Algèbre linéaire

rédigé par Anne Moreau

Table des matières

1 Espaces Vectoriels **5**

1.1 Structure d'espace vectoriel . . . 5

1.1.1 Espaces vectoriels . . . 5

1.1.2 Exemples fondamentaux «de référence» . . . 6

1.1.3 Règles de calcul dans un espace vectoriel . . . 6

1.2 Sous-espace vectoriel . . . 7

1.3 Familles de vecteurs . . . 8

1.3.1 Combinaison linéaire . . . 8

1.3.2 Famille génératrice . . . 8

1.3.3 Famille libre – famille liée . . . 8

1.3.4 Bases . . . 10

1.4 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs . . . 10

1.5 Somme de sous-espaces vectoriels . . . 11

1.5.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels . . . 11

1.5.2 Sous-espaces supplémentaires . . . 12

2 Applications linéaires **13**

2.1 Généralités . . . 13

2.2 Opérations sur les applications linéaires . . . 14

2.2.1 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ . . . 14

2.2.2 Composition des applications linéaires . . . 15

2.2.3 Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$ . . . 15

2.3 Image et noyau . . . 16

2.3.1 Image . . . 16

2.3.2 Noyau . . . 16

2.4 Applications linéaires et systèmes de vecteurs . . . 17

2.5 Projections et symétries . . . 17

3 Dimension finie **19**

3.1 Dimension d'un espace vectoriel . . . 19

3.2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie . . . 20

3.2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie . . . 20

3.2.2 Sommes directes de sous-espaces vectoriels 21
3.2.3 Rang d'une famille de vecteurs 22
3.2.4 Définition du rang d'une famille de vecteurs 22
3.2.5 Comment déterminer dans la pratique le rang d'une famille de vecteurs ? 22

4 Matrices et systèmes linéaires **23**
4.1 Rappels sur les systèmes linéaires – Méthode du pivot de Gauss 23
4.1.1 Définitions 23
4.1.2 Système triangulaire 23
4.1.3 Méthode de Gauss 24
4.2 Ecriture matricielle d'un système linéaire 25
4.2.1 Définitions 25
4.2.2 Produit d'une matrice par une matrice colonne 25
4.3 Opérations sur les matrices 26
4.3.1 Addition 26
4.3.2 Produit par un scalaire 26
4.3.3 Propriétés de ces opérations 26
4.3.4 Produit matriciel 26
4.4 Matrices carrées 27
4.4.1 Matrices triangulaires et diagonales ; matrice identité 27
4.4.2 Produit de matrices carrées 27
4.5 Propriétés du produit matriciel 28
4.6 Matrices carrées inversibles 28
4.7 Interprétation matricielle de la méthode de Gauss 30
4.7.1 Matrices d'opérations élémentaires 30
4.7.2 Méthode de Gauss 30
4.7.3 Application de la méthode de Gauss au calcul de l'inverse d'une matrice inversible 30

5 Applications linéaires en dimension finie et matrices **31**
5.1 Matrice d'un vecteur, matrice d'une application linéaire dans des bases 31
5.1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base 31
5.1.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases 32
5.2 Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 33
5.3 Le théorème du rang 35

6 Déterminant **37**
6.1 Introduction 37
6.2 Définition du déterminant 38
6.3 Opérations élémentaires et déterminant 39
6.4 Développement par rapport à une rangée 41
6.5 Comatrice 42

Chapitre 1

Espaces Vectoriels

Dans toute ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Structure d'espace vectoriel

On va généraliser les propriétés connues des vecteurs du plan et de l'espace.

1.1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble. On dit que E est un* **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** *(ou un* **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$***) s'il est muni*

1) *d'une addition $+$, c'est-à-dire d'une application*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

vérifiant :

(i) $\forall\, (x, y) \in E^2$, $x + y \in E$ *(stabilité de E par l'addition ; ce point est redondant avec le fait que $(x, y) \mapsto x + y$ est une application de $E \times E$ dans E) ;*

(ii) $\forall\, (x, y, z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(associativité) ;*

(iii) $\forall\, (x, y) \in E^2$, $x + y = y + x$ *(commutativité) ;*

(iv) *il existe un élément de E noté 0_E tel que pour tout $x \in E$, $x + 0_E = x$ (0_E est appelé* **élément neutre***, ou encore* **vecteur nul***) ;*

(v) $\forall\, x \in E$, $\exists\, x' \in E \,|\, x + x' = 0_E$ *(x' est appelé* **opposé** *de x).*

2) *d'une multiplication externe, c'est-à-dire d'une multiplication $\cdot$ d'un élément de $\mathbb{K}$ par un élément de E*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$$

vérifiant :

(i) $\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in E$ *;*

(ii) $\forall\, x \in E, \forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$ *(associativité) ;*

(iii) $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$ *(distributivité par rapport à l'addition dans* $\mathbb{K}$*) ;*
(iv) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$. *(distributivité par rapport à l'addition de* E*) ;*
(v) $\forall x \in E$, $1.x = x$.

Les éléments de E *sont appelés les* **vecteurs***, les éléments de* $\mathbb{K}$ *les* **scalaires***.*

Remarques.
1) Un espace vectoriel est nécessairement non vide (il contient 0_E).
2) On vérifie aisément que ces propriétés sont vraies, en particulier, pour les vecteurs du plan.
3) On vérifie facilement que, dans un espace vectoriel, l'élément neutre est unique. C'est pour cela qu'on peut le noter 0_E.
2) A priori, le symbole «+» ne désigne pas la même addition dans E et dans $\mathbb{K}$; dans la pratique, il n'y a pas d'inconvénient à les noter de la même façon.

♦ **Exercice 1.** Citer des espaces vectoriels usuels (ces exemples sont fondamentaux et à connaître).

1.1.2 Exemples fondamentaux «de référence»

1) On munit $\mathbb{K}^n$ de l'addition suivante : si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{K}^n$, on définit $x + y$ par $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. On définit aussi la multiplication externe suivante : si λ est un scalaire de $\mathbb{K}$, l'élément $\lambda.x$ de $\mathbb{K}^n$ est défini par $\lambda.x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. On vérifie aisément que l'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de ces lois est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, le vecteur nul est $(0, \ldots, 0)$.

On peut interpréter le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ comme étant l'ensemble des «vecteurs» du plan, au sens vu dans les classes antérieures, donnés par leurs coordonnées dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ (on définira plus loin la notion de base ; pour l'instant, on s'appuie sur la notion de base des vecteurs du plan vue dans les classes antérieures). De même, on pensera au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ comme à l'ensemble des «vecteurs» de l'espace. Il est utile d'avoir à l'esprit ces représentations «concrètes» des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, de façon à bien comprendre les résultats (et contre-exemples) généraux sur les espaces vectoriels.

2) L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (à vérifier). Rappelons que la somme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, par définition, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on définit également le produit $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication externe usuelles, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (à vérifier).

4) L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, lorsqu'on le munit de l'addition et de la multiplication externe usuelles.

5) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1.3 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Proposition 1.1.2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Pour tout couple* (x, y) *de vecteurs de* E *et pour tout couple* (λ, μ) *de scalaires de* $\mathbb{K}$*, on a les résultats suivants :*
1) *l'opposé de* x *est unique ; on peut donc le noter* $-x$ *; on note* $x - y$ *pour désigner* $x + (-y)$ *;*
2) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$ *;*

3) $\lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E$;
4) $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.

♦ **Exercice 2.** Démontrer ces propriétés.

On retiendra donc que dans un espace vectoriel, on peut effectuer les calculs selon les mêmes règles que celles utilisées pour manipuler les vecteurs du plan ou de l'espace.

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F une partie de E ; on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :*
1) F est non vide ;
2) F est stable pour l'addition, i.e., pour tout couple (x, y) de vecteurs de F, le vecteur $x + y$ appartient encore à F.
3) F est stable pour la multiplication externe, i.e. pour tout vecteur x de F et pour tout scalaire λ de $\mathbb{K}$, le vecteur λx appartient à F.

Remarques.
1) un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.
2) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E, dits *triviaux.*
3) Souvent, pour montrer qu'une partie est un espace vectoriel, on essaie de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu (l'un des espaces vectoriels de référence, listés dans le paragraphe précédent).
4) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, et u est un vecteur non nul de E. Alors l'ensemble $\mathbb{K}u = \{\lambda.u, \lambda \in \mathbb{K}\}$ des vecteurs de E colinéaires à u est appelé la ***droite vectorielle engendrée par*** u.
5) L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$. On le note $\mathbb{K}_n[X]$.
6) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel si et seulement si F muni des lois de E (addition et multiplication externe) restreintes à F a lui-même une structure d'espace vectoriel.
8) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel si et seulement si :
   (i) F est non vide ;
   (ii) $\forall (x, y) \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, le vecteur $\lambda.x + y$ appartient à F.

Exercice 1. La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des espaces vectoriels :

$E_1 = \{(ax + by, cx + dy);\ (x, y) \in \mathbb{K}^2\}$;
$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \,|\, ax + by = 1\}$;
$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \,|\, ax + by = 0 \text{ et } cx + dy = 0\}$;
$E_4 = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(1) = 0\}$;
$E_5 = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(0) = 1\}$;
$E_6 = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, \deg(P) \leqslant m\}$;
$E_7 = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, \deg(P) = m\}$;
$E_8 =$ l'ensemble des suites de réels convergentes ;
$E_9 =$ l'ensemble des suites de réels divergentes ;
$E_{10} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$;
$E_{11} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ est } 2\pi - \text{périodique}\}$;
$E_{12} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } f'' + \alpha f' + \beta f = 0\}$;
$E_{13} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$.
$E_{14} = \mathbb{Z}$.

Proposition 1.2.2 (intersection de sous-espaces vectoriels)**.** *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Une intersection (quelconque) de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.*

♦ **Exercice 3.** Démontrer cette proposition.

⚠ **Attention :** en général, une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel. Voir à ce sujet l'exercice ci-dessous.

Exercice 2. * Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si on a $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1.3 Familles de vecteurs

1.3.1 Combinaison linéaire

Définition 1.3.1. *Soit n un entier naturel non nul. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille (finie) de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle* **combinaison linéaire** *des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ tout vecteur de E pouvant s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$.*

Exemples :
1) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, l'ensemble des combinaisons linéaires d'un vecteur u non nul de E est la droite vectorielle engendrée par u.
2) Tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire des deux vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$.
3) Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire des polynômes $1, X, \ldots, X^n$, où $n \geqslant \deg P$.

1.3.2 Famille génératrice

Définition 1.3.2. *Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ; on dit que c'est une famille* **génératrice** *de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$.*

Exemples :
1) Si u est un vecteur non nul d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tout vecteur non nul colinéaire à u est générateur de la droite vectorielle $\mathbb{K}u$.
2) La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est génératrice du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$; elle n'est pas génératrice de l'espace $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
3) La formule de Taylor pour les polynômes (voir la feuille d'exercices 2) montre que pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.3.3 Famille libre – famille liée

Définition 1.3.3. *Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ; on dit qu'elle est* **libre** *si la seule combinaison linéaire nulle de ces n vecteurs est la combinaison où tous les coefficients scalaires sont nuls, i.e.,*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda_i = 0 \right).$$

La famille est dite **liée** *dans le cas contraire, i.e., il existe n scalaires non tous nuls tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.

Remarque importante. Deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont liés si et seulement si ils sont colinéaires. Ce résultat n'est plus vrai s'il y a plus de deux vecteurs. (Rappelons que deux vecteurs u et v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dits ***colinéaires*** s'il existe un scalaire λ de $\mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.)

♦ **Exercice 4.** Dessiner trois vecteurs deux à deux non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ (qui forment nécessairement une famille liée).

Exemples.
1) La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
2) La famille $(X, X-1, 2X+3)$ est liée puisque $-5X + 3(X-1) + (2X+3) = 0$.

♦ **Exercice 5.** Examiner si la famille $(u = (1,1,1), v = (2,1,3), w = (1,2,3))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.3.4. 1) *Toute famille extraite d'une famille libre est libre.*
2) *Toute famille contenant une famille liée est liée.*
3) *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
4) *Toute famille réduite à un unique vecteur non nul est libre*

♦ **Exercice 6.** Vérifier ces propriétés.

Proposition 1.3.5. *Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres, i.e., il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que u_i est combinaison linéaire des u_k pour $k \in \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{i\}$.*

♦ **Exercice 7.** Démontrer cette proposition.

⚠ **Attention :** lorsqu'une famille est liée, tout vecteur n'est pas nécessairement combinaison linéaire des autres ; on sait simplement que <u>l'un</u> (au moins) d'entre eux est combinaison linéaire des autres.
Illustration.

Exercice 3. La famille de vecteurs $(x = (1,2,3,4), y = (2,1,3,4), z = (0,1,6,8), t = (0,1,3,4))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 4. Montrer qu'une famille finie de polynômes non nuls, de degrés deux à deux distincts, est libre. On pourra réutiliser ce résultat sans le redémontrer quand on en aura besoin : ***«une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre».***

Exercice 5. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soient a, b, c, d les suites de E définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = (-1)^n, \quad b_n = 1, \quad c_n = n, \quad d_n = 2^n.$$

Montrer que la famille (a, b, c, d) est libre dans E.

Exercice 6. * Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $]0,1[$ dans $\mathbb{C}$, n un entier naturel non nul, et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts de $]0,1[$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$f_k :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{1 - a_k x}.$$

Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans E.

1.3.4 Bases

Définition 1.3.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une famille finie $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E est une* **base** *de E si cette famille est à la fois libre et génératrice.*

Remarque. Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet une base, celle-ci n'est pas unique. Par exemple, tout réel non nul constitue une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3.7. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$.*

Autrement dit, la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\longrightarrow E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &\longmapsto \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n. \end{aligned}$$

est bijective.

♦ **Exercice 8.** Démontrer cette proposition.

Exemples très importants.
1) Soit n un entier naturel non nul ; pour tout entier i compris entre 1 et n, posons : $u_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où le "1" est en $i$ème position. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est clairement une base de $\mathbb{K}^n$, appelée ***base canonique*** de $\mathbb{K}^n$.
2) La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée la ***base canonique*** de $\mathbb{K}_n[X]$.
3) Aucune famille finie de vecteurs de $\mathbb{K}[X]$ n'est génératrice de $\mathbb{K}[X]$ (il suffit de penser au degré) ; par conséquent, $\mathbb{K}[X]$ n'admet pas de base comportant un nombre fini de vecteurs.

1.4 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Étant donné une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on cherche à décrire le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant ce système.

Théorème-Définition 1.4.1. *Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ; l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de ce système est un sous-espace vectoriel de E, appelé le sous-espace vectoriel* **engendré par le système** $(u_1, \ldots, u_n)$; *on le note Vect$(u_1, \ldots, u_n)$. Par convention, on pose* $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

♦ **Exercice 9.** Démontrer ce résultat.

Proposition 1.4.1. $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$. C'est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \ldots, u_n$.*

♦ **Exercice 10.** Démontrer cette proposition.

Le résultat suivant est évident :

Proposition 1.4.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
1) *Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est un système libre de E, alors c'est une base du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
2) *Si $u \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n, u) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.*

Remarques.
1) Pour trouver une base d'un espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, on regarde si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre. Si elle ne l'est pas, on écrit l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres, puis on le supprime etc. Ce procédé est important.
2) On a vu plus haut que, par définition, une droite vectorielle est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul. On définit un ***plan vectoriel*** comme étant un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs non coliénaires.

Exercice 7. Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $x = (2, 3, -1)$ et $y = (1, -1, -2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $u = (3, 7, 0)$ et $v = (5, 0, -7)$.

Exercice 8.
1) La famille de vecteurs $(x = (1, 2, 3, 4), y = (2, 1, 3, 4), z = (0, 1, 6, 8), t = (0, 1, 3, 4))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$?
2) Donner une base de $\mathrm{Vect}(x, y, z, t)$.

Exercice 9. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:
1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\}$;
2) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0 \text{ et } x + y + 2z = 0\}$;
3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0 \text{ et } x + y + 2z = 0 \text{ et } 2y + z = 0\}$.

Exercice 10. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions f, g, h et k de E par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \sin 2x, \quad k(x) = \sin x + \cos x.$$

Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(f, g, h, k)$.

1.5 Somme de sous-espaces vectoriels

1.5.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.5.1. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle* **somme** *des deux sous-espaces F et G, et on note $F + G$, l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ; autrement dit, on a :*

$$F + G = \{x + y,\ x \in F,\ y \in G\}.$$

⚠ **Attention** à ne pas confondre la réunion $F \cup G$ (qui n'est pas un sous-espace vectoriel si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$; voir à ce sujet l'exercice 2) et la somme $F + G$ (qui est un sous-espace vectoriel, «beaucoup plus gros» que l'ensemble $F \cup G$).

◆ **Exercice 11.** 1) Vérifier que la somme de deux sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.
2) Quelle est la somme de deux droites vectorielles de l'espace $\mathbb{R}^3$? La somme d'une droite et d'un plan vectoriel ?

Définition 1.5.2. *Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que les deux sous-espaces F et G sont en* **somme directe** *si tout vecteur du sous-espace somme $F+G$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.*

Proposition 1.5.3. *Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont en somme directe si et seulement si leur intersection $F \cap G$ est réduite à $\{0_E\}$. On note dans ce cas $F \oplus G$ la somme de F et G.*

♦ **Exercice 12.**
1) Démontrer cette proposition.
2) Quels sont les couples (F, G) de sous-espaces vectoriels en somme directe dans $\mathbb{R}^3$?

1.5.2 Sous-espaces supplémentaires

Définition 1.5.4. *Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont* **supplémentaires** *dans E si et seulement si :*

(i) *$F + G = E$;*

(ii) *F et G sont en somme directe.*

On a donc dans ce cas : $F \oplus G = E$.

⚠ **Attention** aux deux erreurs courantes à propos des supplémentaires.
1) Ne pas confondre «supplémentaire» avec «complémentaire».
2) En général, un sous-espace vectoriel admet plusieurs supplémentaires. Autrement dit on ne pas «le» supplémentaire mais «un» supplémentaire.

Exercice 11 (description exhaustive des supplémentaires d'un sous-espace vectoriel dans des cas simples)**.**
1) Décrire tous les couples (F, G) de sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ et le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Décrire tous les supplémentaires de F dans E.

Exercice 12. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P le sous-ensemble de E constitué des fonctions paires et I le sous-ensemble de E formé des fonctions impaires. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E.

Exercice 13. Soient $E_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 0\}$ et $E_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(2) = 0\}$.
1) Montrer qu'on a $\mathbb{K}[X] = E_1 + E_2$.
2) Les sous-espaces E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires ?

Chapitre 2

Applications linéaires

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, et f une application de E dans F. On dit que f est* **linéaire** *si pour tous vecteurs $x, y \in E$ et tout scalaire λ de $\mathbb{K}$, on a*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Ceci équivaut à dire : pour tous x, y de E, pour tout λ de $\mathbb{K}$,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

• *Si f est linéaire et si $E = F$, on dit que f est un* **endomorphisme**.
• *Si f est linéaire bijective de E sur F, on dit que f est un* **isomorphisme**.
• *On dit d'une application que c'est un* **automorphisme** *si c'est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.*
• *On dit d'une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ que c'est une* **forme linéaire**.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exemples :
1) si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, l'application nulle (qui à tout vecteur de E associe 0_F) est linéaire.
2) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'application ***identité*** de E, notée Id_E (qui à tout vecteur de E associe lui-même) est un endomorphisme de E.
3) Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si a est un élément de $\mathbb{K}$, alors l'application $x \longmapsto ax$ de E dans lui-même est linéaire. C'est donc un endomorphisme de E, appelé ***homothétie vectorielle***. Il est clair qu'une telle homothétie est un automorphisme si et seulement si a est non nul.

♦ **Exercice 13.** Donner des exemples d'applications linéaires (dans des espaces vectoriels variés).

Remarques. Bien entendu, si f est linéaire de E dans F, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs de E, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires de $\mathbb{K}$, alors on a, en itérant la propriété de la définition :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

♦ **Exercice 14.** Déterminer toutes les applications linéaires ; 1) de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$; 2) de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}^2$; 3) de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$; 4) de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^2$.

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E, les vecteurs x et $f(x)$ soient colinéaires. Ainsi, pour tout vecteur non nul x de E, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
1) On suppose l'espace E non réduit à $\{0_E\}$. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. Montrer qu'on a $\lambda_x = \lambda_y$. [*Indication* : on pourra penser à utiliser le vecteur $x + y$ lorsque x et y ne sont pas colinéaires.]
2) En déduire que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ tel que pour tout vecteur $x \in E$, on ait $f(x) = \lambda x$.

Proposition 2.1.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F. On a alors les résultats suivants :*
1) $f(0_E) = 0_F$.
2) *L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.*
3) *L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 2.1.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f un isomorphisme de E sur F. Alors la bijection réciproque f^{-1} est une application linéaire de F sur E.*

♦ **Exercice 15.** Démontrer ces propositions.

2.2 Opérations sur les applications linéaires

2.2.1 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$, on définit $f + g$ par :

$$\begin{array}{rccl} f+g : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) + g(x). \end{array}$$

Si f est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ et λ un élément de $\mathbb{K}$, on définit λf par :

$$\begin{array}{rccl} \lambda f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \lambda f(x). \end{array}$$

On vérifie aisément le résultat suivant :

Proposition 2.2.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Muni de ces opérations (addition et multiplication externe), l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

⚠ **Attention :** lorsque E n'est pas réduit à $\{0_E\}$, $GL(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $L(E)$. En effet, l'endomorphisme nul n'est pas bijectif.

2.2.2 Composition des applications linéaires

Les résultats suivants se vérifient immédiatement :

Proposition 2.2.2. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient f_1, f_2 et f des applications linéaires de E dans F, g_1, g_2 et g des applications linéaires de F dans G. Alors :*
1) $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$ (découle de la linéarité de g) ;
2) $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$ (découle de la définition de la somme de deux applications linéaires).

2.2.3 Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On peut toujours composer deux endomorphismes de E ; en particulier, on peut définir pour tout endomorphisme f et tout entier naturel k l'endomorphisme f^k par :

$$\text{si } k = 0, \quad f^0 = \mathrm{Id}_E; \qquad \text{si } p \geqslant 1, \quad f^k = f^{k-1} \circ f = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_n f^n$ est noté $P(f)$.

On peut vérifier que pour tout endomorphismes f et tous polynômes P et Q, on a $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Proposition 2.2.3 (binôme de Newton)**.** *Si f et g sont deux endomorphismes de E qui* **commutent** *(c'est-à-dire qui vérifient $f \circ g = g \circ f$), on a :*

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}.$$

La démonstration est la même que celle de la formule du binôme pour les nombres réels ou complexes...
⚠ **Attention :** si $f \circ g \neq g \circ f$, alors cette relation n'est plus vraie (on a alors, pour $n = 2$, $(f+g)^2 \neq f^2 + 2f \circ g + g^2$).

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p un entier naturel non nul et f un endomorphisme de E.
1) On suppose que l'endomorphisme f est ***nilpotent***, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que l'endomorphisme f^p soit nul. Calculer

$$(\mathrm{Id}_E - f) \circ (\mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{p-1}).$$

En déduire que l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E - f$ est un automorphisme et expliciter sa bijection réciproque.
2) Application. L'espace E est maintenant le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$. On note D l'application «dérivation» de E dans E, qui à tout polynôme P de E associe son polynôme dérivé P'. On pose également

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P - P'. \end{aligned}$$

a) Montrer que φ est un automorphisme de E.
b) En déduire que l'équation différentielle $y' - y = x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ admet une unique solution y polynomiale de degré 3.

2.3 Image et noyau

2.3.1 Image

Définition 2.3.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. Le sous-espace vectoriel $f(E)$ est appelé* **l'image** *de l'application f, et est noté* $\operatorname{Im} f$.

En particulier, f (linéaire) est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

2.3.2 Noyau

Définition 2.3.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire. Le sous-espace vectoriel $f^{-1}(\{0_F\})$ de E est appelé le* **noyau** *de f ; on le note* $\operatorname{Ker} f$ *("der Kern" signifie "le noyau" en allemand). On a*

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Exercice 16. * Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X^k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^k. Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k. \end{array}$$

Montrer que l'application φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer son noyau.

Exercice 17. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2) a) Déterminer le degré du polynôme $f(X^k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\operatorname{Im} f$ contient au moins un polynôme de degré p.
   c) En déduire l'image de l'endomorphisme f.
3) Déterminer le noyau de f.

Exercice 18. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est ***stable*** par l'endomorphisme g si on a $g(F) \subset F$, autrement dit si pour tout vecteur x appartenant à F, son image $g(x)$ appartient encore à F.

On suppose que les endomorphismes f et g commutent, c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Lorsqu'une application f est linéaire, connaître son noyau permet en particulier de savoir si f est injective, comme l'énonce la proposition suivante :

Proposition 2.3.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. Alors f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

♦ **Exercice 16.** Démontrer cette proposition.

♦ **Exercice 17.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes, trouver :
1) un endomorphisme surjectif et non injectif :
2) un endomorphisme injectif et non surjectif.

2.4 Applications linéaires et systèmes de vecteurs

Proposition 2.4.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E ($p \in \mathbb{N}^*$).*
1) Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée, alors $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est liée.
2) Si $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre, alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
3) Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et f injective, alors $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.
4) $f(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n))$. En particulier, si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille génératrice de E, alors la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.
5) Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E et si f est un isomorphisme, alors $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est une base de F.

⚠ **Attention :** si l'application f n'est pas injective, l'image par f d'une famille libre n'est pas nécessairement un système libre. Par exemple, si u est un vecteur non nul du noyau de f, alors la famille (u) est libre, mais $(f(u)) = (0_F)$ est lié.

♦ **Exercice 18.** Démontrer cette proposition.

2.5 Projections et symétries

Définition 2.5.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ; on a donc $E = F \oplus G$. Par définition, pour tout vecteur x de E, il existe un unique couple (x_F, x_G) de vecteurs de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On appelle* **projecteur** *sur F parallèlement à G l'application*

$$\begin{array}{rccc} p: & E & \longrightarrow & E \\ & x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F. \end{array}$$

Illustration.

Exemple : l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui à tout vecteur (x, y) associe $(x, 0)$ est le projecteur sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ parallèlement à $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Proposition 2.5.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E supplémentaires. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :*
1) p est un endomorphisme de E ;
2) $F = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Im}\, p$;
3) $G = \ker p$.
On a donc en particulier $\ker p \oplus \mathrm{Im}\, p = E$.

Exercice 19. Soit

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (3x - y, 6x - 2y). \end{array}$$

Déterminer une base de $\ker p$ et de $\mathrm{Im} p$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

♦ **Exercice 19.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
1) Soit f un endomorphisme de E. La somme $\ker f + \mathrm{Im} p$ est-elle nécessairement directe ?
2) Soient F et G deux sous-espaces de E supplémentaires. Un endomorphisme f de E d'image F et de noyau G est-il nécessairement égal à le projecteur sur F parallèlement à G ?

Exercice 20 (caractérisation des projections)**.** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et p un endomorphisme de E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur ;

(ii) $p \circ p = p$.

Définition 2.5.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Ainsi, tout vecteur x de E s'écrit de façon unique $x = x_F + x_G$, où x_F est un vecteur de F et x_G un vecteur de G. On appelle* **symétrie** *par rapport à F parallèlement à G l'application qui à $x = x_F + x_G$ associe $x_F - x_G$.*

Autrement dit, s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G si et seulement si on a $s(x) = 2x_F - x$ pour tout $x \in E$, donc si et seulement si $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G. On en déduit en particulier qu'une symétrie est un endomorphisme de E.

Illustration.

Chapitre 3

Dimension finie

3.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 3.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de* **dimension finie** *s'il admet une famille génératrice finie. On dit que E est de* **dimension infinie** *dans le cas contraire.*

⧫ **Exercice 20.** Citer des espaces vectoriels de dimension finie et des espaces de dimension infinies (ces exemples seront importants).
Solutions. Quelques exemples :
1) $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, puisqu'on a vu qu'il admettait des bases comportant un nombre fini de vecteurs (par exemple la base canonique).
2) $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (pour les mêmes raisons).
3) $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie ; en effet, s'il admettait une famille génératrice $(P_1, \ldots, P_n)$, alors tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ serait de degré au plus $\max(\deg P_1, \ldots, \deg P_n)$, ce qui est absurde.

Plusieurs questions se posent : existe-t-il toujours des bases dans les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ? si oui, ces bases ont-elles toutes même cardinal ?
On admet la proposition suivante (un petit peu délicate à démontrer) :

Proposition 3.1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice (finie) de E. Alors on a :* $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{G})$.

Exercice 21. ⋆ Justifier que l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. [*Indication.* Exhiber une famille libre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de cardinal infini.]

Le théorème suivant est fondamental :

Théorème-Définition 3.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$. Alors :*
1) E admet au moins une base ;
2) toutes les bases de E ont même cardinal, qu'on appelle **dimension de** E, *et que l'on note* $\dim E$.
Par convention, on pose $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Vocabulaire. Dans le cours, on a appelé *droite vectorielle* tout sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul ; de façon équivalente, on peut dire qu'une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.

On a défini un *plan vectoriel* comme étant un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires ; de façon équivalente, on peut dire qu'un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.

♦ **Exercice 21.** Citer une base de chacun des espaces vectoriels de dimension finie répertoriés à l'exercice 20. En déduire leur dimension.

♦ **Exercice 22.** Démontrer ce théorème.

⚠ **Attention :** un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ n'admet pas une seule base mais une infinité. Par exemple, tout réel non nul constitue une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Proposition 3.1.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors :*
(i) *toute famille libre de E comporte au plus n vecteurs ;*
(i)′ *toute famille comportant au moins $n+1$ vecteurs est liée ;*
(ii) *toutes famille génératrice de E comporte au moins n vecteurs ;*
(iii) *toute famille libre comportant n vecteurs de E est une base de E ;*
(iv) *toute famille génératrice comportant n vecteurs de E est une base de E.*

♦ **Exercice 23.** Démontrer cette proposition.

Exercice 22. Soient a, b, c, d quatre éléments de $\mathbb{K}$. Montrer que les vecteurs $u = (a, b)$ et $v = (c, d)$ forment une base de $\mathbb{K}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on suppose que P_k est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré k. Justifier que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 24 (polynômes de Lagrange)**.** * Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.
1) Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe un unique polynôme L_k de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on ait :

$$\begin{cases} L_k(\alpha_i) = 0 \ \text{ si } \ i \neq k; \\ L_k(\alpha_k) = 1. \end{cases}$$

2) Donner l'allure des courbes représentatives des polynômes L_0, L_1, L_2, L_3 lorsque $n = 3$.
3) Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$; donner sa décomposition dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$.

3.2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

3.2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie

Proposition 3.2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et on a $\dim F \leqslant \dim E$.*

♦ **Exercice 24.** Démontrer cette proposition.

♦ **Exercice 25.** Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 17 contient-il nécessairement un sous-espace vectoriel de dimension 9 ?

3.2.2 Sommes directes de sous-espaces vectoriels

Proposition 3.2.2. *On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle, F et G deux sous-espaces vectoriels de E non réduits à $\{0_E\}$. Soient $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F, et $(g_1, \ldots, g_p)$ une base de G. Alors :*
1) les sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_p)$ est libre ;
2) on a $F + G = E$ si et seulement si la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est génératrice de E ;
3) les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E.

Vocabulaire. Dans le cas 3), on dit que la base $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ de E est *adaptée* à la décomposition $F \oplus G = E$.

Théorème 3.2.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*
1) la somme $F + G$ est directe si et seulement si on a $F \cap G = \{0_E\}$;
2) F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si on a

$$\begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E. \end{cases}$$

Exercice 25. Soient

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

$$\text{et} \quad G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0 \ \text{ et } \ x_3 - x_4 = 0\}$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base. Donner un supplémentaire de F.
2) Mêmes questions pour G.

Exercice 26. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$, $y = (1, 1, 0, -1)$, $F = \text{Vect}(u, v, w)$, et $G = \text{Vect}(x, y)$. Déterminer la dimension et une base de chacun des sous-espaces vectoriels F, G, $F + G$, $F \cap G$. Donner un supplémentaire de chacun de ces sous-espaces.

Exercice 27. Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$ de $\mathbb{K}^n$, et soit

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Vérifier : $D \oplus H = \mathbb{K}^n$.

Exercice 28. Soient $n \geqslant 2$ et H l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que $P(1) = 0$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$, donner sa dimension et en donner un supplémentaire.

Théorème 3.2.4 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E (en particulier, on a $1 \leqslant p \leqslant n$). Alors Il existe $n - p$ vecteurs de E notée $u_{p+1}, \ldots, u_n$ tels que la famille $(u_1, \ldots, u_p, \ldots, u_n)$ soit une base de E ;*

Corollaire 3.2.5. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet (au moins) un supplémentaire dans E.*

♦ **Exercice 26.** Démontrer ces résultats.

Proposition 3.2.6. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si on a $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.*

♦ **Exercice 27.**
1) Démontrer ce résultat à l'aide du corollaire 3.2.5.
2) Démontrer ce résultat sans utiliser du corollaire 3.2.5.

3.2.3 Rang d'une famille de vecteurs

3.2.4 Définition du rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.2.7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle* **rang** *de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ la dimension de l'espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$*. On note :*

$$\mathrm{rang}\,(u_1, \ldots, u_p) = \dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p).$$

La proposition suivante se déduit immédiatement de la définition du rang :

Proposition 3.2.8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.*
1) *On a :*

$$\mathrm{rang}\,(u_1, \ldots, u_p) \leqslant p.$$

2) *Si de plus l'espace vectoriel E est de dimension finie n, on a :*

$$\mathrm{rang}\,(u_1, \ldots, u_p) \leqslant \min(n, p).$$

3.2.5 Comment déterminer dans la pratique le rang d'une famille de vecteurs ?

Proposition 3.2.9. *On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E en :*
1) *échangeant des vecteurs ;*
2) *retirant un vecteur de la famille qui est combinaison linéaire des autres ;*
3) *multipliant un vecteur de la famille par un scalaire de $\mathbb{K}$ non nul ;*
4) *ajoutant à un vecteur de la famille une combinaison linéaire des autres.*

♦ **Exercice 28.** Démontrer cette proposition.

Dans le chapitre «Espaces vectoriels», on a déjà déterminé le rang de plusieurs familles de vecteurs : dans l'ex 5, $\mathrm{rang}\,(u, v, w) = 3$; ex 5, $\mathrm{rang}\,(a, b, c, d) = 4$; ex 8, $\mathrm{rang}\,(x, y, z, t) = 3$; ex 10, $\mathrm{rang}\,(f, g, h, k) = 3$.

Exercice 29. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$ de vecteurs de $\mathbb{C}^2$, où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+2i \end{pmatrix},$$

1) dans le cas où $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ;
2) dans le cas où $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Chapitre 4

Matrices et systèmes linéaires

Comme dans les chapitres précédents, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des ***scalaires***.

4.1 Rappels sur les systèmes linéaires – Méthode du pivot de Gauss

Ce paragraphe a déjà été traité au premier semestre : nous passerons donc assez rapidement sur les détails.

4.1.1 Définitions

Soient n et p des entiers naturels non nuls. On appelle ***système linéaire*** d'inconnue $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, de coefficients les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, et de second membre $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ le système suivant :

$$(\mathcal{S}) = \left\{ \begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + & a_{1,j}x_j + \cdots + & a_{1,p}x_p & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + & a_{2,j}x_j + \cdots + & a_{2,p}x_p & = & y_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + & a_{i,j}x_j + \cdots + & a_{i,p}x_p & = & y_i \\ \cdots & & & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + & a_{n,j}x_j + \cdots + & a_{n,p}x_p & = & y_n. \end{array} \right.$$

Résoudre un tel système, c'est, par définition, chercher tous les $p-$uplets $(x_1, \dots, x_p)$ solutions. Le système est dit ***homogène***, ou sans second membre, si tous les y_i sont nuls.

♦ **Exercice 29.** Quelle est l'interprétation géométrique d'un système linéaire lorsque $n = p = 2$?

4.1.2 Système triangulaire

Un cas favorable est celui où le système est triangulaire, i.e., les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls pour tous les indices i, j tels que $i > j$. Par exemple, si $n = 3$ et $p = 4$, un système triangulaire est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1}x_1 + & a_{1,2}x_2 + & a_{1,3}x_3 + & a_{1,4}x_4 = y_1 \\ & a_{2,2}x_2 + & a_{2,3}x_3 + & a_{2,4}x_4 = y_2 \\ & & a_{3,3}x_3 + & a_{3,4}x_4 = y_3 \end{array} \right.$$

Si $n = 4$ et $p = 3$, un système triangulaire a l'allure suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + & a_{1,2}x_2 + & a_{1,3}x_3 & = y_1 \\ & a_{2,2}x_2 + & a_{2,3}x_3 & = y_2 \\ & & a_{3,3}x_3 & = y_3 \\ & & 0 & = y_4 \end{cases}$$

Si $n = p$, on a le résultat suivant :

Proposition 4.1.1. *On considère un système linéaire ayant autant de lignes que d'inconnues ($n = p$ avec les notations précédentes), de type triangulaire :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + & a_{1,2}x_2 + \cdots + & a_{1,i}x_i + \cdots + & a_{1,n}x_n = y_1 \\ & a_{2,2}x_2 + \cdots + & a_{2,i}x_i + \cdots + & a_{2,n}x_n = y_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_{i,i}x_i + \cdots + & a_{i,n}x_n = y_i \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n,n}x_n = y_n. \end{cases}$$

Si tous les coefficients diagonaux $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ sont non nuls, alors ce système possède une unique solution.

4.1.3 Méthode de Gauss

Pour résoudre un système linéaire une méthode intéressante est de chercher à le remplacer par un système triangulaire ayant le même ensemble de solution. Notons $L_1, \ldots L_n$ les lignes d'un système linéaire.

Proposition 4.1.2. *Les opérations suivantes, dites* **opérations élémentaires***, transforment un système linéaire en un système ayant le même ensemble de solution :*
- *échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_k$*
- *produit d'une ligne par un scalaire non nul $L_i \leftarrow \alpha L_j$, $\alpha \neq 0$*
- *ajout à une ligne d'un multiple d'une autre $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_k$, $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Définition 4.1.3. *On dit que deux systèmes sont* **équivalents** *si l'on peut obtenir l'un à partir de l'autre par une succession d'opération élémentaires. On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système en le remplaçant pas un système équivalent.*

Théorème 4.1.4 (pivot de Gauss)**.** *On peut toujours obtenir un système linéaire triangulaire à partir d'un système linéaire donné, en effectuant uniquement des opérations des types décrits ci-dessus.*

Exercice 30. Résoudre le système linéaire suivant à l'aide d'opérations élémentaires :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 5y + 4z = -1 \\ -x + 2y + z = -1 \\ 3y + 3z = -1. \end{cases}$$

4.2 Ecriture matricielle d'un système linéaire

4.2.1 Définitions

De façon à obtenir une écriture plus compacte du système, on peut noter :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Un tel tableau de scalaires est appelé une ***matrice***, à n lignes et p colonnes. Ainsi, deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même nombre n de lignes, même nombre p de colonnes, et si pour tout couple $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}$, le coefficient situé à la ligne i, colonne j, est le même dans chacune des deux matrices. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée la ***matrice nulle***, et est notée simplement 0. Ainsi, la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On dit qu'il s'agit d'une ***matrice-colonne***. Un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelé ***matrice-ligne***.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit sa ***transposée*** comme étant la matrice ${}^tA = (a'_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ vérifiant pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,p\} \times \{1,\dots,n\}$: $a'_{i,j} = a_{j,i}$. Dans la pratique, la transposée d'une matrice est facile à obtenir. Par exemple, la transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1+i & 0 \\ 8 & 5 & -4i \end{pmatrix}$ est la matrice ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1+i & 5 \\ 0 & -4i \end{pmatrix}$.

4.2.2 Produit d'une matrice par une matrice colonne

On souhaite définir le produit de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ de façon à ce que le système $(\mathcal{S})$ précédent s'écrive simplement : $AX = Y$. Pour cela, il faut donc que l'on définisse le produit AX de la façon suivante :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par définition le produit de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont le coefficient de la $i$ème ligne est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_k$.

Proposition 4.2.1. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice A est nulle si et seulement si pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, la matrice AX est nulle.*

♦ **Exercice 30.** Démontrer cette proposition.

4.3 Opérations sur les matrices

4.3.1 Addition

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit leur somme $A+B$ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient situé à la $i$ème ligne et $j$ème colonne est $a_{i,j}+b_{i,j}$. Pour calculer la somme de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on effectue donc des sommes coefficient à coefficient :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

⚠ **Attention :** la somme de deux matrices n'a de sens que si ces deux matrices ont même nombre de lignes d'une part, et même nombre de colonnes d'autre part.

4.3.2 Produit par un scalaire

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et λ un scalaire (i.e., un élément de $\mathbb{K}$), on définit le produit de λA comme étant la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenue en multipliant chacun des coefficients de A par λ. Autrement dit, on a :

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

4.3.3 Propriétés de ces opérations

On vérifie sans difficulté que si λ et μ sont deux scalaires, et A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a bien :

$$(A+B)+C = A+(B+C); \qquad A+B = B+A; \qquad A+0 = A;$$
$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A); \qquad (\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A; \qquad \lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B.$$

4.3.4 Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On note $B_1, \ldots, B_q$ les colonnes de la matrice B. On a déjà défini les produits $AB_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. On définit ici le produit de A et B dans cet ordre de la façon suivante : la matrice produit AB est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $AB_1, AB_2, \ldots, AB_q$. Ainsi, si l'on note $C = AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}$, on a pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, q\}$ la relation :

$$c_{i,j} = (AB_j)_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

♦ **Exercice 31.** Effectuer le produit AB lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

⚠ **Attention :** le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

4.4 Matrices carrées

4.4.1 Matrices triangulaires et diagonales ; matrice identité

Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes est simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n. Les coefficients $a_{i,i}$ sont appelés les ***coefficients diagonaux*** de la matrice A. La matrice A est dite ***triangulaire supérieure*** si tous les coefficients situés strictement sous la diagonale sont nuls, i.e., pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n vérifiant $i > j$, on a $a_{i,j} = 0$. On définit de façon similaire la notion de matrice triangulaire inférieure. La matrice A est dite ***diagonale*** si tous les coefficients qui ne se trouvent pas sur la diagonale sont nuls, i.e., pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n vérifiant $i \neq j$, on a $a_{i,j} = 0$. Une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'une somme ou un produit de matrices triangulaires supérieures (resp. diagonales) est encore triangulaire supérieure (resp. diagonale).

♦ **Exercice 32.**

1) Vérifier ces affirmations pour le produit.

2) Que se passe-t-il quand on multiplie une matrice à gauche par une matrice diagonale ? à droite ?

4.4.2 Produit de matrices carrées

On appelle matrice ***identité*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on note I_n, la matrice diagonale ne comportant que des coefficients 1 sur la diagonale :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que si une matrice A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $AI_n = I_nA = A$. On utilise, comme pour les nombres réels ou complexes, la convention $A^0 = I_n$. D'autre part, lorsque A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, i.e., deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les produits AB et BA sont tous deux définis, mais ils ne sont pas nécessairement égaux !

♦ **Exercice 33.** Donner un exemple de matrices carrées A et B pour lesquelles les produits AB et BA sont différents. Ainsi a-t-on $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, mais cette matrice n'est pas toujours égale à la matrice $A^2 + 2AB + B^2$. Cette identité devient vraie lorsque A et B commutent (i.e., $AB = BA$).

4.5 Propriétés du produit matriciel

On vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 4.5.1. *Pour toutes matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*

- $(AB)C = A(BC)$ *; item[$\bullet$]* $(A + A')B = AB + A'B$ *;*
- $A(B + B') = AB + AB'$ *;*
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ *;*

♦ **Exercice 34.** Vérifier ces propriétés.

L'associativité du produit (c'est-à-dire $(AB)C = A(BC)$) permet de définir la puissance $n$ième d'une matrice carrée A (puisque $(AA)A = A(AA)$, on peut noter A^3 cette matrice etc...). On a la proriété suivante :

Proposition 4.5.2 (binôme de Newton)**.** *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$* **qui commutent***, i.e., $AN = BA$. On a alors pour tout entier naturel n :*

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

La démonstration est la même que pour les nombres réels ou complexes (ou les endomorphismes qui commutent, cf. Proposition 2.2.3), dans la mesure où la propriété $AB = BA$ permet d'utiliser les mêmes règles de calcul.

Exercice 31. Combien y a-t-il de matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $A^3 = 2I_n$? Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 32. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres. [*Indication.* on pourra écrire que si une matrice commute avec toutes les autres, alors elle commute avec les matrices élémentaires $E_{i,j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, c'est-à-dire les matrices qui ont un unique coefficient non nul, égal à 1.]

4.6 Matrices carrées inversibles

Définition 4.6.1. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est* **inversible** *s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = BA = I_n$. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

On ne peut donc s'intéresser à l'inversibilité (éventuelle) d'une matrice que si celle-ci est carrée.

♦ **Exercice 35.** 1) Donner des exemples de matrices inversibles/non inversibles.
2) Montrer que si la matrice A est inversible, alors son inverse est unique.

Ainsi, si la matrice A est inversible, l'unique matrice B vérifiant $AB = BA = I_n$ est appelée l'***inverse*** de A et est notée A^{-1}.

Proposition 4.6.2. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L a matrice A est inversible si et seulement si pour toute matrice colonne Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice colonne X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = Y$.*

Autrement dit, la matrice A est inversible si et seulement si pour n'importe quel choix de second membre Y, le système linéaire $AX = Y$ admet un unique n-uplet X solution. Ou encore : la matrice A est inversible si et seulement si l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

est bijective. Dans la pratique, si pour tout couple (X, Y) de matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on parvient à résoudre le système $AX = Y$, alors on aura déterminé une matrice B vérifiant $AX = Y \iff X = BY$, donc on aura prouvé que A est inversible et on aura déterminé l'inverse B de A.

♦ **Exercice 36.** 1) Démontrer cette proposition.
2) Déterminer si la matrice suivante est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'il est en général fastidieux de calculer l'inverse d'une matrice inversible. Lorsque l'ordre n de la matrice est élevé, on confie ces calculs à un ordinateur ou une calculatrice...

Si la matrice A est inversible, un système linéaire $AX = Y$ est appelé un **système de Cramer** : il admet donc une unique solution.

Corollaire 4.6.3. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*

En particulier, une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

♦ **Exercice 37.** Démontrer ce corollaire.

Proposition 4.6.4. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est inversible, et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

♦ **Exercice 38.** Démontrer cette proposition.

Exercice 33. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $A_\theta A_{\theta'} = A_{\theta'} A_\theta$ pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.
2) Est-il vrai en général que $AB = BA$ si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Illustrer par des exemples.
3) Pour tout entier relatif n et tout réel θ, calculer la puissance $n$ième de A_θ.

Exercice 34. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Calculer A^2, A^3 et A^4.
2) Pour tout entier relatif n, calculer la puissance $n$ième de A.

4.7 Interprétation matricielle de la méthode de Gauss

4.7.1 Matrices d'opérations élémentaires

Remarquons qu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice donnée A revient à multiplier la matrice A à gauche par une matrice inversible.

♦ **Exercice 39.** Démontrer cette assertion.

Par conséquent, si la matrice A est inversible, on obtiendra toujours des matrices inversibles en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A.

4.7.2 Méthode de Gauss

On a vu dans le premier paragraphe qu'en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire, on pouvait le transformer en un système équivalent de type «triangulaire»(entre guillemets parce qu'ici, le système n'a pas nécessairement même nombre de lignes que d'inconnues). Or on vient de remarquer qu'effectuer une opération élémentaire sur une matrice revient à la multiplier à gauche par une certaine matrice inversible. On peut donc interpréter la méthode du pivot de Gauss en termes matriciels en disant : soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; il existe des matrices d'opérations élémentaires $M_1, \dots, M_q$ telles que la matrice $M = M_q \dots, M_2 M_1 A$ soit de type triangulaire (i.e., les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M sont nuls pour $i > j$). On peut même améliorer un peu ce résultat lorsque la matrice A est inversible :

Proposition 4.7.1. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible. Il existe des matrices d'opérations élémentaires $M_1, M_2, \dots, M_q$ (qui sont donc des matrices inversibles) telles que : $M_q \dots M_2 M_1 A = I_n$.*

♦ **Exercice 40.** Démontrer cette proposition.

4.7.3 Application de la méthode de Gauss au calcul de l'inverse d'une matrice inversible

La proposition précédente donne une nouvelle méthode pour déterminer si une matrice est inversible. En effet, si A est inversible, on peut trouver des matrices $M_1, \dots, M_q$ d'opérations élémentaires vérifiant $M_q \dots M_1 A = I_n$. On a donc $A^{-1} = M_q \dots, M_1 = M_q \dots M_1 I_n$. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'expliciter les matrices $M_1, \dots, M_q$ pour calculer A^{-1} ; il suffit d'appliquer à la matrice I_n les mêmes opérations sur les lignes que celles effectuées sur A pour obtenir I_n.

♦ **Exercice 41.** À l'aide de cette méthode, retrouver l'inverse de la matrice A de l'exercice 36.

Exercice 35. Déterminer si chacune des matrices suivantes est inversible, et calculer le cas échéant son inverse :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 5

Applications linéaires en dimension finie et matrices

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Matrice d'un vecteur, matrice d'une application linéaire dans des bases

5.1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 5.1.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et x un vecteur de E. Il existe donc un unique n-uplet de scalaires $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$*
(les coefficients $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$). On appelle **matrice du vecteur x dans la base** $\mathcal{B}$ *la matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:*

$$X = \mathrm{Mat}(x, \mathcal{B}) = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}(x, \mathcal{B}) \end{array}$$

est un isomorphisme.

⚠ **Attention :** la phrase «on considère la matrice du vecteur x» n'a pas de sens ; il faut préciser quelle base de E on choisit.

Exercice 36. * On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$

telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, la matrice colonne de P dans la base $\mathcal{B}$ soit :

$$C = \begin{pmatrix} P(-1) \\ P(0) \\ P(1) \end{pmatrix}.$$

Définition 5.1.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, p un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle* **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base** *$\mathcal{B}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont les colonnes sont constituées par les coefficients des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ décomposés dans la base $\mathcal{B}$. Plus précisément, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, si l'on note*

$$\mathrm{Mat}(u_j, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

la matrice du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}((u_1, \dots, u_p), \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,j} & \dots & u_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{i,1} & \dots & u_{i,j} & \dots & u_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & \dots & u_{n,j} & \dots & u_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

5.1.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Théorème 5.1.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie, f une application linéaire de E dans F. Alors f est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base de E. Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, et si $(u_1, \dots, u_p)$ est un système quelconque de p vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire f vérifiant $f(e_j) = u_j$ pour tout $j \in \{1, \dots p\}$.*

♦ **Exercice 42.** Démontrer ce théorème.

Remarque. Ce résultat est important ; il dit que pour connaître complètement une application linéaire en dimension finie, il suffit de consigner dans une matrice les coordonnées dans une base de F des images des vecteurs d'une base de E. C'est ce qui va permettre d'introduire la notion de matrice d'une application linéaire dans des bases.

Corollaire 5.1.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F ont même dimension si et seulement si il existe un isomorphisme de E sur F. On dit dans ce cas que E et F sont* **isomorphes**.

Remarque. Deux espaces «isomorphes» ont étymologiquement «même forme». En d'autres termes, deux espaces isomorphes sont «presque» les mêmes, la seule différence étant la façon de noter les éléments. Ce corollaire justifie *a posteriori* l'intérêt porté aux espaces $\mathbb{K}^n$.

♦ **Exercice 43.**
1) Donner un exemple d'isomorphisme entre les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$.
2) Démontrer ces résultats.

Définition 5.1.5. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle. On note $p = \dim E$ et $n = \dim F$. Une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ de F étant fixées, on appelle* **matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$**, *et on note $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, ou $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$, la matrice de la famille de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ exprimés dans la base $\mathcal{B}_F$, i.e.*

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \mathrm{Mat}((f(e_1), \ldots, f(e_p)), \mathcal{B}_F).$$

D'après le théorème précédent, avec les notations ci-dessus, l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \end{array}$$

est une bijection.

⚠ **Attention :** là encore, la phrase «la matrice de f» n'a pas de sens ; il faut préciser des bases pour cela.

Remarque. Lorsque f est un endomorphisme (i.e., lorsque $E = F$), on prend en général la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée ; on note alors la matrice de f simplement $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$.

Exercice 37 (écriture de la matrice d'une application linéaire dans des bases)**.**
1) Quelle est la matrice de l'application nulle dans des bases quelconques ? quelle est la matrice de l'identité ?
2) Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et (u_1, u_2, u_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On suppose que f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ déterminée par : $f(e_1) = u_1 + 5u_3$, $f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Écrire la matrice de f dans les bases (e_1, e_2) et (u_1, u_2, u_3).
3) Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $f(P) = P - P'$. L'application f est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$.
4) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, F et G deux sous-espaces vectoriels de E non réduits à $\{0_E\}$. Soient $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. On note $\mathcal{B}$ la base de E obtenue en concaténant les familles $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection sur F parallèlement à G et de la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 38 (recherche d'une base dans laquelle la matrice de f a une allure préalablement fixée)**.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{K}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.2 Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Proposition 5.2.1. *Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle : E, de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E$, et F, de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, et λ un élément de $\mathbb{K}$. On a alors :*

$$\mathrm{Mat}(f+g, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \quad ; \quad \mathrm{Mat}(\lambda f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda\, \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Ainsi, l'application φ ci-dessus est un **isomorphisme** *entre les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Remarque. Les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ (tous les coefficients de la matrice $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la $i$ème ligne et $j$ème colonne qui vaut 1) forment clairement une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On en déduit que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie égale à np. L'isomorphisme ci-dessus prouve que, si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, alors le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie égale à np.

Proposition 5.2.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle, munis de bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ respectivement, et f une application linéaire de E dans F. Alors :*

$$\mathrm{Mat}(f(x),\mathcal{B}_F)=\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\,\mathrm{Mat}(x,\mathcal{B}_E).$$

On pourrait résumer cette proposition en disant qu'en dimension finie, évaluer une application linéaire en un vecteur (c'est-à-dire calculer $f(x)$) revient à effectuer un produit matriciel (d'une matrice «rectangulaire» par une matrice colonne).

⧫ **Exercice 44.** Démontrer ces résultats.

Exercice 39. Soient $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}=(u_1,u_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$, f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire f.

La proposition qui suit est fondamentale ; elle permet de comprendre pourquoi on a défini le produit matriciel d'une façon qui pouvait sembler étrange à première vue.

Proposition 5.2.3. *On se donne trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle : E, de dimension q, muni d'une base $\mathcal{B}_E$, F, de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_F$, G, de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_G$. Soient f une application linéaire de E dans F, et g une application linéaire de F dans G. On a alors :*

$$\mathrm{Mat}(g\circ f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G)=\mathrm{Mat}(g,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)\,\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F).$$

On peut illustrer cette composition par un diagramme (*llustration*).

En utilisant l'isomorphisme φ de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ défini plus haut, cette proposition s'écrit :

$$\forall (f,g)\in\mathcal{L}(E,F)^2,\quad \varphi(g\circ f)=\varphi(g)\varphi(f).$$

On pourrait résumer cette proposition en remarquant qu'**un calcul de composée d'applications linéaires revient à un calcul de produit matriciel**.

Cas particulier : si $E=F$, donc si f est un endomorphisme de E, on a pour tout entier naturel n (f^n désigne ici une composée), en itérant la proposition précédente :

$$\mathrm{Mat}(f^n,\mathcal{B}_E)=(\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}_E))^n.$$

Proposition 5.2.4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $\mathcal{B}$ une base de E, f un endomorphisme de E et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors :*

$$f \textit{ bijectif} \iff A \textit{ inversible.}$$

Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}(f^{-1},\mathcal{B})=\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B})^{-1}=A^{-1}.$$

À l'aide de l'isomorphisme φ rencontré plus haut, on peut reformuler ce résultat en disant que si f est un automorphisme de E, alors on a

$$\varphi(f^{-1}) = \varphi(f)^{-1}.$$

♦ **Exercice 45.** Démontrer ces propositions.

5.3 Le théorème du rang

Définition 5.3.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On appelle* **rang** *de f la dimension du sous-espace vectoriel* $\operatorname{Im} f$ *de F.*

Définition 5.3.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $(C_1, \ldots, C_p)$ les colonnes de A ; en particulier, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, le vecteur colonne C_j est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On appelle* **rang** *de A le rang de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$.*

♦ **Exercice 46.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $\operatorname{rang} A \leqslant 1$;
(ii) il existe des matrices $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = XY$.

Proposition 5.3.3. 1) *On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant (à gauche ou à droite) par un isomorphisme.*
2) *Soient*
- *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$, $\mathcal{B}_E$ une base de E,*
- *F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}_F$ une base de F,*
- *f une application linéaire de E dans F,*
- *A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.*

Alors on a :

$$\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} A.$$

3) *On ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant (à gauche ou à droite) par une matrice inversible.*
4) *On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant l'une des opérations élémentaires suivantes :*
- *échange de deux lignes ou deux colonnes ;*
- *multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire non nul ;*
- *ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres lignes, ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes.*

♦ **Exercice 47.** Démontrer cette proposition.

Remarques.
1) On vient de montrer que le rang d'une matrice A est le rang de n'importe quelle application linéaire représentée par A, ou encore que le rang d'une application linéaire f est le rang de n'importe quelle matrice représentant f.
2) On dispose d'une méthode pour déterminer dans la pratique le rang d'une matrice : il s'agit d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes jusqu'à obtenir une matrice dont on peut lire facilement le rang. On peut pour cela utiliser par exemple la méthode du pivot de Gauss.

On admet le théorème suivant, qui est fondamental.

Théorème 5.3.4 (Théorème du rang)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, f une application linéaire de E dans F. Alors on a :*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rang} f = \dim E.$$

⚠ **Attention :** même lorsque $E = F$, le théorème du rang ne dit pas que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E. Il se peut que le noyau et l'image d'un endomorphisme ne soient pas en somme directe. Rappelons par exemple que si D est l'endomorphisme de dérivation

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

alors on a $\operatorname{Im} D \cap \operatorname{Ker} D = \operatorname{Vect}(1) = \{\text{polynômes constants}\} \neq \{0_{\mathbb{K}_n[X]}\}$.

Proposition 5.3.5. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, vérifiant* $\dim E = \dim F$. *Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :*

$$f \textit{ injective } \Longleftrightarrow f \textit{ surjective } \Longleftrightarrow f \textit{ bijective }.$$

Remarque. On observe des analogies entre cette proposition et le fait que si f est une application entre deux ensembles finis de même cardinal, alors f est injective si et seulement si f est surjective, si et seulement si f est bijective. On en déduit :

Proposition 5.3.6. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) *A est inversible (i.e., il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = BA = I_n$) ;*
(ii) *il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$;*
(iii) *il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$;*
(iv) *pour toute matrice Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = Y$.*

♦ **Exercice 48.** Démontrer ces résultats.

Exercice 40. Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $3XP' + (X^2 - 1)P''$.
1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et écrire sa matrice dans la base canonique.
2) L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?
3) Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 41. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer des bases du noyau et de l'image de f.
2) La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 42. Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que p est une projection de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Chapitre 6

Déterminant

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Introduction

Le *déterminant* d'une matrice carrée peut être vu comme une généralisation (ou une formalisation) de la notion de volume. Nous tentons ici de motiver sa définition (dans le cas des matrices carrées d'ordre 2).

On considère ici les vecteurs comme introduits dans les classes antérieures et on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\vec{i},\vec{j})$ «orthonormée directe», où $\vec{i}=(1,0)$ et $\vec{j}=(0,1)$ (le terme «orthonormée directe» sera défini de manière rigoureuse en 2ème année).

Considérons deux vecteurs $\vec{u}=(x_1,y_1)$ et $\vec{v}=(x_2,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ (écrit dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j})$). On appelle *parallélogramme engendré* par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'ensemble $\{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\ ;\ (\alpha,\beta)\in[0,1]^2\}$.

Illustration.

Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de ce parallélogramme. On sait qu'elle est égale à la longueur b d'un côté (par exemple $\|\vec{u}\|$), multipliée par la hauteur h correspondante *(faire une figure)*; on a $\mathcal{A}=b\times h$. Pour obtenir $\mathcal{A}$ en fonction des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il suffit alors d'introduire le vecteur $\vec{u'}=(-y_1,x_1)$. Ce vecteur est en effet orthogonal à $\vec{u}$ et de même norme, de sorte que

$$|\vec{v}\,.\,\vec{u'}| = h\times\|\vec{u}\| = h\times b = \mathcal{A} \quad \textit{(faire une figure).}$$

On a donc

$$\mathcal{A} = |x_1y_2 - y_1x_2|.$$

Ce petit calcul justifie la définition suivante :

Définition 6.1.1 (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2)**.** *Soient $a,b,c,d\in\mathbb{K}$. On définit le* **déterminant** *de la matrice carrée $A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}$, par*

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad-bc.$$

Autrement dit, $\det(A)$ représente le volume du parallélogramme engendré par les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de A.

On peut de même introduire le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 comme étant le volume du *parallélépipède* engendré par les vecteurs colonnes d'une telle matrice. Nous allons ici définir «directement» le déterminant d'une matrice carré en toute généralité (d'ordre quelconque), sans justifier que la notion étend bien le volume dans le cas des matrices d'ordre 3…

6.2 Définition du déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \ldots, C_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$ sont les ***colonnes*** de A, et $L_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}, \ldots, L_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ sont ses ***lignes***.

Définition 6.2.1. *Soit φ une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.*
1) *On dit que φ est* n-**linéaire** *si pour toutes matrices colonnes $C_1, \ldots, C_n, C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a*

$$\varphi(C_1, \ldots, C_i + \lambda C, \ldots, C_n) \;=\; \varphi(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) \;+\; \lambda\, \varphi(C_1, \ldots, C, \ldots, C_n).$$

Autrement dit, φ est n-linéaire si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et toutes matrices colonnes $C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \psi_i \;:\; \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & \varphi(C_1, \ldots, C_{i-1}, X, C_{i+1}, \ldots, C_n) \end{array}$$

est linéaire.

2) *On dit que φ est* **alternée** *si pour toutes matrices colonnes $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a*

$$\varphi(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = 0$$

dès qu'il existe $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $C_i = C_j$. Autrement dit, φ est alternée si $\varphi(A) = 0$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant deux colonnes identiques.

Remarque. Dire que φ est alternée est équivalent à dire que pour toutes matrices colonnes $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $\varphi(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\,\varphi(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$ (à vérifier). Pour cette raison, on dit aussi que φ est *anti-symétrique*.

On admet le théorème (très subtile) suivant :

Théorème-Définition 6.2.1.
1) *Il existe une unique application n-linéaire et alternée, appelée* **déterminant** *et notée* $\det$*, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que* $\det(I_n) = 1$.
2) *Cette application vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *on a*

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(AB) = \det(A)\det(B);$$

(ii) *si A est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), alors le déterminant de A est égal au produit des coefficients diagonaux de A. Autrement dit, si* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *ou si* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, *alors*

$$\det(A) = a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}.$$

En particulier, $\det(I_n) = 1 \times \cdots \times 1 = 1$ *ce qui est cohérent avec* 1).

⚠ **Attention :** la notion de déterminant n'a de sens que pour les matrices carrées.

Remarques.
1) Si A est une matrice diagonale, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux (d'après (ii)).
2) D'après la propriété (i), on a en particulier,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A^k) = (\det(A))^k.$$

3) Comme pour le déterminant des matrices carrées d'ordre 2, on note généralement le déterminant d'une matrice carrée (d'ordre quelconque) écrite sous forme de tableau avec des «barres verticales» :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

4) Pour les matrices triangulaires d'ordre 2, la définition précédente coïncide avec la définition 6.1.1 !

6.3 Opérations élémentaires et déterminant

Rappelons qu'effectuer une opération élémentaire sur les matrices correspond à la multiplication (à droite ou à gauche) par certaines matrices inversibles (voir l'exercice 39 à ce sujet). Explicitons ici ces matrices.
Soient $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, avec $i \neq j$, et introduisons les matrices suivantes :

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}\,; \qquad D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}\,; \qquad T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}\,.$$

Alors :
- Effectuer l'opération éléméntaire $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice $P_{i,j}$;
- Effectuer l'opération éléméntaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$) revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice $D_i(\lambda)$;
- Effectuer l'opération éléméntaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$) revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice $T_{i,j}(\lambda)$.

♦ **Exercice 49.** Vérifier ces assertions (brièvement) et montrer :

$$\det(P_{i,j}) = -1; \qquad \det(D_i(\lambda)) = \lambda; \qquad \det(T_{i,j}(\lambda)) = 1.$$

De ces observations, on déduit un **calcul pratique du déterminant** :

À partir d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on effectue les opérations élémentaires nécessaires jusqu'à obtenir une matrice triangulaire (supérieure par exemple). On calcule facilement le déterminant de cette dernière : c'est le produit de ses coefficients diagonaux. On sait d'après la méthode du pivot de Gauss que cela est toujours possible. On connaît le déterminant de chacune des matrices correspondant aux opérations élémentaires. De plus, comme le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants, on obtient le déterminant de A...

⚠ **Attention :** effectuer les opérations élémentaires «$L_i \leftrightarrow L_j$» ou «$L_i \leftarrow \lambda L_j$» change le déterminant (voir l'exercice précédent) ! En pratique, on évite ces opérations pour éviter les erreurs et on privilégie l'opération élémentaire «$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$» qui ne change pas le déterminant.

♦ **Exercice 50.** Calculer le déterminant de la matrice suivante à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

♦ **Exercice 51.** Montrer : $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det({}^tA)$.

Le théorème suivant est crucial :

Théorème 6.3.1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$A \textit{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

♦ **Exercice 52.** Démontrer ce théorème.

Remarque. Pour montrer qu'une matrice est inversible, il suffit donc de montrer que son déterminant est non nul. Comme notre principale méthode pour montrer qu'une matrice est inversible est d'effectuer des opérations élémentaires sur celle-ci, le gain est à ce stade peut paraître mineur...

Toutefois, si la question est seulement de savoir si une matrice est inversible (pas de calculer son inverse), toutes les opérations élémentaires sont «autorisées» et le calcul du déterminant par les opérations élémentaires peut s'avérer bien utile, d'autant que nous allons voir d'autres méthodes pour le calculer....

Corollaire 6.3.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un automorphisme (ou, de manière équivalente, f est un inversible) si et seulement si le déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base de E est non nul.*

♦ **Exercice 53.** Justifier ce corollaire.

6.4 Développement par rapport à une rangée

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Par n-linéarité du déterminant (linéarité par rapport à la $j$ème colonne), on a :

$$\det(A) = \det(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_j, C_{j+1}, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j},$$

où

$$A_{i,j} = \det(C_1, \dots, C_{j-1}, e_j, C_{j+1}, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En utilisant maintenant le caractère alterné du déterminant, on obtient :

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

♦ **Exercice 54.** Démontrer cette assertion.

Définition 6.4.1. *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
1) *Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on appelle* **mineur de la place (i, j) dans** *A le déterminant $\Delta_{i,j}$ d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant dans A la ième ligne et la $j$ème colonne :*

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

2) *Pour* $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$*, on appelle* **cofacteur de la place** (i,j) **dans** A*, et on note* $A_{i,j}$ *le produit de* $(-1)^{i+j}$ *par le mineur de la place* (i,j) *dans* A *:*

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

D'après ce qu'on vient de voir, on a :

Proposition 6.4.2 (Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne)**.** *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On a :*
1) $\forall\, j \in \{1,\ldots,n\},\ \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$ *(développement de* $\det(A)$ *par rapport à la* j*ème colonne) ;*
1) $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\},\ \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$ *(développement de* $\det(A)$ *par rapport à la* i*ème ligne).*

♦ **Exercice 55.** Retrouver le déterminant de l'exercice 50 en développant par rapport à une ligne ou une colonne.

Remarques.
1) Il est souvent utile de développer un déterminant par rapport une ligne ou une colonne qui comporte peu de termes non nuls.
2) Pour le calcul numérique des déterminants, il existe des méthodes nettement plus rapides que celle consistant à développer par rapport à une ligne ou une colonne. En général, l'utilisation des opérations élémentaires est la méthode la plus efficace. Pour n petit (par exemple $n = 3$), développer par rapport à une ligne ou une colonne peut s'avérer toutefois commode lorsqu'il y a beaucoup de zéros (cf. 1)).
Pour $n = 2$, le mieux est d'apprendre par cœur la formule donnée dans la définition 6.1.1 !

6.5 Comatrice

Définition 6.5.1. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On appelle* **comatrice** *de* A *la matrice carrée d'ordre* n*, notée com*(A)*, définie par :*

$$\mathrm{com}(A) = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

où $A_{i,j}$ *est le cofacteur de la place* (i,j) *de* A*.*

On admet le théorème suivant (pas difficile mais un peu technique à démontrer) :

Théorème 6.5.2.

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad A\,{}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A)A = \det(A)\, I_n.$$

Corollaire 6.5.3.

$$\forall\, A \in GL_n(\mathbb{K}),\quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A).$$

♦ **Exercice 56.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Pour $n = 2$, si $ad - bc \neq 0$. Vérifier que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Remarque. La formule précédente, donnant A^{-1} à l'aide de $\mathrm{com}(A)$, est en pratique quasiment inutilisable dès que $n \geqslant 3$. En effet, l'application de cette formule nécessite a priori le calcul d'un déterminant d'ordre n ($\det(A)$) et de n^2 déterminants d'ordre $n-1$ (les cofacteurs de A). La formule présente en revanche un intérêt théorique : on dispose d'une formule générale (non récursive) pour l'inverse d'une matrice inversible.

Exercice 43. Calculer le déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & \alpha & -1 & & \vdots \\ a_3 & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix},$$

où $\alpha, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. [*Indication.* On pourra établir une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}, pour $n \geqslant 2$, et raisonner par récurrence.]

Exercice 44 (Déterminant de Vandermonde)**.** ⋆ Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle ***déterminant de Vandermonde*** le déterminant suivant :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1) Calculer $V(x_1)$, $V(x_1, x_2)$, $V(x_1, x_2, x_3)$.
2) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j).$$

En déduire que $V(x_1, \ldots, x_n)$ est non nul si et seulement si $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts.