Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Journal of Algebra 303 (2006) 382–406
JOURNAL OF Algebra
www.elsevier.com/locate/jalgebra

Indice et décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle

Anne Moreau

Université Paris 7, Institut de Mathématiques de Jussieu, Théorie des groupes, Case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

Reçu le 22 juin 2005

Disponible sur Internet le 18 octobre 2005

Communiqué par J.T. Stafford

Résumé

La décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \hat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ issue de la décomposition de Cartan $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ d'une algèbre de Lie semi-simple réelle permet d'écrire $\mathfrak{g}_0$ sous la forme $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$, avec $\mathfrak{b}_0 = \hat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$. Dans cet article, on donne une formule explicite pour l'indice, $\operatorname{ind}\mathfrak{b}$, de $\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b}$ est le complexifié de $\mathfrak{b}_0$. Précisément, on montre le résultat suivant :

$$\operatorname{ind}\mathfrak{b} = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k},$$

où $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ sont respectivement les complexifiés de $\mathfrak{g}_0$ et de $\mathfrak{k}_0$. Nous répondons en particulier de façon positive à une question posée par Raïs dans [M. Raïs, Notes sur l'indice des algèbres de Lie, preprint, 2004] : l'indice est-il additif dans la décomposition suivante : $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$? La démonstration repose sur la construction de Kostant et utilise les transformations de Cayley. On donne en outre une caractérisation des algèbres de Lie semi-simples réelles $\mathfrak{g}_0$ pour lesquelles la sous-algèbre $\mathfrak{b}_0$ possède une forme stable.

Abstract

The index and the Cartan decomposition of a real semisimple Lie algebra. The Iwasawa decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 \oplus \hat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ of the real semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ comes from its Cartan decomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$. Then we get $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$ where $\mathfrak{b}_0 = \hat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$. In this note, we establish an

Adresse e-mail : moreaua@math.jussieu.fr.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2005.09.016

explicite formula for the index, ind $\mathfrak{b}$, of $\mathfrak{b}$, where $\mathfrak{b}$ is the complexification of $\mathfrak{b}_0$. More precisely, we show the following result:

$$\operatorname{ind}\mathfrak{b} = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k},$$

where $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{k}$ are respectively the complexifications of $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{k}_0$. In particular, this answers positively a question by Raïs in [M. Raïs, Notes sur l'indice des algèbres de Lie, preprint, 2004]: is the index additive for the following decomposition: $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$? In the proof, we use the Kostant construction and the Cayley transforms. We also give a characterization of the semisimple real Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ whose subalgebra $\mathfrak{b}_0$ has a stable form.

Introduction

Soit $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple réelle et soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. On note θ l'involution de Cartan correspondante. Soit $\hat{\mathfrak{a}}_0$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}_0$. Pour λ dans $\hat{\mathfrak{a}}_0^*$, on pose

$$\mathfrak{g}_0^\lambda = \left\{X \in \mathfrak{g}_0 \mid [H, X] = \lambda(H)X \ \forall H \in \hat{\mathfrak{a}}_0\right\}.$$

L'ensemble Σ constitué des formes lineaires non nulles λ sur $\hat{\mathfrak{a}}_0$ pour lesquelles le sous-espace $\mathfrak{g}_0^\lambda$ est non nul est un système de racines dans $\hat{\mathfrak{a}}_0^*$. Soit Σ_+ un système de racines positives de Σ. On pose

$$\mathfrak{n}_0 = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_0^\lambda,$$

de sorte qu'on obtient la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}_0$ suivante :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \hat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0.$$

En posant $\mathfrak{b}_0 = \hat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$, on obtient la décomposition :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0.$$

Dans tout ce qui suit, on note sans l'indice 0 les complexifiés des algèbres de Lie réelles notées, elles, avec un indice 0. Ainsi, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k}_0)^{\mathbb{C}}$, $\hat{\mathfrak{a}} = (\hat{\mathfrak{a}}_0)^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_0)^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_0)^{\mathbb{C}}$, etc. L'indice d'une algèbre de Lie $\mathfrak{q}$, noté $\operatorname{ind}\mathfrak{q}$, est la codimension minimale de ses orbites coadjointes. Si $\mathfrak{q}$ est le complexifié d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{q}_0$, alors on a : $\operatorname{ind}\mathfrak{q} = \operatorname{ind}\mathfrak{q}_0$. Le but de cet article est de donner une formule explicite pour l'indice de $\mathfrak{b}$. Précisément, on montre la relation suivante :

$$\operatorname{ind}\mathfrak{b} = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k}. \tag{1}$$

Dans [6], Raïs s'intéresse à des exemples d'additivité de l'indice. En particulier, à propos de la décomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{b}_0$, il se demande si la relation

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g}_0 = \operatorname{ind} \mathfrak{k}_0 + \operatorname{ind} \mathfrak{b}_0 \tag{2}$$

a lieu. Puisque les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ sont réductives, leur indice est égal à leur rang. Ainsi, la relation (2) est satisfaite si, et seulement si, la relation (1) est satisfaite. On répond ici de façon positive à sa question.

On donne dans la première partie des précisions concernant la structure de $\mathfrak{g}_0$. On rappelle dans la deuxième partie la construction « en cascade » de Kostant. Cette construction intervient dans [4] pour la recherche de formes linéaires stables dans une sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. Notons qu'ici $\mathfrak{b}$ n'est pas en général une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. La troisième partie utilise les transformations de Cayley pour établir une formule qui intervient dans la suite. On prouve dans la partie 4 les relations (1) et (2). La construction de Kostant intervient dans la démonstration pour définir une forme régulière sur $\mathfrak{b}$ et pour définir une forme stable sur une certaine sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{b}$. Parmi les algèbres de Lie réelles semi-simples $\mathfrak{g}_0$, on caractérise de plus dans cette partie, celles pour lesquelles la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ possède une forme stable. La dernière partie repose sur la classification des algèbres de Lie simples réelles. Pour chaque type d'algèbres de Lie simples réelles, on calcule explicitement l'indice de $\mathfrak{b}$ et on précise si la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ possède ou non une forme stable.

1. Quelques précisions sur la structure de $\mathfrak{g}_0$

On regroupe dans cette partie quelques résultats concernant la structure de $\mathfrak{g}_0$. On trouve les preuves de ces résultats dans [2,3]. Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, stable par θ. Puisque $\mathfrak{h}_0$ est stable, elle s'écrit sous la forme

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{t}_0,$$

avec $\mathfrak{a}_0$ dans $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{t}_0$ dans $\mathfrak{k}_0$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et on note Δ le système de racines associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Les éléments de Δ sont à valeurs réelles sur $\mathfrak{a}_0 \oplus i\mathfrak{t}_0$. On choisit un système de racines positives Δ_+ dans Δ en prenant $\mathfrak{a}_0$ avant $i\mathfrak{t}_0$ pour former l'ordre lexicographique sur $(\mathfrak{a}_0 \oplus i\mathfrak{t}_0)^*$. Ainsi, pour α une racine de Δ non nulle sur $\mathfrak{a}_0$, la positivité de α ne dépend que de sa restriction à $\mathfrak{a}_0$. On note Π la base de Δ_+.

On note encore θ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de θ à $\mathfrak{g}$. La tranposée de θ sera également notée θ. On note Δ' (respectivement Δ'') l'ensemble des racines de Δ qui s'annulent sur $\mathfrak{a}$ (respectivement qui ne s'annulent pas sur $\mathfrak{a}$). On a $\theta(\Delta) = \Delta$ et Δ' est l'ensemble des éléments de Δ invariants par θ. On pose $\Delta''_+ = \Delta'' \cap \Delta_+$, $\Delta''_- = \Delta'' \cap (-\Delta_+)$. On a $\theta(\Delta''_+) = \Delta''_-$ et $(\Delta''_+ + \Delta''_+) \cap \Delta \subset \Delta''_+$.

Pour chaque élément α de Δ, on fixe X_α un élément non nul de $\mathfrak{g}^\alpha$ et on note H_α l'unique élément de $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$. Une racine est dite *réelle* si elle prend des valeurs réelles sur $\mathfrak{h}_0$ (i.e. si elle s'annule sur $\mathfrak{t}_0$), *imaginaire* si elle prend des valeurs imaginaires sur $\mathfrak{h}_0$ (i.e. si elle s'annule sur $\mathfrak{a}_0$), et *complexe* sinon. Le lemme suivant est connu et ne présente pas de difficulté :

Lemme 1.1.

(i) *Pour α dans Δ, on a* : $\theta X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\theta\alpha}$,
(ii) *Pour α dans Δ, on a* : $\theta H_\alpha = H_{\theta\alpha}$,
(iii) *Soit α une racine de Δ. On a les équivalences suivantes* :

$$\alpha \textit{ est réelle} \quad \Leftrightarrow \quad \theta\alpha = -\alpha \quad \Leftrightarrow \quad H_\alpha \in \mathfrak{a},$$
$$\alpha \textit{ est imaginaire} \quad \Leftrightarrow \quad \theta\alpha = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad H_\alpha \in \mathfrak{t}.$$

La *dimension compacte* est par définition la dimension, $\dim \mathfrak{t}_0$, de l'intersection de $\mathfrak{h}_0$ avec $\mathfrak{k}_0$ et la *dimension non-compacte* est par définition la dimension, $\dim \mathfrak{a}_0$, de l'intersection de $\mathfrak{h}_0$ avec $\mathfrak{p}_0$. On dit que $\mathfrak{h}_0$ est *maximalement compacte* si la dimension compacte est la plus grande possible et on dit que $\mathfrak{h}_0$ est *maximalement non-compacte* si la dimension non-compacte est la plus grande possible.

Remarque 1. Il se peut que $\mathfrak{h}_0$ soit à la fois maximalement compacte et maximalement non-compacte. C'est le cas si $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie simple complexe, ou si $\mathfrak{g}_0$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ ou à l'algèbre de Lie simple exceptionelle EIV, comme on peut le voir à l'aide du tableau 2.

Si α est une racine imaginaire de Δ, alors $\theta\alpha = \alpha$ donc $\mathfrak{g}^\alpha$ est stable par θ, et on a $\mathfrak{g}^\alpha = (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{p})$. Puisque $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1, on a $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{k}$ ou $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. On dit que la racine imaginaire α est *compacte* si $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{k}$ et *non-compacte* si $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. Le résultat suivant est démontré en [3, Proposition 6.70].

Lemme 1.2. *Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ. Alors, il n'existe pas de racines imaginaires non-compactes si, et seulement si, $\mathfrak{h}_0$ est maximalement non-compact et, il n'existe pas de racines réelles si, et seulement si, $\mathfrak{h}_0$ est maximalement compact.*

Soit $\hat{\mathfrak{t}}_0$ un sous-espace abélien maximal du centralisateur $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}_0}(\hat{\mathfrak{a}}_0)$ de $\hat{\mathfrak{a}}_0$ dans $\mathfrak{k}_0$. Alors $\hat{\mathfrak{h}}_0 = \hat{\mathfrak{a}}_0 \oplus \hat{\mathfrak{t}}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ stable par θ qui est maximalement non-compacte. On surmonte d'un chapeau les ensembles définis précédemment relatifs à $\hat{\mathfrak{h}}$. On a :

$$(\mathfrak{g}_0)^\lambda = \mathfrak{g}_0 \cap \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+ \\ \alpha_{|\hat{\mathfrak{a}}} = \lambda}} \mathfrak{g}^\alpha \right)$$

et

$$\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_0)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+} \mathfrak{g}^\alpha.$$

D'où

$$\mathfrak{b} = \hat{\mathfrak{a}} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}''_+} \mathfrak{g}^\alpha \right).$$

On termine par un lemme :

Lemme 1.3. *L'ensemble* $\widehat{\Delta}'_{|\hat{\mathfrak{t}}}$ *est le système de racines associé au couple* $(\mathfrak{m}, \hat{\mathfrak{t}})$. *Si* α *appartient à* $\widehat{\Delta}'$, *on a* $\mathfrak{m}^{\alpha_{|\hat{\mathfrak{t}}}} = \mathfrak{g}^\alpha$. *Enfin, on a* :

$$\mathfrak{m} = \hat{\mathfrak{t}} \oplus \left({\bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}}}' \mathfrak{g}^\alpha \right).$$

2. Définition et quelques propriétés de la construction « en cascade » de Kostant

Dans toute cette partie, $\mathfrak{h}_0$ désigne une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ et on reprend les notations de la partie précédente.

On reprend les notations de [4,5]. Si λ appartient à $\mathfrak{h}^*$, on écrit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ pour $\lambda(H_\alpha)$. Pour toute partie S de Π, on note Δ^S le système de racines engendré par S, et Δ^S_+ le système de racines positives correspondant. Si S est une partie connexe de Π, le système de racines Δ^S est irreductible et on note ϵ_S la plus grande racine de Δ^S_+.

Supposons que S est une partie connexe de Π. Les résultats qui suivent vont intervenir à plusieurs reprises dans la suite ; ils sont démontrés dans [1] et rappelés dans [4,5]. Pour toute racine α de $\Delta^S_+ \setminus \{\epsilon_S\}$, on a : $\langle \alpha, {\epsilon_S}^\vee \rangle \in \{0, 1\}$. Si T est l'ensemble des racines α de Δ^S qui vérifient $\langle \alpha, {\epsilon_S}^\vee \rangle = 0$, alors T est un système de racines dans le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ qu'il engendre et l'ensemble $\{\alpha \in S \mid \langle \alpha, {\epsilon_S}^\vee \rangle = 0\}$ forme une base de T. De plus, si α appartient à $T \cap \Delta^S_+$, alors on a : $\alpha \pm \epsilon_S \notin \Delta$. Ainsi, pour $\alpha \neq \epsilon_S$, les racines α et ϵ_S sont fortement orthogonales.

On rappelle la construction et quelques propriétés d'un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales dans Δ. Par récurrence sur le cardinal de S, on définit un sous-ensemble $\mathcal{K}(S)$ de l'ensemble des parties de Π de la manière suivante :

(a) $\mathcal{K}(\emptyset) = \emptyset$;
(b) Si $S_1, \ldots, S_r$ sont les composantes connexes de S, on a :

$$\mathcal{K}(S) = \mathcal{K}(S_1) \cup \cdots \cup \mathcal{K}(S_r);$$

(c) Si S est connexe, alors :

$$\mathcal{K}(S) = \{S\} \cup \mathcal{K}\big(\big\{\alpha \in S \mid \big\langle \alpha, \epsilon_S^\vee \big\rangle = 0\big\}\big).$$

Les deux lemmes suivants concernent cette construction et sont utiles pour la suite. Ils sont énoncés dans [4,5].

Lemme 2.1.

(i) *Tout élément K de $\mathcal{K}(S)$ est une partie connexe de Π.*
(ii) *Si K, K' appartiennent à $\mathcal{K}(S)$, alors ou bien $K \subset K'$, ou bien $K' \subset K$, ou bien K et K' sont des parties disjointes de S telles que $\alpha + \beta$ n'appartient pas à Δ, pour α dans Δ^K et β dans $\Delta^{K'}$.*
(iii) *Si K et K' sont des éléments distincts de $\mathcal{K}(S)$, alors ϵ_K et $\epsilon_{K'}$ sont fortement orthogonales.*

Si $K \in \mathcal{K}(\Pi)$, on pose :

$$\Gamma^K = \{\alpha \in \Delta^K \mid \langle \alpha, \epsilon_K^\vee \rangle > 0\}, \qquad \Gamma_0^K = \Gamma^K \setminus \{\epsilon_K\}, \qquad \mathcal{H}_K = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma^K} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Lemme 2.2. *Soit K, K' dans $\mathcal{K}(\Pi)$, α, β dans Γ^K et γ dans $\Gamma^{K'}$.*

(i) *On a $\Gamma^K = \Delta_+^K \setminus \{\delta \in \Delta_+^K \mid \langle \delta, \epsilon_K^\vee \rangle = 0\}$.*
(ii) *L'ensemble Δ_+ est la réunion disjointe des $\Gamma^{K''}$ pour K'' dans $\mathcal{K}(\Pi)$, et $\mathcal{H}_K$ est une algèbre de Heisenberg de centre $\mathfrak{g}^{\epsilon_K}$.*
(iii) *Si $\alpha + \beta$ appartient à Δ, alors $\alpha + \beta = \epsilon_K$.*
(iv) *Si $\alpha + \gamma$ appartient à Δ, alors ou bien $K \subset K'$ et $\alpha + \gamma$ appartient à $\Gamma^{K'}$, ou bien $K' \subset K$ et $\alpha + \gamma$ appartient à Γ^K.*

Remarque 2. Notons que si K est un élément de $\mathcal{K}(\Pi)$, alors pour toute racine α de Γ_0^K, il existe une unique racine β de Γ_0^K telle que $\alpha + \beta = \epsilon_K$ et on a :

$$\langle \alpha, {\epsilon_K}^\vee \rangle = \langle \beta, {\epsilon_K}^\vee \rangle = 1.$$

Cela résulte du point (ii) du lemme 2.2 et des résultats de [1] rappelés précédemment.

Le cardinal de $\mathcal{K}(\Pi)$ ne dépend que de $\mathfrak{g}$ mais pas de $\mathfrak{h}$ ou de Π. On note $k_{\mathfrak{g}}$ cet entier. Le tableau 1 donne la valeur de $k_{\mathfrak{g}}$ pour les différents types d'algèbres de Lie simples.

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{K}''(\Pi) &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \epsilon_K|_{\mathfrak{a}} \neq 0\} \\ &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \epsilon_K \in \Delta''_+\}, \end{aligned}$$

et

Tableau 1
$k_{\mathfrak{g}}$ pour les algèbres de Lie simples

	$A_l, l \geqslant 1$	$B_l, l \geqslant 2$	$C_l, l \geqslant 3$	$D_l, l \geqslant 4$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$k_{\mathfrak{g}}$	$[\frac{l+1}{2}]$	l	l	$2[\frac{l}{2}]$	4	7	8	4	2

$$\begin{aligned}\mathcal{K}'(\Pi) &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \epsilon_K|_{\mathfrak{a}} = 0\}\\ &= \{K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \epsilon_K \in \Delta'_+\}.\end{aligned}$$

La proposition suivante décrit la façon dont l'involution de Cartan θ agit sur la construction de Kostant.

Proposition 2.3. *Soit K un élément de $\mathcal{K}(\Pi)$. Il y a trois cas possibles pour ϵ_K :*

(1) *ou bien ϵ_K est imaginaire et $\theta\epsilon_K = \epsilon_K$,*
(2) *ou bien, il existe L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que $-\theta\epsilon_K = \epsilon_L$,*
(3) *ou bien $-\theta\epsilon_K$ appartient à Γ_0^K et $\epsilon_K + \theta\epsilon_K$ est une racine imaginaire non-compacte contenue dans Γ_0^K.*

Démonstration. Soit K un élément de $\mathcal{K}(\Pi)$. On suppose que ϵ_K n'est pas une racine imaginaire. Alors $-\theta\epsilon_K$ appartient à Δ''_+. S'il existe L dans $\mathcal{K}''(\Pi)$ tel que $-\theta\epsilon_K = \epsilon_L$, on est dans le cas (2).

Supposons désormais que, pour tout K' de $\mathcal{K}(\Pi)$, on a $-\theta\epsilon_K \neq \epsilon_{K'}$. Il s'agit de montrer qu'on est dans le cas (3). Puisque Δ_+ est la réunion disjointe des $\Gamma^{K''}$, pour K'' dans $\mathcal{K}(\Pi)$ (lemme 2.2(ii)), il existe un unique L de $\mathcal{K}(\Pi)$ tel que $-\theta\epsilon_K$ appartient à Γ^L. Montrons tout d'abord l'égalité : $L = K$. D'après l'hypothèse, on a $-\theta\epsilon_K \neq \epsilon_L$ donc la racine $-\theta\epsilon_K$ appartient à Γ_0^L. On déduit de la remarque 2 que l'élément $\alpha = \epsilon_L + \theta\epsilon_K$ est une racine de Γ_0^L. Cette même remarque donne de plus :

$$\langle \epsilon_K, (-\theta\epsilon_L)^\vee\rangle = \langle -\theta\epsilon_K, \epsilon_L^\vee\rangle = 1,$$

donc $\langle -\theta\epsilon_L, \epsilon_K^\vee\rangle > 0$ et $-\theta\epsilon_L$ appartient à Γ^K. D'après l'hypothèse, la racine $-\theta\epsilon_L$ appartient à Γ_0^K et on déduit de la remarque 2 toujours, la relation : $\langle -\theta\epsilon_L, \epsilon_K^\vee\rangle = 1$. On obtient finalement :

$$\langle \theta\alpha, \epsilon_K^\vee\rangle = \langle \theta\epsilon_L + \epsilon_K, \epsilon_K^\vee\rangle = \langle \theta\epsilon_L, \epsilon_K^\vee\rangle + 2 = -1 + 2 = 1 > 0.$$

Par suite, la racine $\theta\alpha$ appartient à Γ^K ; en particulier, la racine $\theta\alpha$ est une racine positive. Les seules racines positives dont l'image par θ est encore une racine positive sont les racines positives de Δ', d'où $\alpha = \theta\alpha$. On en déduit que la racine $\alpha = \theta\alpha$ appartient à l'intersection $\Gamma_0^K \cap \Gamma_0^L$. Cette intersection est alors non vide, d'où $K = L$ (lemme 2.2(ii)).

Ainsi, on a montré que la racine $-\theta\epsilon_K$ appartient à Γ_0^K et que l'élément $\alpha = \epsilon_K + \theta\epsilon_K$ est une racine contenue dans Γ_0^K. C'est clairement une racine imaginaire ; montrons qu'elle est non-compacte. D'après le lemme 1.1(i), le crochet $[X_{\epsilon_K}, \theta X_{\epsilon_K}]$ est un élément non nul de $\mathfrak{g}^{\epsilon_K + \theta\epsilon_K}$, qui est contenu dans $\mathfrak{p}$, donc la racine imaginaire $\epsilon_K + \theta\epsilon_K$ est non-compacte. $\square$

Le corollaire qui suit concerne la sous-algèbre de Cartan $\hat{\mathfrak{h}}_0$. Il s'applique en fait plus généralement à toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stables par θ et maximalement non-compactes.

Corollaire 2.4. *Soit K un élément de $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$. Il existe un unique L dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$ tel que : $\theta\epsilon_K = \pm\epsilon_L$. Si $\theta\epsilon_K = \epsilon_L$, alors $K = L$ et K appartient à $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$. Si $\theta\epsilon_K = -\epsilon_L$, alors K appartient à $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$. Ceci permet de définir une involution dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$, que l'on note encore θ. Les ensembles $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$ et $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ sont stables par cette involution θ. On a : $\epsilon_{\theta K} = \epsilon_K$, pour tout K de $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$ et $\epsilon_{\theta K} = -\theta\epsilon_K$, pour tout K de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$. Enfin, pour tout K de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, on a l'inclusion $\Gamma_0^K \subset \Delta''_+$.*

Démonstration. La première partie de la proposition est une conséquence immédiate de la proposition précédente car $\hat{\mathfrak{h}}_0$ est maximalement non-compacte donc le système $\widehat{\Delta}$ ne possède pas de racine imaginaire non-compacte d'après le lemme 1.2.

Prouvons la dernière assertion. Soit K un élément de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et soit α dans Γ_0^K. D'après la remarque 2, il existe un unique élément β de Γ_0^K tel que $\alpha + \beta = \epsilon_K$. On a :

$$-\theta\alpha + (-\theta\beta) = \epsilon_{\theta K},$$

et on a : $\langle -\theta\alpha, {\epsilon_{\theta K}}^\vee \rangle = \langle \alpha, {\epsilon_K}^\vee \rangle = 1$, d'après la remarque 2 toujours. On en déduit que $-\theta\alpha$ appartient à $\Gamma_0^{\theta K}$; $-\theta\alpha$ est donc une racine positive, d'après le lemme 2.2(ii). Puisque les seules racines dont l'image par $-\theta$ est une racine positive sont les éléments de Δ''_+, on a obtenu l'inclusion $\Gamma_0^K \subset \Delta''_+$. $\square$

On pose

$$\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \left\{ K \in \mathcal{K}''(\Pi) \mid -\theta\epsilon_K = \epsilon_K \right\}$$
$$= \left\{ K \in \mathcal{K}(\Pi) \mid \epsilon_K \text{ est réelle} \right\}$$

et

$$\mathcal{K}_{\text{comp}}(\Pi) = \left\{ K \in \mathcal{K}''(\Pi) \mid -\theta\epsilon_K \neq \epsilon_K \right\}.$$

Pour $\widehat{\Pi}$, on obtient :

$$\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \left\{ K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi}) \mid \theta K = K \right\},$$

et

$$\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = \left\{ K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi}) \mid \theta K \neq K \right\}.$$

Puisque θ est une involution de $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$, le cardinal de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est pair et on peut choisir un sous-ensemble $\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ de sorte que $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) \cup \theta\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$.

Proposition 2.5. *L'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ est non vide si, et seulement si, le système Δ possède une racine réelle.*

Démonstration. Si K appartient à $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$, alors ϵ_K est une racine réelle ; l'implication est alors claire.

Réciproquement, supposons qu'il existe une racine α réelle dans Δ. On peut supposer que α est une racine positive ; soit alors K l'élément de $\mathcal{K}(\Pi)$ tel que α appartient à Γ^K. Il suffit de prouver que ϵ_K est une racine réelle. Si $\alpha = \epsilon_K$, c'est clair. Sinon, α appartient à Γ_0^K et d'après la remarque 2, il existe β dans Γ_0^K tel que

$$\alpha + \beta = \epsilon_K, \tag{3}$$

$$\text{d'où} \quad \alpha + (-\theta\beta) = -\theta\epsilon_K, \tag{4}$$

puisque α est réelle. D'après la proposition 2.3, il y a trois cas possibles :

(1) La racine ϵ_K est imaginaire ; ce cas est impossible car on a la relation $\alpha(H_{\epsilon_K}) = \langle \alpha, \epsilon_K^\vee \rangle = 1 \neq 0$, qui prouve que H_{ϵ_K} n'appartient pas à $\mathfrak{t}$.

(2) Il existe L dans $\mathcal{K}(\Pi)$ tel que $-\theta\epsilon_K = \epsilon_L$. Dans ce cas, on a :

$$\langle \alpha, \epsilon_L^\vee \rangle = \langle -\theta\alpha, (-\theta\epsilon_L)^\vee \rangle = \langle \alpha, \epsilon_K^\vee \rangle = 1,$$

donc α appartient à l'intersection $\Gamma^K \cap \Gamma^L$, d'où $K = L$ et ϵ_K est réelle.

(3) La racine $-\theta\epsilon_K$ appartient à Γ_0^K. Il s'agit de montrer que ce cas n'a pas lieu. L'égalité (4) et le lemme 2.2(iv) entrainent qu'il existe K' dans $\mathcal{K}(\Pi)$, avec $K' \subset K$, tel que la racine $-\theta\beta$ appartient à $\Gamma^{K'}$. Il suffit de montrer que $K = K'$ pour aboutir à une contradiction. En effet, si $K = K'$, l'égalité (4) et le lemme 2.2(iii) entrainent $-\theta\epsilon_K = \epsilon_K$, ce qui est impossible puisque $-\theta\epsilon_K$ appartient à Γ_0^K.

   On a : $-\theta\beta \neq \epsilon_{K'}$. En effet, supposons par l'absurde le contraire. Si $K' \neq K$, alors la relation (4) entraine que $\alpha + \epsilon_{K'}$ est une racine, ce qui contredit un résultat de [1], rappelé au début de cette partie. Si $K' = K$, alors les relations (3) et (4) donne $2(\epsilon_K + \theta\epsilon_K) = 0$, ce qui est absurde car on est dans le cas (3). On en déduit que $-\theta\beta$ appartient à $\Gamma_0^{K'}$ et, d'après la remarque 2, il existe γ dans $\Gamma_0^{K'}$ tel que

$$\gamma + (-\theta\beta) = \epsilon_{K'}, \tag{5}$$

$$\text{d'où} \quad (-\theta\gamma) + \beta = -\theta\epsilon_{K'}. \tag{6}$$

   Soit L dans $\mathcal{K}(\Pi)$ tel que $-\theta\gamma$ appartient à Γ^L. D'après le lemme 2.2(iv), la relation (6) nous conduit à distinguer deux cas :

   * $L \subset K$ et $-\theta\epsilon_{K'} \in \Gamma^K$. Le cas $-\theta\epsilon_{K'} = \epsilon_K$ est exclu car on est dans le cas (3) pour ϵ_K. On en déduit que $-\theta\epsilon_{K'}$ appartient à Γ_0^K. D'après la proposition 2.3, cela n'est possible que si $K' = K$.
   * $K \subset L$ et $-\theta\epsilon_{K'} \in \Gamma^L$. En particulier, la racine $-\theta\epsilon_{K'}$ est positive donc $\epsilon_{K'}$ n'est pas imaginaire ; on n'est donc pas dans le cas (1) de la proposition 2.3 pour $\epsilon_{K'}$. Si $-\theta\epsilon_{K'} = \epsilon_{L'}$, pour L' dans $\mathcal{K}(\Pi)$, alors β appartient à $\Gamma^{L'}$, puisqu'on a les égalités :

$$\langle \beta, \epsilon_{L'}^\vee \rangle = \langle \beta, (-\theta\epsilon_{K'})^\vee \rangle = \langle -\theta\beta, \epsilon_{K'}^\vee \rangle = 1.$$

On en déduit que β appartient à l'intersection $\Gamma^{L'} \cap \Gamma^{K}$, d'où $L' = K$ et on a $-\theta\epsilon_{K'} = \epsilon_K$, ce qui est impossible puisqu'on est dans le cas (3) pour ϵ_K. On n'est donc pas dans le cas (2) de la proposition 2.3 pour $\epsilon_{K'}$. Il résulte de la proposition 2.3 que $-\theta\epsilon_{K'}$ appartient à $\Gamma_0^{K'}$ (on est dans le cas (3) pour $\epsilon_{K'}$). L'intersection $\Gamma^L \cap \Gamma^{K'}$ est alors non vide et il vient : $L = K'$. Puisque $K' = L \subset K$, on déduit de l'inclusion $K \subset L$, l'égalité $K = K'$. □

Notons, que si K est un élément de $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$, cela n'entraine pas nécéssairement que toutes les racines de Γ^K sont réelles.

3. Utilisation des transformations de Cayley

Cette partie concerne les transformations de Cayley ; on trouve d'avantage de précisions dans [3]. Si $\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{h}_0'$ sont deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stables par θ, leurs complexifiées $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont conjuguées dans $\mathfrak{g}$. Les transformations de Cayley permettent de construire explicitement, et étapes par étapes, un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui conjugue ces deux sous-algèbres. On utilise deux types de transformations de Cayley à partir d'une sous-algèbre de Cartan θ-stable :

(i) Avec une racine imaginaire non-compacte β, on construit une nouvelle sous-algèbre de Cartan dont l'intersection avec $\mathfrak{p}_0$ augmente de 1 en dimension. On notera $\mathbf{c}_\beta$ la transformation correspondante ;
(ii) Avec une racine réelle α, on construit une nouvelle sous-algèbre de Cartan dont l'intersection avec $\mathfrak{p}_0$ diminue de 1 en dimension. On notera $\mathbf{d}_\alpha$ la transformation correspondante.

Seules les transformations de type $\mathbf{d}_\alpha$ vont intervenir dans la suite. On donne ici les résultats nécessaires concernant ces transformations. Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ. Si α est une racine réelle de Δ, on pose :

$$\mathbf{d}_\alpha = \mathrm{Ad}\left(\exp i\frac{\pi}{4}(\theta X_\alpha - X_\alpha)\right).$$

Pour β dans Δ, on note $\mathbf{d}_\alpha(\beta)$ la forme linéraire de $\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h})$ qui à H dans $\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h})$ associe $\alpha(\mathbf{d}_\alpha^{-1}(H))$; c'est une racine associée au couple $(\mathfrak{g}, \mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}))$. On a

$$\mathfrak{g}_0 \cap \mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}) = \ker(\alpha_{|\mathfrak{h}_0}) \oplus \mathbb{R}(X_\alpha + \theta X_\alpha)$$

et on vérifie sans peine la relation :

$$\dim\big(\mathbf{d}_\alpha(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}\big) = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - 1.$$

On dispose des relations suivantes :

$$\mathbf{d}_\alpha(H'_\alpha) = i(X_\alpha + \theta X_\alpha), \tag{7}$$

$$\mathbf{d}_\alpha(X_\alpha - \theta X_\alpha) = (X_\alpha - X_{-\alpha}), \tag{8}$$

$$\mathbf{d}_\alpha(X_\alpha + \theta X_\alpha) = iH'_\alpha, \tag{9}$$

où H'_α est un vecteur non nul proportionnel à H_α. Notons enfin que, compte tenu de l'expression de $\mathbf{d}_\alpha$, il est clair que si β est une racine fortement orthogonale à α, alors $\mathbf{d}_\alpha(X_\beta) = X_\beta$ et $\mathbf{d}_\alpha(X_{-\beta}) = X_{-\beta}$ d'où $\mathbf{d}_\alpha(H_\beta) = H_\beta$. On va utiliser ces résultats pour démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ stable par θ. On reprend les notations des parties* 1 *et* 2*. On a l'égalité* :

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k}.$$

En particulier, on a :

$$\dim\hat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k}.$$

Démonstration. On suppose dans un premier temps que $\mathfrak{h}$ n'est pas maximalement compacte. Le lemme 1.2 et la proposition 2.5 prouvent qu'il existe K dans $\mathcal{K}(\Pi)$ tel que ϵ_K est une racine réelle. On considère la transformation de Cayley $\mathbf{d}_{\epsilon_K}$. La sous-algèbre $\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\mathfrak{h}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. L'expression de $\mathbf{d}_{\epsilon_K}$ montre que c'est une sous-algèbre stable par θ et on a :

$$\dim\big(\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}\big) = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - 1.$$

L'ensemble $\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\Delta)$ est le système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathbf{d}_{\epsilon_K}(\mathfrak{h}))$ et $\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\Pi)$ en est une base. On vérifie sans difficulté la relation suivante :

$$\mathcal{K}\big(\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\Pi)\big) = \big\{\mathbf{d}_{\epsilon_K}(L) \mid L \in \mathcal{K}(\Pi)\big\}.$$

Montrons l'égalité :

$$\#\mathcal{K}_{\text{réel}}\big(\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\Pi)\big) = \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) - 1.$$

D'après la relation (7), $\mathbf{d}_{\epsilon_K}(H_{\epsilon_K})$ appartient à $i\mathbb{R}(X_{\epsilon_K} + \theta X_{\epsilon_K})$, donc $H_{\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\epsilon_K)} = \mathbf{d}_{\epsilon_K}(H_{\epsilon_K})$ appartient à $\mathfrak{k}$. Par suite, $\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\epsilon_K)$ est une racine imaginaire de $\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\Delta)$. Puisque l'ensemble $\{\epsilon_L \mid L \in \mathcal{K}(\Pi)\}$ est un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales, on a $H_{\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\epsilon_L)} = \mathbf{d}_{\epsilon_K}(H_{\epsilon_L}) = H_{\epsilon_L}$, pour $L \neq K$ dans $\mathcal{K}(\Pi)$, d'après ce qui précède la proposition. Or la racine $\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\epsilon_L)$ est réelle si, et seulement si, l'élément $H_{\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\epsilon_L)}$ appartient à $\mathfrak{a}$, d'où :

$$\mathcal{K}_{\text{réel}}\big(\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\Pi)\big) = \big\{\mathbf{d}_{\epsilon_K}(L) \mid L \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)\big\} \setminus \big\{\mathbf{d}_{\epsilon_K}(K)\big\}.$$

L'égalité souhaitée est alors claire. On a donc obtenu :

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \dim\big(\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p}\big) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}\big(\mathbf{d}_{\epsilon_K}(\Pi)\big).$$

Après un nombre fini de transformations, on obtient une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte. Il suffit donc de prouver la relation

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi) = \operatorname{rg} \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{k},$$

pour $\mathfrak{h}_0$ maximalement compacte. Supposons que $\mathfrak{h}_0$ est maximalement compacte. Alors $\dim \mathfrak{t} = \operatorname{rg} \mathfrak{k}$ et on a $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) = \operatorname{rg} \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{k}$. D'après le lemme 1.2, il n'y a pas de racines réelles. L'ensemble $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\Pi)$ est donc vide, d'après la proposition 2.5, et la relation est claire. □

4. Formes linéaires stables et indice de $\mathfrak{b}$

Si $\mathfrak{q}$ est une algèbre de Lie complexe et si ϕ est une forme linéaire sur $\mathfrak{q}$, on désigne par $\mathfrak{q}_\phi$ l'ensemble des s de $\mathfrak{q}$ tels que $\phi([\mathfrak{q}, s]) = 0$. Autrement dit $\mathfrak{q}_\phi = \{s \in \mathfrak{q} \mid (\mathrm{ad}^* s) \cdot \phi = 0\}$, où $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{q} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{q}^*)$ est la représentation coadjointe de $\mathfrak{q}$. On rappelle que l'*indice de* $\mathfrak{q}$, noté $\operatorname{ind} \mathfrak{q}$, est défini par :

$$\operatorname{ind} \mathfrak{q} = \min_{\phi \in \mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}_\phi.$$

On dit que l'élément ϕ de $\mathfrak{q}^*$ est *régulier* si $\dim \mathfrak{q}_\phi = \operatorname{ind} \mathfrak{q}$. L'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{q}^*$ est un ouvert non vide de $\mathfrak{q}^*$.

La notion de formes linéaires stables est introduite dans [7]. Rappelons qu'un élément ϕ de $\mathfrak{q}^*$ est dit *stable* s'il existe un voisinage V de ϕ dans $\mathfrak{q}^*$ tel que, pour tout ψ de V, $\mathfrak{q}_\phi$ et $\mathfrak{q}_\psi$ soient conjugués par un élément du groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{q}$. En particulier, si ϕ est une forme linéaire stable, alors c'est un élément régulier de $\mathfrak{q}^*$. Lorsque $\mathfrak{q}$ possède une forme linéaire stable, l'indice de $\mathfrak{q}$ est donné par la dimension du stablisateur de cette forme. En général, $\mathfrak{q}$ ne possède pas de forme linéaire stable ; on trouve des exemples d'algèbres de Lie ne possédant pas de forme linéaire stable dans [7] ou dans [4]. La proposition qui suit est démontrée en [4, Théorème 1.7].

Proposition 4.1. *Soit* $\mathfrak{q}$ *une algèbre de Lie, et soit* ϕ *un élément de* $\mathfrak{q}^*$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *On a la relation* : $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_\phi] \cap \mathfrak{q}_\phi = \{0\}$;
(ii) *La forme linéaire* ϕ *est stable.*

On suppose dans toute cette partie que $\mathfrak{b}$ n'est pas nulle. On va construire une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{b}$. Dans certains cas, on verra que cette forme est stable. Posons

$$u = \frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}(X_{-\epsilon_K} + X_{-\epsilon_{\theta K}})$$
$$= \sum_{K\in\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} X_{-\epsilon_K} + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})}(X_{-\epsilon_K} + X_{-\epsilon_{\theta K}}).$$

Lemme 4.2. *Soit x un élément de $\mathfrak{b}$. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *L'élément x s'écrit sous la forme*

$$x = h + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} a_K(X_{\epsilon_K} - X_{\epsilon_{\theta K}}),$$

avec a_K dans $\mathbb{C}$ et h dans $\hat{\mathfrak{a}}$ tel que $\epsilon_K(h) = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$.

(ii) *Le crochet $[x, u]$ appartient au sous-espace $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$.*

Remarque 3. Notons que si $\mathfrak{m}$ est nul, $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et ce lemme n'est rien d'autre que le lemme 2.5 de [4]. La démonstration qui suit reprend d'ailleurs pour une large part celle de [4].

Démonstration. (i) ⇒ (ii). Si (i) est vérifié, x s'écrit

$$x = h + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} a_K(X_{\epsilon_K} - X_{\epsilon_{\theta K}}),$$

avec $a_K \in \mathbb{C}$ et h dans $\hat{\mathfrak{a}}$ tel que $\epsilon_K(h) = 0$, pour tout $K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, et on a

$$[x, u] = \frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}\big(-\epsilon_K(h)X_{-\epsilon_K} - \epsilon_{\theta K}(h)X_{-\epsilon_{\theta K}} + a_K(H_{\epsilon_K} - H_{\epsilon_{\theta K}})\big)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}\big(-\epsilon_K(h)X_{-\epsilon_K} + \theta\epsilon_K(h)X_{-\epsilon_{\theta K}} + a_K(H_{\epsilon_K} + \theta H_{\epsilon_K})\big)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}\big(-\epsilon_K(h)X_{-\epsilon_K} - \epsilon_K(h)X_{-\epsilon_{\theta K}} + a_K(H_{\epsilon_K} + \theta H_{\epsilon_K})\big)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})}\big(0 + a_K(H_{\epsilon_K} + \theta H_{\epsilon_K})\big).$$

On en déduit que $[x, u]$ appartient à $\hat{\mathfrak{t}}$, d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). L'élément x appartient à $\mathfrak{b}$; il s'écrit sous la forme :

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\epsilon_K} X_{\epsilon_K} + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} (a_{\epsilon_K} X_{\epsilon_K} + a_{\epsilon_{\theta K}} X_{\epsilon_{\theta K}}) + \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \sum_{\alpha \in \Gamma_0^K} a_\alpha X_\alpha,$$

avec h dans $\hat{\mathfrak{a}}$ et a_α dans $\mathbb{C}$, pour tout α de Δ''_+. On en déduit que le crochet $[x, u]$ s'écrit sous la forme :

$$[x, u] = \sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\epsilon_K} H_{\epsilon_K} + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} (a_{\epsilon_K} H_{\epsilon_K} + a_{\epsilon_{\theta K}} H_{\epsilon_{\theta K}}) + Y,$$

où Y est un élément du sous-espace $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}_-$. Pour K dans $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$, la racine ϵ_K est réelle donc l'élément H_{ϵ_K} appartient à $\hat{\mathfrak{a}}$. Pour K dans $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$, la projection de H_{ϵ_K} sur $\hat{\mathfrak{a}}$ selon la décomposition $\hat{\mathfrak{a}} \oplus \hat{\mathfrak{t}}$ est $(H_{\epsilon_K} - \theta H_{\epsilon_K})/2$. Par suite, de la relation $[x, u] \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, on tire la relation :

$$\sum_{K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_{\epsilon_K} H_{\epsilon_K} + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} \left(a_{\epsilon_K} \frac{H_{\epsilon_K} - \theta H_{\epsilon_K}}{2} + a_{\epsilon_{\theta K}} \frac{H_{\epsilon_{\theta K}} - \theta H_{\epsilon_{\theta K}}}{2} \right) = 0.$$

Puisque les racines ϵ_K sont deux à deux fortement orthogonales, on a $\epsilon_K(H_{\epsilon_L}) = 0$, pour $L \neq K$ et il vient $a_{\epsilon_K} = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$. En utilisant de plus les relations $\theta H_{\epsilon_K} = -H_{\epsilon_{\theta K}}$ et $\theta H_{\epsilon_{\theta K}} = -H_{\epsilon_K}$, on obtient $a_{\epsilon_K} + a_{\epsilon_{\theta K}} = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$. On en déduit que x s'écrit :

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} a_{\epsilon_K} (X_{\epsilon_K} - X_{\epsilon_{\theta K}}) + \sum_{K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \sum_{\alpha \in \Gamma_0^K} a_\alpha X_\alpha.$$

Soit K un élément de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et soit α dans Γ_0^K. D'après la remarque 2, l'élément $\beta = \epsilon_K - \alpha$ est une racine de Γ_0^K ; elle appartient donc à $\widehat{\Delta}''_+$, d'après le corollaire 2.4. On a

$$[x, u] = \frac{1}{2} \left(\lambda a_\alpha X_{-\beta} + a_\alpha \sum_{K' \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi}) \setminus \{K\}} [X_\alpha, X_{-\epsilon_{K'}}] + \sum_{K' \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi}), \gamma \in \Delta''_+ \setminus \{\alpha\}} a_\gamma [X_\gamma, X_{-\epsilon_{K'}}] \right) - \sum_{K' \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \epsilon_{K'}(h) X_{-\epsilon_{K'}} + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} a_{\epsilon_K} \left(\frac{H_{\epsilon_K} + \theta H_{\epsilon_K}}{2} \right),$$

où λ est un scalaire non nul.

Supposons par l'absurde $a_\alpha \neq 0$. On a $\beta \neq \epsilon_{K'}$, pour K' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, car $\langle \beta, {\epsilon_K}^\vee \rangle = 1$ et $\langle \epsilon_{K'}, {\epsilon_K}^\vee \rangle \in \{0, 2\}$. Puisque la racine β appartient à $\widehat{\Delta}''_+$, l'élément $\frac{1}{2}\lambda a_\alpha X_{-\beta}$ qui intervient dans l'expression précédente de $[x, u]$ est un élément non nul de $\mathfrak{n}_-$. Comme $[x, u]$ appartient à $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$, il existe nécessairement K' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ et γ dans $\widehat{\Delta}''_+ \setminus \{\alpha\}$ tels que $\beta = \epsilon_{K'} - \gamma$. On a : $K \neq K'$, car $\gamma \neq \alpha$. Soit K'' dans $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$ tel que γ appartient à $\Gamma^{K''}$. Il résulte du lemme 2.2, (iii) que $K'' \neq K$. Puis, la racine $\beta + \gamma = \epsilon_{K'}$ appartient à $\widehat{\Delta}$, donc on a : $K \subset K''$ ou $K'' \subset K$. Cela résulte du lemme 2.2, (iv).

Supposons $K'' \subset K$. Les racines $\epsilon_{K'}$ et γ sont fortement orthogonales à ϵ_K, d'où :

$$1 = \langle \beta, \epsilon_K^\vee \rangle = \langle \epsilon_{K'} - \gamma, \epsilon_K^\vee \rangle = 0,$$

ce qui est absurde. Supposons $K \subset K''$. On a $\gamma \neq \epsilon_{K''}$ car $\epsilon_{K'}$ et $\epsilon_{K''}$ sont fortement orthogonales et $\epsilon_{K'} - \gamma$ est racine. Ainsi :

$$\langle \gamma, \epsilon_{K''}^\vee \rangle = 1, \qquad \langle \beta, \epsilon_{K''}^\vee \rangle = 0.$$

Par suite, on a :

$$1 = \langle \gamma, \epsilon_{K''}^\vee \rangle = \langle \beta + \gamma, \epsilon_{K''}^\vee \rangle = \langle \epsilon_{K'}, \epsilon_{K''}^\vee \rangle \in \{0, 2\},$$

ce qui est absurde.

On a obtenu que a_α est nul, pour tout α de Γ_0^K et tout K de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$. Il en résulte que x s'écrit sous la forme

$$x = h + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})} a_K (X_{\epsilon_K} - X_{\epsilon_{\theta K}})$$

et de la relation

$$[x, u] = -\sum_{K' \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \epsilon_{K'}(h) X_{-\epsilon_{K'}} + \sum_{K \in \mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})} a_K \left(\frac{H_{\epsilon_K} + \theta H_{\epsilon_K}}{2} \right),$$

on tire la relation $\epsilon_{K'}(h) = 0$, pour tout K' de $\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$, d'où (i). $\square$

On note κ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Pour $\mathfrak{r}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et ϕ une forme linéaire sur $\mathfrak{r}$, on note

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_\phi &= \{ s \in \mathfrak{r} \mid (\mathrm{ad}^* s) \cdot \phi = 0 \} \\ &= \{ s \in \mathfrak{r} \mid \phi([s, y]) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{r} \} \end{aligned}$$

le stabilisateur dans $\mathfrak{r}$ de la forme linéaire ϕ pour la représentation coadjointe $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{r} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{r}^*)$ de $\mathfrak{r}$. Pour v un élément de $\mathfrak{g}$, on note ϕ_v la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par :

$$\phi_v(y) = \kappa(v, y),$$

pour y dans $\mathfrak{g}$. La proposition suivante décrit le stabilisateur $\mathfrak{b}_{\phi_u}$ de la forme linéaire ϕ_u dans $\mathfrak{b}$.

Proposition 4.3. *Le stabilisateur $\mathfrak{b}_{\phi_u}$ de la restriction de ϕ_u à $\mathfrak{b}$ est donné par :*

$$\mathfrak{b}_{\phi_u} = \biggl(\bigcap_{K\in\mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}}\biggr) \oplus \biggl(\sum_{\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})} \mathbb{C}(X_{\epsilon_K} - X_{\epsilon_{\theta K}})\biggr).$$

et on a :

$$\dim \mathfrak{b}_{\phi_u} = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k}.$$

Démonstration. On a

$$\mathfrak{b}_{\phi_u} = \bigl\{x \in \mathfrak{b} \mid \kappa\bigl(u, [x, y]\bigr) = 0\ \forall y \in \mathfrak{b}\bigr\} = \bigl\{x \in \mathfrak{b} \mid [x, u] \in \mathfrak{b}^{\perp}\bigr\},$$

où $\mathfrak{b}^{\perp}$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing. La relation $\mathfrak{b}^{\perp} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}$ et le lemme 4.2 entrainent que l'élément x appartient à $\mathfrak{b}_{\phi_u}$ si, et seulement si, il s'écrit sous la forme

$$x = h + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})} a_K(X_{\epsilon_K} - X_{\epsilon_{\theta K}}),$$

avec a_K dans $\mathbb{C}$ et h dans $\hat{\mathfrak{a}}$ tel que $\epsilon_K(h) = 0$, pour tout $K \in \mathcal{K}''(\widehat{\Pi})$.

On a l'égalité :

$$\bigcap_{K\in\mathcal{K}''(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}} = \bigcap_{K\in\mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}}.$$

En effet, pour K dans $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$, la racine ϵ_K est imaginaire donc s'annule sur $\hat{\mathfrak{a}}$. La première assertion de la proposition est alors claire.

Montrons :

$$\dim\biggl(\bigcap_{K\in\mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}}\biggr) = \dim \hat{\mathfrak{a}} - \bigl(\#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) + \#\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})\bigr).$$

Il suffit de montrer que la famille

$$\bigl\{\epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}} \mid K \in \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) \cup \mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})\bigr\}$$

forme une base du sous-espace de $\hat{\mathfrak{a}}^*$ engendré par les éléments $\epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}}$, pour K dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$. Si K appartient à $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$, la racine ϵ_K est imaginaire donc s'annule sur $\hat{\mathfrak{a}}$. Si K appartient à $\mathcal{K}^+_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$, alors pour tout H dans $\hat{\mathfrak{a}}$, on a : $\epsilon_{\theta K}(H) = -\theta\epsilon_K(H) = \epsilon_K(H)$, d'où $\epsilon_{\theta K}|_{\hat{\mathfrak{a}}} =$

$\epsilon_{K}|_{\hat{\mathfrak{a}}}$. On en déduit que la famille précédente est génératrice. Montrons qu'elle est libre : soit

$$\sum_{K\in\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})} a_K\epsilon_{K}|_{\hat{\mathfrak{a}}} + \sum_{K\in\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} a_K\epsilon_{K}|_{\hat{\mathfrak{a}}} = 0,$$

une combinaison linéaire nulle dans $\hat{\mathfrak{a}}^*$. Puisque la famille $\{\epsilon_K \mid K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})\}$ est un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales, l'évalutation du membre de gauche dans l'expression précédente en l'élément $(H_{\epsilon_K} - \theta H_{\epsilon_K})/2 = (H_{\epsilon_K} + H_{\epsilon_{\theta K}})/2$ de $\hat{\mathfrak{a}}$, donne : $a_K = 0$, pour tout K de $\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})$ et tout K de $\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$. On a obtenu :

$$\begin{aligned}\dim\mathfrak{b}_{\phi_u} &= \big(\dim\hat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) - \#\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})\big) + \#\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})\\ &= \dim\hat{\mathfrak{a}} - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi})\\ &= \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la proposition 3.1. La proposition est ainsi démontrée. □

Remarque 4. L'expression de $\mathfrak{b}_{\phi_u}$ obtenue dans la proposition précédente permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de ϕ_u à $\mathfrak{b}$ soit stable. Pour a et b dans $\mathbb{C}$ et K dans $\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$, on a :

$$[H, aX_{\epsilon_K} + bX_{\epsilon_{\theta K}}] = \epsilon_K(H)(aX_{\epsilon_K} + bX_{\epsilon_{\theta K}}), \tag{10}$$

pour tout H dans $\hat{\mathfrak{a}}$. En particulier, les éléments $X_{\epsilon_K} - X_{\epsilon_{\theta K}}$, pour K dans $\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$, appartiennent à l'intersection $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\phi_u}] \cap \mathfrak{b}_{\phi_u}$. De l'expression de $\mathfrak{b}_{\phi_u}$ obtenue dans la proposition 4.3 et de la relation $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$, on tire alors l'égalité :

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\phi_u}] \cap \mathfrak{b}_{\phi_u} = \sum_{\mathcal{K}^+_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})} \mathbb{C}(X_{\epsilon_K} - X_{\epsilon_{\theta K}}).$$

Il résulte de la proposition 4.1 que la restriction de ϕ_u à $\mathfrak{b}$ est stable si, et seulement si, l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide.

On est désormais en mesure de démontrer les relations (1) et (2) annoncées en introduction :

Théorème 4.4. *On a les égalités* :

$$\operatorname{ind}\mathfrak{b} = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k}, \quad \textit{et}$$

$$\operatorname{ind}\mathfrak{g}_0 = \operatorname{ind}\mathfrak{k}_0 + \operatorname{ind}\mathfrak{b}_0.$$

Démonstration. La deuxième relation est une conséquence immédiate de la première. On s'intéresse désormais à la première relation.

Posons

$$\mathfrak{r}=\sum_{\alpha\in\widehat{\Delta}'_+}\mathfrak{g}^{\alpha}\quad\text{et}\quad\mathfrak{r}_-=\sum_{\alpha\in\widehat{\Delta}'_+}\mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Ainsi on a : $\mathfrak{m}=\mathfrak{r}_-\oplus\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{r}$. Posons aussi :

$$\tilde{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}\oplus\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{r},$$

de sorte que $\tilde{\mathfrak{b}}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Posons enfin

$$\tilde{u}=u+\sum_{K\in\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})}X_{-\epsilon_K}.$$

D'après la partie 2 de [4] ou d'après la remarque 4 appliquée au cas où $\mathfrak{m}=0$ (remarque 3), la restriction de la forme $\phi_{\tilde{u}}$ à $\tilde{\mathfrak{b}}$ est stable pour $\tilde{\mathfrak{b}}$. Notons $\widetilde{B}$ le groupe adjoint algébrique de $\tilde{\mathfrak{b}}$. Dans tout ce qui suit les ouverts sont relatifs à la topologie de Zariski. Puisque le dual de $\tilde{\mathfrak{b}}$ s'identifie à $\hat{\mathfrak{a}}\oplus\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{r}_-$ via la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, on en déduit que l'ensemble

$$\widetilde{W}=\left\{w\in\hat{\mathfrak{a}}\oplus\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{r}_-\mid\tilde{\mathfrak{b}}_{\phi_w}\text{ et }\tilde{\mathfrak{b}}_{\phi_{\tilde{u}}}\text{ sont conjugués via }\widetilde{B}\right\}$$

est un ouvert non vide de $\hat{\mathfrak{a}}\oplus\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{r}_-$.

Le dual de $\mathfrak{b}$ s'identifie à $\hat{\mathfrak{a}}\oplus\mathfrak{n}_-$ via la forme de Killing de $\mathfrak{g}$; on en déduit que l'ensemble

$$V=\{v\in\hat{\mathfrak{a}}\oplus\mathfrak{n}_-\mid\text{ la restriction de }\phi_v\text{ à }\mathfrak{b}\text{ est régulière}\}$$

est un ouvert non vide de $\hat{\mathfrak{a}}\oplus\mathfrak{n}_-$. Soit pr la projection de $\hat{\mathfrak{a}}\oplus\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{r}_-$ sur le sous-espace $\hat{\mathfrak{a}}\oplus\mathfrak{n}_-$ parallèlement au sous-espace $\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{r}_-$. Il résulte de ce qui précède que l'ensemble

$$W=\left\{w\in\hat{\mathfrak{a}}\oplus\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{r}_-\mid\operatorname{pr}(w)\in V\right\}$$

est un ouvert non vide de $\hat{\mathfrak{a}}\oplus\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{r}_-$. L'intersection $\widetilde{W}\cap W$ est alors non vide. Soit w un élément appartenant à cette intersection. On vérifie aisément les inclusions :

$$[\hat{\mathfrak{a}}\oplus\mathfrak{n},\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{r}_-]\subset\mathfrak{n}\subset\mathfrak{b}^{\perp}.$$

On en déduit que pour tout v dans $\hat{\mathfrak{a}}\oplus\mathfrak{n}_-$ et tout v' dans $\hat{\mathfrak{t}}\oplus\mathfrak{r}_-$, on a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{\phi_{v+v'}}&=\left\{x\in\mathfrak{b}\mid\kappa\left(v+v',[x,y]\right)=0\ \forall y\in\mathfrak{b}\right\},\\&=\left\{x\in\mathfrak{b}\mid\kappa\left([x,v+v'],y\right)=0\ \forall y\in\mathfrak{b}\right\},\\&=\left\{x\in\mathfrak{b}\mid\kappa\left([x,v],y\right)=0\ \forall y\in\mathfrak{b}\right\},\\&=\mathfrak{b}_{\phi_v}.\end{aligned}$$

En particulier, on a l'égalité : $\mathfrak{b}_{\phi_w} = \mathfrak{b}_{\phi_{\mathrm{pr}(w)}}$. De la définition de l'indice et de la proposition 4.3, on tire alors les relations :

$$\dim \mathfrak{b}_{\phi_w} = \dim \mathfrak{b}_{\phi_{\mathrm{pr}(w)}} = \mathrm{ind}\, \mathfrak{b} \leqslant \dim \mathfrak{b}_{\phi_u} = \mathrm{rg}\, \mathfrak{g} - \mathrm{rg}\, \mathfrak{k}.$$

Il suffit donc de prouver l'inégalité :

$$\dim \mathfrak{b}_{\phi_u} \leqslant \dim \mathfrak{b}_{\phi_w}.$$

D'après la partie 2 de [4] ou d'après la proposition 4.3 appliquée au cas où $\mathfrak{m} = 0$ (remarque 3), on a :

$$\tilde{\mathfrak{b}}_{\phi_{\tilde{u}}} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K.$$

Puisque w appartient à l'ensemble $\widetilde{W}$, il existe un automorphisme ρ de $\widetilde{B}$ tel que :

$$\tilde{\mathfrak{b}}_{\phi_w} = \rho\left(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K \right).$$

Soit x un élément de $\rho(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}})$. Puisque le sous-espace $\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}}$ est contenu dans le sous-espace $\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K$, l'élément x appartient au sous-espace

$$\rho\left(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K \right) = \tilde{\mathfrak{b}}_{\phi_w},$$

donc $[x, w]$ appartient au sous-espace $\tilde{\mathfrak{b}}^{\perp} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{r}$. On en déduit que $[x, w]$ appartient au sous-espace $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{b}^{\perp}$, car $\mathfrak{r}$ est contenu dans $\mathfrak{m}$. Par suite, x appartient à $\mathfrak{b}_{\phi_w}$, d'où :

$$\rho\left(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}} \right) \subset \mathfrak{b}_{\phi_w}.$$

Écrivons w sous la forme :

$$w = h + \sum_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+} a_\alpha X_{-\alpha},$$

avec h dans $\hat{\mathfrak{h}}$ et a_α dans $\mathbb{C}$, pour α dans $\widehat{\Delta}_+$. Quitte à restreindre l'ouvert W, on peut supposer que les composantes de w selon les vecteurs $X_{-\epsilon_K}$ sont non nulles, pour K dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$. Soit K dans $\mathcal{K}^{+}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ et soit

$$x = a_{\epsilon_{\theta K}} X_{\epsilon_K} - a_{\epsilon_K} X_{\epsilon_{\theta K}}.$$

Pour L, L' dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$ avec $L \neq L'$, on a : $\epsilon_L \pm \alpha \notin \Delta$, pour tout α de $\Gamma^{L'}$, d'après les résultats de [1] rappelés au début de la partie 2, d'où :

$$\begin{aligned}
[x, w] &= a_{\epsilon_K} a_{\epsilon_{\theta K}} H_{\epsilon_K} - a_{\epsilon_K} a_{\epsilon_{\theta K}} H_{\epsilon_{\theta K}} \\
&\quad + \sum_{L \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \sum_{\alpha \in \Gamma_0^L} a_\alpha \big(a_{\epsilon_{\theta K}} [X_{\epsilon_K}, X_{-\alpha}] - a_{\epsilon_K} [X_{\epsilon_{\theta K}}, X_{-\alpha}] \big) \\
&\quad + a_{\epsilon_{\theta K}} \epsilon_K(h) X_{\epsilon_K} - a_{\epsilon_K} \epsilon_{\theta K}(h) X_{\epsilon_{\theta K}} \\
&= a_{\epsilon_K} a_{\epsilon_{\theta K}} (H_{\epsilon_K} + \theta H_{\epsilon_K}) \\
&\quad + \sum_{\alpha \in \Gamma_0^K} a_\alpha a_{\epsilon_{\theta K}} [X_{\epsilon_K}, X_{-\alpha}] - \sum_{\alpha \in \Gamma_0^{\theta K}} a_\alpha a_{\epsilon_K} [X_{\epsilon_{\theta K}}, X_{-\alpha}] \\
&\quad + a_{\epsilon_{\theta K}} \epsilon_K(h) X_{\epsilon_K} - a_{\epsilon_K} \epsilon_{\theta K}(h) X_{\epsilon_{\theta K}}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité obtenue montre que $[x, w]$ appartient au sous-espace $\hat{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{n}$, qui est contenu dans le sous-espace $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{b}^\perp$, donc x appartient à $\mathfrak{b}_{\phi_w}$. On a finalement obtenu l'inclusion :

$$\rho\Big(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}} \Big) \oplus \Big(\sum_{K \in \mathcal{K}_{\mathrm{comp}}^+(\widehat{\Pi})} \mathbb{C}(a_{\epsilon_{\theta K}} X_{\epsilon_K} - a_{\epsilon_K} X_{\epsilon_{\theta K}}) \Big) \subset \mathfrak{b}_{\phi_w}.$$

D'après l'espression de $\mathfrak{b}_{\phi_u}$ obtenue dans la proposition précédente, il est clair que l'on a la relation :

$$\dim \Big(\rho\Big(\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\widehat{\Pi})} \ker \epsilon_K|_{\hat{\mathfrak{a}}} \Big) \oplus \Big(\sum_{K \in \mathcal{K}_{\mathrm{comp}}^+(\widehat{\Pi})} \mathbb{C}(a_{\epsilon_{\theta K}} X_{\epsilon_K} - a_{\epsilon_K} X_{\epsilon_{\theta K}}) \Big) \Big) = \dim \mathfrak{b}_{\phi_u},$$

et l'inégalité souhaitée s'ensuit. □

La proposition suivante précise la remarque 4 :

Proposition 4.5. *La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ possède une forme linéaire stable si, et seulement si, l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide.*

Démonstration. Si l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide, on a déjà noté (remarque 4) que la restriction de ϕ_u à $\mathfrak{b}$ est stable. Réciproquement, supposons que $\mathfrak{b}$ possède une forme linéaire stable et montrons que l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide. On suppose par l'absurde que ce dernier n'est pas vide. Soit K un élément de $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}^+(\widehat{\Pi})$. On reprend la démonstration du théorème 4.4 et on pose :

$$V_0 = \{ v \in \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{r}_- \mid \text{la restriction de } \phi_v \text{ à } \mathfrak{b} \text{ est stable} \}.$$

D'après l'hypothèse, l'ensemble V_0 est un ouvert non vide de $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{r}_-$. On en déduit que l'ensemble

$$W_0 = \{w \in \hat{\mathfrak{a}} \oplus \hat{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{r}_- \mid \mathrm{pr}(w) \in V_0\}$$

est un ouvert non vide de $\hat{\mathfrak{a}} \oplus \hat{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{r}_-$. L'intersection $\widetilde{W} \cap W_0$ est alors non vide. Soit w appartenant à cette intersection. Quitte à restreindre l'ouvert W_0, on peut supposer que les composantes de w selon les vecteurs $X_{-\epsilon_K}$ et $X_{-\epsilon_{\theta K}}$ sont non nulles. Au cours de la démonstration du théorème 4.4, on a vu qu'il existait deux complexes a et b non nuls tels que le vecteur $aX_{\epsilon_K} + bX_{\epsilon_{\theta K}}$ appartient au stabilisateur $\mathfrak{b}_{\phi_w}$. Il résulte de la relation (10) de la remarque 4 que l'élément $aX_{\epsilon_K} + bX_{\epsilon_{\theta K}}$ appartient à l'intersection $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\phi_w}] \cap \mathfrak{b}_{\phi_w}$. Puisque $\mathfrak{b}_{\phi_w} = \mathfrak{b}_{\phi_{\mathrm{pr}(w)}}$ (voir la démonstration du théorème 4.4), on en déduit que l'intersection $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\phi_{\mathrm{pr}(w)}}] \cap \mathfrak{b}_{\phi_{\mathrm{pr}(w)}}$ n'est pas réduite à $\{0\}$. Ceci contredit la proposition 4.1 car la restriction de $\phi_{\mathrm{pr}(w)}$ à $\mathfrak{b}$ est stable. □

5. Calculs explicites dans les algèbres de Lie simples réelles

On a obtenu à la fin de la partie précédente une caractérisation des algèbres de Lie semi-simples réelles $\mathfrak{g}_0$ pour lesquelles $\mathfrak{b}$ possède une forme linéaire stable. Notons que jusqu'ici, on n'a encore donné aucun exemple d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ possédant cette propriété. Pour en donner, il faut être capable de savoir quand l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide ; c'est ce qu'exprime la proposition 4.5. On suppose désormais que $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie simple réelle. Le lemme 5.1 donne le cardinal de $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ en fonction de quantités intrinsèques à $\mathfrak{g}_0$. On détermine ensuite les algèbres de Lie simples réelles $\mathfrak{g}_0$ pour lesquelles $\mathfrak{b}$ possède une forme linéaire stable.

Lemme 5.1. *Le cardinal de $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ est donné par :*

$$\#\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}) = k_{\mathfrak{g}} - k_{\mathfrak{m}} + \mathrm{rg}\,\mathfrak{g} - \mathrm{rg}\,\mathfrak{k} - \dim \hat{\mathfrak{a}}.$$

Démonstration. On a la relation :

$$\mathcal{K}(\widehat{\Pi}) = \mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) \cup \mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}) \cup \mathcal{K}'(\widehat{\Pi}),$$

d'où :

$$\#\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi}) = k_{\mathfrak{g}} - \#\mathcal{K}'(\widehat{\Pi}) - \#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}).$$

D'après la proposition 3.1, on dispose de la relation

$$\#\mathcal{K}_{\text{réel}}(\widehat{\Pi}) = \dim \hat{\mathfrak{a}} - \mathrm{rg}\,\mathfrak{g} + \mathrm{rg}\,\mathfrak{k}.$$

Il suffit donc de prouver la relation :

$$\#\mathcal{K}'(\widehat{\Pi}) = k_{\mathfrak{m}}.$$

L'ensemble $\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}'$ forme un système de racines simples du sous-système de racines $\widehat{\Delta}'$ de $\widehat{\Delta}$. Or $\widehat{\Delta}'_{|\mathfrak{t}}$ est le système de racines associé à la sous-algèbre $\mathfrak{m}$, d'après le lemme 1.3. Puisque $\widehat{\Delta}'_{|\mathfrak{t}}$ et $\widehat{\Delta}'$ ont clairement le même type, on a :

$$\#\mathcal{K}\big(\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}'\big) = k_{\mathfrak{m}}.$$

Il reste à prouver la relation :

$$\mathcal{K}'(\widehat{\Pi}) = \mathcal{K}\big(\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}'\big).$$

Cela revient à prouver l'inclusion $\{\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}'\} \subset \mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$. Soit ϵ la plus grande racine de $\widehat{\Delta}'_+$. Soit K dans $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$ tel que ϵ appartient à Γ^K. Puisque $\theta\epsilon = \epsilon$, on en déduit que ϵ appartient à l'intersection $\Gamma^K \cap \Gamma^{\theta K}$, donc $K = \theta K$ et la racine ϵ_K est ou bien réelle, ou bien imaginaire. Il est impossible que ϵ_K soit réelle car on a $\langle \epsilon, {\epsilon_K}^\vee \rangle > 0$ donc H_{ϵ_K} n'appartient pas à $\hat{\mathfrak{a}}$. Par suite, ϵ_K est une racine imaginaire. On en déduit que $\epsilon = \epsilon_K$, car ϵ est la plus grande racine de $\widehat{\Delta}'_+$. On en déduit que $\widehat{\Pi} \cap \widehat{\Delta}'$ appartient à $\mathcal{K}(\widehat{\Pi})$. Puis, comme ϵ est imaginaire, c'est un élément de $\mathcal{K}'(\widehat{\Pi})$. $\square$

D'après la classification des algèbres de Lie réelles simples obtenue, par exemple, dans [3, Theorem 6.105], l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est isomorphe à l'une des algèbres de Lie simples réelles de la liste suivante :

(a) L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$, où $\mathfrak{s}$ est simple complexe de type A_n, pour $n \geqslant 1$, B_n, pour $n \geqslant 2$, C_n, pour $n \geqslant 3$, D_n, pour $n \geqslant 4$, E_6, E_7, E_8, F_4 ou G_2.
(b) La forme réelle compacte d'une algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ comme en (a).
(c) Les algèbres de matrices classiques :
  - $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$,
  - $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$, avec $n \geqslant 2$,
  - $\mathfrak{su}(p, q)$, avec $p \geqslant q > 0$, $p + q \geqslant 2$,
  - $\mathfrak{so}(p, q)$, avec $p > q > 0$, $p + q$ impair, $p + q \geqslant 5$, ou $p > q > 0$, $p + q$ pair, $p + q \geqslant 8$,
  - $\mathfrak{sp}(p, q)$, avec $p \geqslant q > 0$, $p + q \geqslant 3$,
  - $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, avec $n \geqslant 3$,
  - $\mathfrak{so}^*(2n)$, avec $n \geqslant 4$.
(d) Les 12 algèbres de Lie simples exceptionnelles non complexes, non compactes EI, EII, $EIII$, EIV, EV, EVI, $EVII$, $EVIII$, EIX, EX, FI, FII et G.

On calcule pour chaque type d'algèbres de Lie simples réelles de la liste précédente, le cardinal de $\mathcal{K}_{\mathrm{comp}}(\widehat{\Pi})$ afin de décider si $\mathfrak{b}$ possède ou non une forme linéaire stable. On calcule ce cardinal selon la formule du lemme 5.1.

5.1. Cas des formes réelles compactes d'algèbres de Lie simples complexes

Si $\mathfrak{g}_0$ est la forme réelle compacte d'une algèbre de Lie simple complexe, alors $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0$ et la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ est nulle.

Tableau 2
Données concernant les algèbres de Lie simples réelles, non complexes, non compactes

$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}$	$\operatorname{rg}\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}_0$	$\operatorname{rg}\mathfrak{k}$	$\dim\hat{\mathfrak{a}}$	$k_{\mathfrak{g}}$	$\mathfrak{m}_0$	$k_{\mathfrak{m}}$	$\operatorname{ind}\mathfrak{b}$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}), n \geqslant 2$	A_{n-1}	$n-1$	$\mathfrak{so}(n)$	$[\frac{n}{2}]$	$n-1$	$[\frac{n}{2}]$	0	0	$n-1-[\frac{n}{2}]$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}), n \geqslant 2$	A_{2n-1}	$2n-1$	$\mathfrak{sp}(n)$	n	$n-1$	n	$\mathfrak{su}(2)^n$	n	$n-1$
$\mathfrak{su}(p,q), 1 \leqslant p < q$	A_{p+q-1}	$p+q-1$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(q))$	$p+q-1$	p	$[\frac{p+q}{2}]$	$\mathbb{R}^p \oplus \mathfrak{su}(q-p)$	$[\frac{q-p}{2}]$	0
$\mathfrak{su}(p,p), p \geqslant 1$	A_{2p-1}	$2p-1$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(p))$	$2p-1$	p	p	$\mathbb{R}^{p-1}$	0	0
$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$, $1 \leqslant p \leqslant q$	B_{p+q}	$p+q$	$\mathfrak{so}(2p)\oplus\mathfrak{so}(2q+1)$	$p+q$	$2p$	$p+q$	$\mathfrak{so}(2q-2p+1)$	$q-p$	0
$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$, $0 \leqslant q < p$	B_{p+q}	$p+q$	$\mathfrak{so}(2p)\oplus\mathfrak{so}(2q+1)$	$p+q$	$2q+1$	$p+q$	$\mathfrak{so}(2p-2q-1)$	$p-q-1$	0
$\mathfrak{sp}(p,q), 1 \leqslant p \leqslant q$	C_{p+q}	$p+q$	$\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(q)$	$p+q$	p	$p+q$	$\mathfrak{su}(2)^p \oplus \mathfrak{sp}(q-p)$	q	0
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), n \geqslant 1$	C_n	n	$\mathfrak{u}(n)$	n	n	n	0	0	0
$\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$, $1 \leqslant p \leqslant q$	D_{p+q+1}	$p+q+1$	$\mathfrak{so}(2p+1)\oplus\mathfrak{so}(2q+1)$	$p+q$	$2p+1$	$2[\frac{p+q+1}{2}]$	$\mathfrak{so}(2q-2p)$	$2[\frac{q-p}{2}]$	1
$\mathfrak{so}(2p,2q), 1 < p \leqslant q$	D_{p+q}	$p+q$	$\mathfrak{so}(2p)\oplus\mathfrak{so}(2q)$	$p+q$	$2p$	$2[\frac{p+q}{2}]$	$\mathfrak{so}(2q-2p)$	$2[\frac{q-p}{2}]$	0
$\mathfrak{so}^*(2n)$, $n \geqslant 3$ paire	D_n	n	$\mathfrak{u}(n)$	n	$[\frac{n}{2}]$	$2[\frac{n}{2}]$	$\mathfrak{su}(2)^{[\frac{n}{2}]}$	$[\frac{n}{2}]$	0
$\mathfrak{so}^*(2n)$, $n \geqslant 3$ impaire	D_n	n	$\mathfrak{u}(n)$	n	$[\frac{n}{2}]$	$2[\frac{n}{2}]$	$\mathfrak{su}(2)^{[\frac{n}{2}]} \oplus \mathbb{R}$	$[\frac{n}{2}]$	0
EI	E_6	6	$\mathfrak{sp}(4)$	4	6	4	0	0	2
EII	E_6	6	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	6	4	4	$\mathbb{R}^2$	0	0
$EIII$	E_6	6	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$	6	2	4	$\mathfrak{su}(4)\oplus\mathbb{R}$	2	0
EIV	E_6	6	$\mathfrak{f}_4$	4	2	4	$\mathfrak{so}(8)$	4	2
EV	E_7	7	$\mathfrak{su}(8)$	7	7	7	0	0	0
EVI	E_7	7	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	7	4	7	$\mathfrak{su}(2)^3$	3	0
$EVII$	E_7	7	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	7	3	7	$\mathfrak{so}(8)$	4	0
$EVIII$	E_8	8	$\mathfrak{so}(16)$	8	8	8	0	0	0
EIX	E_8	8	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	8	4	8	$\mathfrak{so}(8)$	4	0
FI	F_4	4	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	4	4	4	0	0	0
FII	F_4	4	$\mathfrak{so}(9)$	4	1	4	$\mathfrak{so}(7)$	3	0
G	G_2	2	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$	2	2	2	0	0	0

5.2. Cas des algèbres de Lie réelles sous-jacentes à une algèbre de Lie simple complexe

Si $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie simple complexe, $\mathfrak{g}_0$ est de la forme $\mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$ avec $\mathfrak{s}$ simple complexe. Soit $\mathfrak{u}_0$ la forme réelle compacte de $\mathfrak{s}$. La décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ s'écrit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0 \oplus i\mathfrak{u}_0$ et θ est la conjugaison complexe relative à $\mathfrak{u}_0$. Ici, l'algèbre $\mathfrak{k}_0$ est la forme réelle compacte $\mathfrak{u}_0$, d'où $\operatorname{rg}\mathfrak{k}_0 = \operatorname{rg}\mathfrak{u}_0 = \operatorname{rg}\mathfrak{s}$. On a de plus, $\operatorname{rg}\mathfrak{g}_0 = \operatorname{rg}\mathfrak{g} = 2\operatorname{rg}\mathfrak{s}$. Soit $\mathfrak{c}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}_0$. Alors on a : $\hat{\mathfrak{a}}_0 = i\mathfrak{c}_0$ et $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{c}_0$. En particulier, $\mathfrak{m}_0$ est une sous-algèbre abélienne. Notons que la sous-algèbre de Cartan $\hat{\mathfrak{h}}_0 = \hat{\mathfrak{a}}_0 \oplus i\hat{\mathfrak{a}}_0$ est à la fois maximalement compact et maximalement non-compact. Le lemme 5.1 donne : $\#\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = 2k_{\mathfrak{s}} - 0 + 2\operatorname{rg}\mathfrak{s} - \operatorname{rg}\mathfrak{s} - \operatorname{rg}\mathfrak{s} = 2k_{\mathfrak{s}} \neq 0$. D'après la proposition 4.5 et le théorème 4.4, la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ ne possède pas de forme stable et son indice est égal à $\operatorname{rg}\mathfrak{s}$.

5.3. Cas des algèbres de Lie simples réelles, non complexes, non compactes

On suppose que l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$ est l'une des algèbres de la liste (c) ou (d). On regroupe dans le tableau 2 les données nécessaires concernant $\mathfrak{g}_0$ qui permettent de calculer le cardinal de $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ selon la formule du lemme 5.1. On trouve ces données dans [3, Appendice C]. Pour chaque algèbre des listes (c) et (d), on donne le type du complexifié $\mathfrak{g}$ et son rang, la sous-algèbre $\mathfrak{k}_0$ et son rang, la dimension de $\hat{\mathfrak{a}}$, $k_{\mathfrak{g}}$, la sous-algèbre $\mathfrak{m}_0$ et $k_{\mathfrak{m}}$. Ce travail permet de distinguer deux cas :

(1) Si $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{so}(2p+1, 2q+1)$, avec $1 \leqslant p \leqslant q$ et p et q de parité différente, alors la relation,

$$k_{\mathfrak{g}} - k_{\mathfrak{m}} = \dim\hat{\mathfrak{a}} - (\operatorname{rg}\mathfrak{g} - \operatorname{rg}\mathfrak{k}),$$

est satisfaite. D'après le lemme 5.1, l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ est vide et la proposition 4.5 assure que la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ possède une forme linéaire stable. L'indice de $\mathfrak{b}$ est donné par la relation (1).

(2) Si $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(2p+1, 2q+1)$, avec $1 \leqslant p \leqslant q$ et p et q de parité différente, alors l'ensemble $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi})$ n'est pas vide. Précisément, la formule du lemme 5.1 donne : si p est impair et q pair, alors $\#\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = 4$ et, si p est pair et q impair, alors $\#\mathcal{K}_{\text{comp}}(\widehat{\Pi}) = 2$. D'après la proposition 4.5, la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ ne possède pas de forme linéaire stable. L'indice de $\mathfrak{b}$ est donné par la relation (1).

Ce dernier cas et le cas des algèbres de Lie réelles sous-jacentes à une algèbre de Lie simple complexe fournissent des exemples d'algèbres de Lie qui ne possèdent pas de formes linéaires stables.

Références

[1] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4, 5, 6, Masson, 1981.
[2] J. Dixmier, Enveloping Algebras, Grad. Stud. Math., vol. 11, Amer. Math. Soc., 1996.

[3] A.W. Knapp, Lie Groups beyond an Introduction, Birkhäuser, 2002.
[4] P. Tauvel, R.W.T. Yu, Indice et formes linéaires stables dans une algèbres de Lie, J. Algebra 273 (2) (2004) 507–516.
[5] P. Tauvel, R.W.T. Yu, Sur l'indice de certaines algèbres de Lie, Ann. Inst. Fourier, Université Joseph Fourier de Grenoble 54 (6) (2004).
[6] M. Raïs, Notes sur l'indice des algèbres de Lie, communication privée, 2004.
[7] Y. Kosmann, S. Sternberg, Conjugaison des sous-algèbres d'isotropie, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. (1974).