sur E. On a $(x \,|\, x) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $x \in E$. On peut donc considérer :

$$\|x\| = \sqrt{(x \,|\, x)}.$$

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 1.3.1 :

Proposition 4.3.1. *Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :*

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ *(homogénéité) ;*

(ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \,|\, y) + \|y\|^2$ *;*

(iii) $|(x \,|\, y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz) ;*

(iv) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire) ;*

(v) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$ *;*

(vi) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ *(identité de la médiane).*

⚠ **Attention** : ici, $|\cdot|$ désigne le module. D'autre part, on notera dans (ii) que le terme le terme « $2(x \,|\, y)$ » est remplacé ici par « $2\,\mathrm{Re}\,(x \,|\, y)$ ».

Remarque. On dit que $x \in E$ est ***unitaire*** si $\|x\| = 1$.

On définit exactement comme dans le cas euclidien la notion de ***vecteurs orthogonaux***, d'***orthogonal d'une partie***, de ***familles orthogonales/orthonormales***, etc., et le Théorème de Pythagore (cf. Théorème 1.3.6) reste valable pour les espaces hermitiens.
Le théorème suivant se démontre comme le Théorème 1.4.1, à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Théorème 4.3.2 (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une base $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E possédant les propriétés suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est une famille orthonormée ;*
(ii) *pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_j) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$.*

Corollaire 4.3.3. *Si E est un espace hermitien de dimension finie non nulle, il possède des bases orthonormées.*

Supposons E de dimension finie $n > 0$, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathcal{E}$. On a vu que

$$(x \,|\, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \mu_j (e_i | e_j).$$

La base $\mathcal{E}$ étant orthonormée, il vient donc :

$$(x \,|\, y) = \overline{\lambda_1} \mu_1 + \cdots + \overline{\lambda_n} \mu_n = X^* Y = \overline{Y^* X}.$$

♦ **Exercice 49.** Justifier ces assertions.

Comme pour les espaces euclidiens, on peut énoncer le théorème « de la base orthonormée incomplète » :

Théorème 4.3.4. *Soit E un espace hermitien de dimension finie non nulle n.*
(i) *Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$, avec $1 \leqslant p < n$, une famille orthonormée de vecteurs de E. Il existe $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.*
(ii) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :*

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

En particulier :

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

4.4 Adjoint d'un endomorphisme

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$.

Théorème 4.4.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme de E, noté u^*, et appelé l'*adjoint *de u, tel que pour tous $x, y \in E$,*

$$(u(x) \,|\, y) = (x \,|\, u^*(y)).$$

Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée *de E, on a :*

$$\mathrm{Mat}(u^*; \mathcal{E}) = (\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}))^*.$$

La dernière assertion justifie, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la notation $A^* = {}^t\bar{A}$.

♦ **Exercice 50.** Démontrer ce théorème.

Proposition 4.4.1. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors :*
(i) *$(\lambda u + \mu v)^* = \overline{\lambda} u^* + \overline{\mu} v^*$;*
(ii) *$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;*
(iii) *$(u^*)^* = u$;*
(iv) *on a $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ et, si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.*

♦ **Exercice 51.** 1) Démontrer la proposition.
2) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que$F^{\perp}$ est stable par u^*.

4.5 Endomorphismes unitaires

Dans ce paragraphe, n est un entier strictement positif. On suppose que $\mathbb{C}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) est muni de son produit scalaire ***canonique***, c'est-à-dire que

$$(x \mid y) = \overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_n}y_n$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Définition 4.5.1. *Une matrice $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite* **unitaire** *si elle est inversible et si $\Omega^{-1} = \Omega^*$.*

♦ **Exercice 52.** 1) Montrer que l'ensemble des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{C})$. On le note $U(n)$, et on dit que c'est le ***groupe unitaire de degré*** n.

Si $\Omega \in U(n)$, de $\Omega^{-1} = \Omega^*$, on déduit $|\det \Omega|^2 = 1$, donc $\det \Omega \in \mathbb{U}$, où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est l'ensemble des complexes de module 1. On pose :

$$SU(n) = \{\Omega \in U(n) \mid \det \Omega = 1\}.$$

2) Montrer que l'ensemble $SU(n)$ est un sous-groupe de $U(n)$, appelé le ***groupe spécial unitaire de degré*** n.

Théorème-Définition 4.5.1. *Soient E un espace hermitien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\|u(x)\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in E$;

(ii) $(u(x) \mid u(y)) = (x|y)$ *pour tous* $x, y \in E$;

(iii) $u \in GL(E)$ *et* $u^* = u^{-1}$;

(iv) *il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in U(n)$;

(v) *pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, on a* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in U(n)$;

(vi) *il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E ;*

(vii) *pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que u est un endomorphisme **unitaire** *de E.*

Les endomorphismes unitaires sont ainsi les analogues des endormorphismes orthogonaux pour les espaces hermitiens.

Corollaire 4.5.2. *Si $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Ω est une matrice unitaire ;*

(ii) *il existe des bases orthonormées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E telles que Ω soit la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$.*

On note $U(E)$ l'ensemble des endomorphismes unitaires de E. C'est un sous-groupe de $GL(E)$. On dit que c'est le ***groupe unitaire*** de E.

Si $u \in U(E)$, on a $\det u \in \mathbb{U}$. On pose :

$$SU(E) = \{u \in U(E) \,;\, \det u = 1\}.$$

C'est un sous-groupe de $U(E)$, appelé le ***groupe spécial unitaire*** de E.

La proposition suivante justifie le terme « unitaire » pour les endomorphismes unitaires :

Proposition 4.5.3. *Soit u un endomorphisme unitaire de E.*

(i) *Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.*

(ii) *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de u, alors $\lambda \in \mathbb{U}$.*

♦ **Exercice 53.** Démontrer cette proposition.

Le théorème suivant diffère très fondamentalement du cas euclidien :

Théorème 4.5.1. *Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie et $u \in U(E)$. Il existe une base* orthonormée *de E formée de vecteurs propres pour u, et les valeurs propres de u sont de module* 1.

⚠ **Attention** : dans le cas euclidien, un endormorphisme orthogonal n'est pas diagonalisable en général : penser aux rotations en dimension 2 qui ne sont que très rarement diagonalisables ! En effet, la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\theta = 0 \mod \pi$.

4.6 Endomorphismes hermitiens

Dans toute la suite, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension finie n non nulle.

Définition 4.6.1. *Un endomorphisme u de E est dit* **auto-adjoint** *ou* **hermitien** *s'il vérifie $u = u^*$.*

On note $\mathrm{Her}(E)$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens de E ; c'est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Her}(E) = n^2$ (cf. exercice 47).

Théorème 4.6.1. *Soient E un espace hermitien de dimension finie n non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$u \in \mathrm{Her}(E)$;*

(ii) *il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$;*

(iii) *pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, on a $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$;*

(iv) *on a $(u(x) \,|\, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$;*

(v) *il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u, et les valeurs propres de u sont réelles.*

Remarques. 1) Tout comme le Théorème fondamental dans le cas euclidien (cf. Théorème 1.7.1), le théorème précédent est fondamental ; en particulier, il faut systématiquement penser à appliquer l'équivalence (i) ⇔ (v) quand on étudie un problème concernant les endomorphismes hermitiens. La démonstration est cependant nettement plus simple dans le cas complexe grâce au Théorème de d'Alembert-Gauss (cf. exercice ci-dessous). Nous réservons donc l'appellation « Théorème fondamental » pour le cas réel.
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le fait que E possède une base orthonormée formée de vecteurs propres pour u n'implique pas que u soit hermitien.

♦ **Exercice 54.** Démontrer ce théorème.

♦ **Exercice 55.** 1) Soit $u \in \mathrm{Her}(E)$. Montrer

$$E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u \ , \ \mathrm{Im}\, u = (\ker u)^{\perp}.$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si il existe $U \in U(n)$ telle que U^*AU soit diagonale à élément réels.

Exercice 34 (Théorème de Courant-Fischer)**.** ⋆ Soient E un espace hermitien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathrm{Her}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Montrer :

$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}; x \in E \setminus \{0\}\right\}, \qquad \lambda_n = \max\left\{\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}; x \in E \setminus \{0\}\right\}.$$

4.7 Endomorphismes hermitiens positifs

Soit E un espace hermitien. D'après le théorème précédent, les notations suivantes sont légitimes :

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Her}^+(E) & = & \{u \in \mathrm{Her}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+\}; \\ \mathrm{Her}^-(E) & = & \{u \in \mathrm{Her}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_-\}; \\ \mathrm{Her}^{++}(E) & = & \{u \in \mathrm{Her}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+^*\}; \\ \mathrm{Her}^{--}(E) & = & \{u \in \mathrm{Her}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_-^*\}. \end{array}$$

Un élément de $\mathrm{Her}^+(E)$ (resp. $\mathrm{Her}^-(E)$) est dit ***hermitien positif*** (resp. ***hermitien négatif***), et un élément de $\mathrm{Her}^{++}(E)$ (resp. $\mathrm{Her}^{--}(E)$) est dit ***hermitien défini positif*** (resp. ***hermitien défini négatif***).

On adopte des notations et une terminologie analogue pour les matrices. Ainsi, $A \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ est dite ***hermitienne positive*** si $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Proposition 4.7.1. *Soient E un espace hermitien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u \in \mathrm{Her}^+(E)$;

(ii) $(u(x) \mid x) \in \mathbb{R}_+$ *pour tout* $x \in E$;

(iii) *il existe* $v \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u = v \circ v^*$;

(iv) *il existe* $w \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u = w^* \circ w$.

♦ **Exercice 56.** Démontrer cette proposition.

Exercice 35. Soient E un espace hermitien de dimension $n > 0$ et $u, v \in \mathrm{Her}^+(E)$.
1) Montrer que si $x \in E$, alors $x \in \ker u$ si et seulement si $(u(x) \mid x) = 0$.
2) On a $\ker(u + v) = \ker u \cap \ker v$ et $\mathrm{Im}\,(u + v) = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.
3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $w \in \mathrm{Her}^+(E)$ tel que $w^k = u$.

Exercice 36. ⋆ Soient $A \in \mathrm{Her}_n^{++}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^*AP = I_n$ et telle que P^*BP soit diagonale.

Exercice 37. Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) Montrer que $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^{\perp}$, $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$.
2) Prouver que $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont hermitiens positifs.
3) Montrer que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\,(u \circ u^*)$, $\ker u = \ker(u^* \circ u)$.

Exercice 38. * Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$. On dit qu'un endomorphisme v de E est ***normal*** s'il commute avec son adjoint, i.e., $v \circ v^* = v^* \circ v$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est normal ;

(ii) $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ pour tout $x \in E$;

(iii) il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u ;

(iv) il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$;

(v) tout sous-espace de E stable par u est stable par u^* ;

(vi) pour tout sous-espace F de E stable par u, $F^\perp$ est stable par u ;

(vii) on a $\mathrm{Tr}\,(u \circ u^*) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.

On retiendra en particulier qu'un endomrophisme normal d'un espace hermitien est diagonalisable dans une base orthonormée de E (ce que nous avions déjà observé pour les endomorphismes unitaires et hermitiens).

⚠ **Attention** : ce résultat est faux dans le cas euclidien. De nouveau, penser aux rotations qui sont très rarement diagonalisables sur $\mathbb{R}$ (a fortiori dans une base orthonormée) !