

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
LABORATOIRE J.-A. DIEUDONNÉ

Propriétés géométriques et cohomologiques de certaines résolutions de singularités quotients

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée et soutenue publiquement par

Samuel BOISSIÈRE

le 11 octobre 2010 devant le jury composé de

Arnaud BEAUVILLE	Université de Nice	Rapporteur
Antoine DUCROS	Université de Paris 6	Examinateur
Bert van GEEMEN	Université de Milan	Rapporteur
Laurent MANIVEL	Institut Fourier	Rapporteur
Adam PARUSINSKI	Université de Nice	Examinateur
Christoph SORGER	Université de Nantes	Examinateur

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET COHOMOLOGIQUES DE CERTAINES RÉOLUTIONS DE SINGULARITÉS QUOTIENTS

par

Samuel Boissière

Résumé. — Ce texte présente les différentes recherches que j'ai effectuées entre le début de ma thèse, soutenue le 27 septembre 2004 à Nantes sous la direction de Christoph Sorger, et aujourd'hui. Ces travaux concernent essentiellement quatre domaines relativement distincts : les *schémas de Hilbert de points sur des surfaces*, principalement leur cohomologie et les classes caractéristiques de leurs fibrés vectoriels naturels ; les *conjectures de Ruan*, au niveau de la description de la géométrie de certaines résolutions de singularités quotients ; les *variétés symplectiques holomorphes* et leurs groupes d'automorphismes ; la *géométrie effective* avec l'étude de surfaces algébriques contenant un grand nombre de droites.

Table des matières

Introduction.....	7
Partie I. Formules universelles pour les schémas de Hilbert de points sur une surface.....	9
1. Schémas de Hilbert de points.....	9
2. Espace de Fock.....	9
3. Cohomologie des schémas de Hilbert de points.....	10
4. Formules universelles.....	11
5. Formules explicites sur le plan affine.....	14
6. Implémentation : vers les coefficients manquants.....	16
Partie II. De la correspondance de McKay aux conjectures de Ruan.....	19
7. La correspondance de McKay.....	19
8. Singularités polyédrales.....	20
9. Les correspondances de McKay en situation symplectique.....	21
10. Comportement multiplicatif.....	23
11. Cohomologie orbifold.....	24
12. Rappels sur les invariants de Gromov–Witten.....	25
13. Les conjectures de Ruan.....	26
14. Cohomologie orbifold des espaces projectifs à poids.....	27
15. Calculs de déformations quantiques.....	29
Partie III. Automorphismes des variétés symplectiques holomorphes irréductibles.....	33
16. Variétés symplectiques holomorphes irréductibles.....	33
17. Automorphismes des schémas de Hilbert de points sur une surface $K3$	34
18. Automorphismes des variétés de Kummer généralisées.....	35
19. Variétés d’Enriques.....	36
Partie IV. Géométrie effective : droites sur des surfaces.....	41
20. Surfaces ayant un grand nombre de droites.....	41
21. Application à l’étude du groupe de Néron–Severi d’une surface.....	42
Partie V. Publications.....	45
Références.....	47

Introduction

J'ai divisé le corps principal de ce mémoire en quatre parties, représentant les quatre thématiques principales sur lesquelles j'ai travaillé ces dernières années. Le plan du mémoire ne correspond pas à la chronologie de mes travaux, mais plutôt aux interactions entre les différents domaines.

La Partie I est consacrée à l'étude de la cohomologie des schémas de Hilbert de points sur une surface : cette algèbre de cohomologie est gouvernée par une algèbre d'opérateurs vertex qui permet d'étudier tous les schémas de Hilbert de points globalement. Une fois comprise la structure de l'algèbre, on cherche à y calculer les classes caractéristiques de fibrés vectoriels tels que les fibrés tautologiques et le fibré tangent. L'étude des formules universelles du fibré tangent, le calcul de ses classes de Chern et de son caractère de Chern dans le cas du plan affine sont issus de ma thèse. La généralisation de la méthode aux autres classes caractéristiques a été faite en postdoc.

La Partie II commence par un raccourci historique sur l'évolution des idées ayant mené de la correspondance de McKay aux conjectures de Ruan, poursuit sur quelques résultats sur les résolutions crépantes de singularités polyédrales, et se termine avec des travaux sur la cohomologie orbifolde et les déformations quantiques des algèbres de cohomologie des résolutions de singularités des espaces projectifs à poids. La compréhension de la cohomologie des schémas de Hilbert de points a été un moteur important dans le développement de ce domaine, par exemple concernant les structures multiplicatives intervenant dans la correspondance de McKay. Les résultats de comparaisons des correspondances de McKay pour les schémas de Hilbert de points sont issus de ma thèse. Les travaux sur les singularités polyédrales ont été faits en postdoc. Tous les travaux sur les espaces projectifs à poids ont été faits à mon arrivée à Nice comme maître de conférences.

La Partie III revient en partie sur les schémas de Hilbert de points et les variétés de Kummer généralisées du point de vue des variétés symplectiques holomorphes, en s'intéressant à leurs groupes d'automorphismes et leur action sur la cohomologie. La notion de variété d'Enriques est ensuite dégagée. Ce thème de travail est le plus récent, commencé depuis mon arrivée à Nice.

La Partie IV concerne le problème classique des droites sur des surfaces projectives : comment trouver des surfaces en contenant beaucoup, et s'en servir pour étudier leur géométrie. Ces résultats ont été obtenus en postdoc.

La Partie V contient les références de mes articles, publiés ou en cours de publication, auxquels ce mémoire fait référence. La bibliographie qui suit fait l'objet d'une numérotation différente.

Je remercie Arnaud Beauville, Antoine Ducros, Bert van Geemen, Laurent Manivel, Adam Parusinski et Christoph Sorger pour leur disponibilité. Un grand merci aussi aux co-auteurs de mes articles achevés ou en cours, Etienne Mann, Marc Nieper-Wißkirchen, Fabio Perroni, Alessandra Sarti et Olivier Serman. Je remercie le groupe de Géométrie Algébrique de l'Université de Mayence, en particulier Manfred Lehn, pour la très bonne année que j'y ai passée en postdoc. Je remercie enfin tous les membres du laboratoire J. A. Dieudonné où j'ai bénéficié d'une ambiance de travail sereine.

PARTIE I

FORMULES UNIVERSELLES POUR LES SCHEMAS DE HILBERT DE POINTS SUR UNE SURFACE

1. Schémas de Hilbert de points

Soit S une surface analytique complexe connexe, compacte et lisse. Pour tout entier $n \geq 0$, notons $S^{(n)} := S^n / \mathfrak{S}_n$ le quotient symétrique de S , où le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit par permutation des facteurs, $\pi: S^n \rightarrow S^{(n)}$ l'application quotient, $\Delta := \bigcup_{i,j} \Delta_{i,j}$ la réunion de toutes les diagonales $\Delta_{i,j} := \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i = x_j\}$ et $D := \pi(\Delta)$ son image dans $S^{(n)}$. La variété $S^{(n)}$ paramètre les cycles analytiques de dimension zéro et de longueur n sur S , et est singulière en chaque point de Δ . Notons $S^{[n]}$ (ou $\text{Hilb}^n(S)$) l'espace de Douady (schéma de Hilbert lorsque S est algébrique) paramétrant les sous-espaces analytiques de S de dimension 0 et de longueur n . $S^{[n]}$ est une variété analytique complexe, compacte et lisse de dimension $2n$ (observons que $S^{[0]}$ est un point et $S^{[1]} \cong S$). Le morphisme de Douady-Barlet (de Hilbert-Chow dans le cas algébrique) $\rho: S^{[n]} \rightarrow S^{(n)}$ est projectif et biméromorphe, c'est une résolution des singularités dont nous notons $E := \rho^{-1}(D)$ le diviseur exceptionnel. Nous nous référons à Grothendieck [30] et Fogarty [21, 22] dans le cas algébrique, à Douady [18] et de Cataldo & Migliorini [11] dans le cas analytique.

2. Espace de Fock

Soit $A := \bigoplus_{i=0}^{4n} A^i$ une super-algèbre de Frobenius graduée de dimension finie sur \mathbb{C} . Les ensembles A^i sont des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{C} et A est munie :

- d'une super-structure (*i.e.* graduation par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) donnée par la décomposition

$$A^{\text{pair}} := \bigoplus_{i=0}^{2n} A^{2i} \text{ et } A^{\text{impair}} := \bigoplus_{i=0}^{2n-1} A^{2i+1};$$

- d'une multiplication graduée commutative et associative $A \otimes A \rightarrow A$: si $a \in A^i$ et $b \in A^j$, alors $a \cdot b \in A^{i+j}$ et $a \cdot b = (-1)^{i \cdot j} b \cdot a$;
- d'une forme linéaire $T: A \rightarrow \mathbb{C}$ de degré $-4n$ telle que la forme bilinéaire super-symétrique $\langle a, b \rangle := T(a \cdot b)$ est non dégénérée ; en notant $|\cdot|$ le degré d'un élément homogène, la super-symétrie s'écrit $\langle a, b \rangle = (-1)^{|a| \cdot |b|} \langle b, a \rangle$.

Considérons l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_A := A[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\kappa$ où le crochet de Lie est défini par :

$$\begin{aligned} [\kappa, -] &= 0 \quad (\kappa \text{ est central}), \\ [a \otimes \phi, b \otimes \psi] &= -\text{res}_{t=0}(\phi d\psi) \cdot \langle a, b \rangle \cdot \kappa, \end{aligned}$$

pour $a, b \in A$ et $\phi, \psi \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Ce crochet est super-antisymétrique au sens où l'on a : $[a \otimes \phi, b \otimes \psi] = -(-1)^{|a| \cdot |b|} [b \otimes \psi, a \otimes \phi]$. Pour $a \in A$ et $n \in \mathbb{Z}$, notons $a_n := a \otimes t^n$. Le crochet de Lie est entièrement caractérisé par les relations :

$$\begin{aligned} [\kappa, a_n] &= 0, \\ [a_n, b_m] &= n \cdot \delta_{n, -m} \cdot \langle a, b \rangle \cdot \kappa, \end{aligned}$$

où δ désigne le symbole de Kronecker.

Soit $I \subset U(\mathfrak{h}_A)$ l'idéal à gauche dans l'algèbre enveloppante de \mathfrak{h}_A engendré par les éléments de la forme a_n pour $n \leq 0$ et l'élément $\kappa - 1$. L'espace de Fock est par définition le quotient (à droite) $\mathbb{F}(A) := U(\mathfrak{h}_A)/I$. C'est une représentation de \mathfrak{h}_A , engendrée par la classe notée $|0\rangle$ de $1 \in U(\mathfrak{h}_A)$. Notons, pour cette représentation $\mathfrak{h}_A \rightarrow \text{End}(\mathbb{F}(A))$, $\mathfrak{q}_n(a)$ l'endomorphisme correspondant à l'élément a_n . On a donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_n(a)|0\rangle &= 0 \text{ si } n \leq 0, \\ \kappa|0\rangle &= |0\rangle, \\ [\mathfrak{q}_n(a), \mathfrak{q}_m(b)] &= \mathfrak{q}_n(a) \circ \mathfrak{q}_m(b) - (-1)^{|a| \cdot |b|} \mathfrak{q}_m(b) \circ \mathfrak{q}_n(a) \\ &= n\delta_{n,-m} \cdot \langle a, b \rangle \cdot \text{id}_{\mathbb{F}(A)}. \end{aligned}$$

On constate aisément que cette représentation est irréductible [40].

On munit $\mathbb{F}(A)$ d'une double graduation par poids et degré en déclarant qu'un endomorphisme $\mathfrak{q}_n(a)$ est de poids n et de degré $2(n-1) + |a|$, et que $|0\rangle$ est de poids et degré nuls. La décomposition en poids est alors notée $\mathbb{F}(A) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} A^{[n]}$.

Remarque 2.1. — Lehn & Sorger [42] ont construit sur $A^{[n]}$ une structure de super-algèbre de Frobenius graduée. Cette structure supplémentaire apparaîtra (sous une forme un peu différente) dans la section II puisqu'elle s'identifie naturellement à la cohomologie orbifolde du champ quotient $[S^n/\mathfrak{S}_n]$.

Pour $n, m \geq 0$, on a $\mathfrak{q}_n(a) \circ \mathfrak{q}_m(b) = (-1)^{|a| \cdot |b|} \mathfrak{q}_m(b) \circ \mathfrak{q}_n(a)$ donc l'algèbre $\mathbb{F}(A)$ est symétrique en ce qui concerne A^{pair} et antisymétrique pour A^{impair} . En notant Aq^m l'algèbre A considérée de poids m (au lieu de 1) on a donc :

$$\mathbb{F}(A) \cong S^* \left(\bigoplus_{m \geq 1} Aq^m \right) \cong \bigotimes_{m \geq 1} S(A^{\text{pair}}q^m) \otimes \bigotimes_{m \geq 1} \Lambda(A^{\text{impair}}q^m),$$

où $S(\cdot)$ désigne l'algèbre symétrique, $\Lambda(\cdot)$ l'algèbre alternée et $S^*(\cdot)$ l'algèbre supersymétrique (*i.e.* l'algèbre symétrique sur un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel).

3. Cohomologie des schémas de Hilbert de points

Les résultats rappelés ici sont dus à Göttsche [27], Nakajima [47] et Grojnowski [29] pour les surfaces algébriques, étendus aux surfaces analytiques par de Cataldo & Migliorini [11].

Soit $H^*(S^{[n]}) := \bigoplus_{i=0}^{4n} H^i(S^{[n]})$ l'algèbre de cohomologie singulière à coefficients complexes de $S^{[n]}$, la structure d'anneau étant donnée par le cup-produit. L'algèbre de cohomologie totale des espaces de Douady de points sur S est $\mathbb{H}_S := \bigoplus_{n \geq 0} H^*(S^{[n]})$. L'unité de $H^*(S^{[0]}) \cong \mathbb{C}$ est appelée le *vacuum* et est notée $|0\rangle$.

L'espace \mathbb{H}_S est muni d'une double graduation : les éléments de $H^i(S^{[n]})$ sont dits de bidegré (n, i) où n est le *poids conforme* et i le *degré cohomologique*. Un opérateur linéaire $\mathfrak{g} \in \text{End}(\mathbb{H}_S)$ est dit *homogène* de bidegré (u, v) s'il vérifie pour tous n, i : $\mathfrak{g}(H^i(S^{[n]})) \subset H^{i+v}(S^{[n+u]})$. On notera $|\mathfrak{g}| := v$ le degré cohomologique de \mathfrak{g} . Le commutateur de deux opérateurs linéaires homogènes $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ est défini par

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] := \mathfrak{g}_1 \circ \mathfrak{g}_2 - (-1)^{|\mathfrak{g}_1| \cdot |\mathfrak{g}_2|} \mathfrak{g}_2 \circ \mathfrak{g}_1.$$

Le produit d'intersection sur $H^*(S^{[n]})$ défini par $\langle \alpha, \beta \rangle_n := \int_{S^{[n]}} \alpha \beta$ s'étend naturellement en une forme bilinéaire symétrique non dégénérée notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{H}_S . Tout opérateur linéaire homogène $\mathfrak{g} \in \text{End}(\mathbb{H}_S)$ admet donc un *adjoint* noté \mathfrak{g}^\dagger caractérisé par la relation $\langle \mathfrak{g}(\alpha), \beta \rangle = (-1)^{|\mathfrak{g}| \cdot |\alpha|} \langle \alpha, \mathfrak{g}^\dagger(\beta) \rangle$.

Soit $\mathfrak{h}_{H^*(S)} := H^*(S)[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ munie comme précédemment du crochet de Lie pour lequel c est central et $[\alpha f(t), \beta g(t)] = \int_S \alpha \beta \cdot \text{res}_t g df \cdot c$ pour $\alpha, \beta \in H^*(S)$ et $f, g \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. On construit géométriquement une représentation irréductible $\mathfrak{h}_{H^*(S)} \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}_S)$ au moyen des opérateurs de Nakajima dont nous rappelons la définition pour un usage ultérieur.

Pour tous $n \geq 0$ et $k \geq 1$, soit $\Sigma^{[n, n+k]} \subset S^{[n]} \times S \times S^{[n+k]}$ la sous-variété dont les points sont les triplets (ξ, x, ξ') tels que $\xi \subset \xi'$ et le support de $\mathcal{I}_\xi / \mathcal{I}_{\xi'}$ est $\{x\}$, où \mathcal{I}_ξ désigne le faisceau d'idéaux du sous-espace ξ de S . Notons les différentes projections sur les facteurs ainsi :

$$\begin{array}{ccc} & S^{[n]} \times S \times S^{[n+k]} & \\ \varphi \swarrow & \downarrow \rho & \searrow \psi \\ S^{[n]} & S & S^{[n+k]} \end{array}$$

Les *opérateurs de Nakajima* $\mathfrak{q}_k : H^*(S) \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}_S)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont définis ainsi : pour tous $k \geq 0$, $\alpha \in H^*(S)$ et $x \in H^*(S^{[n]})$ on pose

$$\mathfrak{q}_k(\alpha)(x) := \psi_* \left(\varphi^*(x) \cdot \rho^*(\alpha) \cdot [\Sigma^{[n, n+k]}] \right)$$

où ψ_* désigne l'image directe de cohomologie singulière définie à partir de l'image directe d'homologie en utilisant la dualité de Poincaré et $[\Sigma^{[n, n+k]}]$ désigne la classe fondamentale cohomologique de la sous-variété. Les opérateurs d'indice négatif sont ensuite définis par adjonction par $\mathfrak{q}_{-k}(\alpha) := (-1)^k \mathfrak{q}_k(\alpha)^\dagger$ pour $k > 0$. On convient de poser $\mathfrak{q}_0 = 0$. Les opérateurs \mathfrak{q}_k sont appelés *opérateurs de création* si $k \geq 1$ et *opérateurs d'annihilation* si $k \leq -1$. Le fait que ces opérateurs fournissent une représentation de $\mathfrak{h}_{H^*(S)}$ résulte du théorème de Nakajima [47] donnant leur règle de commutation : $[\mathfrak{q}_i(\alpha), \mathfrak{q}_j(\beta)] = i \cdot \delta_{i+j, 0} \cdot \int_S \alpha \beta \cdot \text{id}_{\mathbb{H}_S}$. Le fait que la représentation $\mathfrak{h}_{H^*(S)} \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}_S)$ soit irréductible résulte de l'égalité entre la série de Poincaré de \mathbb{H}_S et celle de la représentation irréductible de $\mathfrak{h}_{H^*(S)}$ donnée par l'espace de Fock. Autrement dit, $\mathbb{H}_S \cong \mathbb{F}(H^*(S))$ comme représentations de $\mathfrak{h}_{H^*(S)}$, ce qui se traduit par le fait que l'espace \mathbb{H}_S admet une base constituée des vecteurs de la forme :

$$\mathfrak{q}_{n_1}(u_1) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(u_k) |0\rangle$$

pour $k \geq 0$ et $n_i \geq 1$, où les u_i parcourent une base de $H^*(S)$ (en faisant attention aux signes car si un tel vecteur contient deux fois le même u_j de degré cohomologique impair, alors ce vecteur est nul en raison de l'intervention des signes dans la règle de commutation des opérateurs de Nakajima). L'unité de \mathbb{H}_S pour le cup-produit est la classe :

$$|1\rangle := \sum_{n \geq 0} 1_{S^{[n]}} = e^{\mathfrak{q}_1(1_S)} |0\rangle.$$

4. Formules universelles

L'idée d'une formule universelle est, grossièrement parlant, d'exprimer les classes caractéristiques (les classes de Chern, le caractère de Chern, la classe de Todd, *etc.*) de fibrés vectoriels « naturels » sur le schéma de Hilbert de points d'une surface par une formule qui ne fasse intervenir aucune information spécifique sur la surface (à supposer que ce soit

effectivement possible). Le premier résultat obtenu dans cette direction par Ellingsrud, Göttsche & Lehn [19, Proposition 0.5] concernait le fibré tangent $TS^{[n]}$ et était relatif seulement aux nombres de Chern : pour tout entier n et toute partition λ de $2n$, il existe un polynôme universel $P_\lambda \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ tel que pour toute surface projective S , on a

$$c_\lambda(TS^{[n]}) = P_\lambda(c_1(S), c_2(S)).$$

L'exemple fondamental de formule universelle concerne les fibrés tautologiques de rang un. Notons $\Xi_n := \{(\xi, x) \mid x \in \xi\} \subset S^{[n]} \times S$ la *famille universelle* munie des projections $p: \Xi_n \rightarrow S^{[n]}$ et $q: \Xi_n \rightarrow S$. La projection p est plate ; si F est un fibré vectoriel sur S , le faisceau $F^{[n]} := p_* q^* F$ est donc localement libre de rang $n \cdot \text{rg}(F)$ (appelé *fibré tautologique*). Dans le cas d'un fibré L de rang 1, les classes totales de Chern

$$c_{\text{tot}}(L^{[n]}) := 1 + c_1(L^{[n]}) + \cdots + c_n(L^{[n]})$$

s'organisent selon la formule de Lehn [39, Théorème 4.6] :

$$\sum_{n \geq 0} c_{\text{tot}}(L^{[n]}) t^n = \exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m} \mathfrak{q}_m(c_{\text{tot}}(L)) t^m \right) |0\rangle.$$

Pour étendre ce type de résultat aux fibrés tautologiques de rang supérieurs, ou à d'autres fibrés vectoriels (essentiellement le fibré tangent), il est nécessaire d'introduire des composées d'opérateurs de Nakajima. Notons \mathcal{P} l'ensemble des partitions d'entiers. Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$ est une partition de longueur k de n , notons $\Delta_k: S \rightarrow S^k$ le morphisme diagonal et $\Delta_!^k: \mathbb{H}^*(S) \rightarrow \mathbb{H}^*(S)^{\otimes k}$ le morphisme d'image directe de cohomologie obtenu par image directe d'homologie, dualité de Poincaré et décomposition de Künneth. En décomposant une classe $\alpha \in \mathbb{H}^*(S)$ sous la forme $\Delta_!^k(\alpha) = \sum_i \alpha_{i,1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{i,k}$ on définit un opérateur

$$\mathfrak{q}_\lambda(\alpha) := (\mathfrak{q}_{\lambda_1} \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_{\lambda_k}) \Delta_!^k(\alpha) := \sum_i \mathfrak{q}_{\lambda_1}(\alpha_{i,1}) \circ \cdots \circ \mathfrak{q}_{\lambda_k}(\alpha_{i,k}).$$

Pour commencer, il convient de définir ce qu'est une formule universelle (en s'inspirant de la notion assez proche de *combinaison linéaire universelle* de Li, Qin & Wang [44]). Nous donnons ici une définition « compréhensible », et renvoyons à [B3, §3] et [B5, §5] pour plus de précisions (en particulier l'utilisation de variétés « marquées ») :

Définition 4.1. — Une formule universelle est une série formelle en les opérateurs $\mathfrak{q}_\lambda(\alpha_\lambda)$, à coefficients rationnels, telle que les classes $\alpha_\lambda \in \mathbb{H}^*(S)$ vivent dans la sous-algèbre engendrée par $1_S, K_S, e_S$ (unité, classe canonique et classe d'Euler).

En pratique, les classes α_λ dépendront aussi d'« informations supplémentaires », par exemple le rang et les classes de Chern d'un fibré F sur S , qui interviendront bien évidemment dans la formule universelle des classes de Chern de $F^{[n]}$.

Les premiers résultats obtenus dans [B3], puis précisés et généralisés dans [B5], concernent l'existence de formules universelles, et plus précisément leur structure particulièrement simple (linéaire ou exponentielle d'une combinaison linéaire), pour les fibrés tautologiques et le fibré tangent (on omet dans la suite le paramètre formel t , dont l'exposant se déduit facilement du calcul des poids conformes des opérateurs) :

Proposition 4.1 (Boissière [B3], Boissière & Nieper–Wißkirchen [B5])

Il existe des constantes rationnelles uniques $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda, \delta_\lambda$ telles que pour toute surface quasi-projective S et tout fibré vectoriel F sur S , la série génératrice des caractères de

Chern des fibrés tautologiques de F est donnée par

$$\sum_{n \geq 0} \text{ch}(F^{[n]}) = \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \alpha_\lambda \mathbf{q}_\lambda(\text{ch}(F)) + \beta_\lambda \mathbf{q}_\lambda(e_S \text{ch}(F)) \right. \\ \left. + \gamma_\lambda \mathbf{q}_\lambda(K_S \text{ch}(F)) + \delta_\lambda \mathbf{q}_\lambda(K_S^2 \text{ch}(F)) \right) |1\rangle.$$

Proposition 4.2 (Boissière [B3]). — *Il existe des constantes rationnelles uniques α_λ , β_λ , γ_λ , δ_λ telles pour toute surface quasi-projective S , la série génératrice des caractères de Chern du fibré tangent à $S^{[n]}$ est donnée par*

$$\sum_{n \geq 0} \text{ch}(TS^{[n]}) = \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \alpha_\lambda \mathbf{q}_\lambda(1_S) + \beta_\lambda \mathbf{q}_\lambda(e_S) + \gamma_\lambda \mathbf{q}_\lambda(K_S) + \delta_\lambda \mathbf{q}_\lambda(K_S^2) \right) |1\rangle.$$

Pour les classes caractéristiques multiplicatives, telles que la classe totale de Chern, la forme générale est celle d'une exponentielle. Soit ϕ une telle classe caractéristique multiplicative. Notons B l'algèbre quotient de l'algèbre polynomiale $\mathbb{Q}[r, c_1, c_2, K, e]$ obtenue en tronquant à partir du degré cinq, avec les degrés suivants : $\deg(r) = 0$, $\deg(c_1) = 2$, $\deg(c_2) = 4$, $\deg(K) = 2$, $\deg(e) = 4$ (l'algèbre B joue le rôle d'algèbre universelle de cohomologie d'une surface).

Proposition 4.3 (Boissière [B3], Boissière & Nieper–Wißkirchen [B5])

Il existe des constantes rationnelles uniques $u_\lambda^\phi \in B$ telles que pour toute surface quasi-projective S et tout fibré vectoriel F sur S , la série génératrice des ϕ -classes des fibrés tautologiques de F est donnée par

$$\sum_{n \geq 0} \phi(F^{[n]}) = \exp \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbf{q}_\lambda \left(u_\lambda^\phi(\text{rg}(F), \phi_1(F), \phi_2(F), K_S, e_S) \right) \right) |0\rangle.$$

Proposition 4.4 (Boissière [B3]). — *Il existe des constantes rationnelles uniques a_λ^ϕ , b_λ^ϕ , c_λ^ϕ , d_λ^ϕ telles pour toute surface quasi-projective S , la série génératrice des ϕ -classes du fibré tangent à $S^{[n]}$ est donnée par*

$$\sum_{n \geq 0} \phi(TS^{[n]}) = \exp \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_\lambda^\phi \mathbf{q}_\lambda(1_S) + b_\lambda^\phi \mathbf{q}_\lambda(e_S) + c_\lambda^\phi \mathbf{q}_\lambda(K_S) + d_\lambda^\phi \mathbf{q}_\lambda(K_S^2) \right) |0\rangle.$$

Le principe de démonstration de ces résultats est à chaque fois le même : on considère l'opérateur de multiplication par cup-produit par la classe souhaitée et on calcule son commutateur avec $\mathbf{q}_1(\alpha)$: c'est ici qu'intervient toute la géométrie des schémas de Hilbert de points. Les formules de commutateurs ont été obtenues par Lehn [39, Théorème 4.2] pour les fibrés tautologiques, et pour le fibré tangent elle est établie dans [B3, Lemme 3.12]. On en déduit une formule pour les classes caractéristiques, dont on montre qu'elle est universelle grâce à la connaissance de certaines règles de calcul de cup-produit de classes de cohomologie écrites avec des opérateurs de Nakajima ou de commutateurs d'opérateurs vertex issus des opérateurs de Nakajima (opérateurs dérivés, opérateurs de Virasoro) dont on sait prouver qu'elles ne font intervenir que des classes universelles (typiquement : certains calculs utilisent une décomposition de Künneth des classes de cohomologie, qui se calcule concrètement par le choix d'une base de $H^*(S)$; on doit montrer qu'à la fin du calcul tout se réorganise de telle sorte que ces choix n'apparaissent plus). Pour finir, et comprendre la forme simple de la formule universelle, on regarde comment la classe caractéristique se décompose si S est la réunion disjointe de deux surfaces [B3, Lemmes 3.2 & 3.3]

Pour déterminer les séries de coefficients dans chacun de ces théorèmes, puisque les coefficients ne dépendent pas de la surface on peut spécifier des surfaces particulières (le plan affine, \mathbb{P}_2 , une surface K3, une surface abélienne, $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, *etc.*) et utiliser des méthodes adaptées à chaque cas pour trouver les coefficients. Cette méthode a particulièrement bien fonctionné avec le plan affine.

5. Formules explicites sur le plan affine

L'espace total de cohomologie $\mathbb{H}_{\mathbb{C}^2}$ des schémas de Hilbert de points sur le plan affine est naturellement isomorphe à l'algèbre de polynômes $\Lambda := \mathbb{Q}[p_1, p_2, p_3, \dots]$ où l'indéterminée p_i a degré i : on identifie l'opérateur de Nakajima $\mathfrak{q}_i(1_{\mathbb{C}^2})$ à l'opérateur de multiplication par p_i .

La formule la plus spectaculaire est certainement celle des classes de Chern du fibré tangent au schéma de Hilbert de points sur le plan affine :

Théorème 5.1 (Boissière [B3]). — *Les classes de Chern du fibré tangent au schéma de Hilbert de n points sur \mathbb{C}^2 sont données par la série génératrice*

$$\sum_{n \geq 0} \text{ctot}(T \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) = \exp \left(\sum_{k \geq 0} C_k \frac{p_{2k+1}}{2k+1} \right),$$

où $C_k := \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ est le k -ième nombre de Catalan.

Les caractères de Chern sont donnés par la série génératrice

$$\sum_{n \geq 0} \text{ch}(T \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) = 2 \exp(p_1) \sum_{k \geq 0} \frac{p_{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Cette formule est jolie à cause de l'apparition des nombres de Catalan. Ces nombres avaient déjà surgi dans le contexte des schémas de Hilbert chez Haiman [31] (sans qu'il semble y avoir un rapport direct). La démonstration donnée de cette formule (les points essentiels de la démonstration sont expliqués plus loin) n'utilise cependant aucune propriété combinatoire des nombres de Catalan, et leur apparition peut sembler un pur hasard. On rêve cependant d'une autre démonstration qui relierait la géométrie du schéma de Hilbert à une propriété combinatoire des nombres de Catalan !

Nous avons généralisé cette formule à toute classe caractéristique dans [B5]. Par le principe de scindage, toute classe caractéristique multiplicative est entièrement déterminée par ses valeurs sur un fibré en droites, *i.e.* par une série formelle $\phi(x) \in 1 + x\mathbb{C}[[x]]$ (la classe totale de Chern s'obtient avec $\phi(x) = 1 + x$, la classe de Segré par $\phi(x) = \frac{1}{1+x}$). Définissons à partir de ϕ une autre série formelle $\psi(t) = \sum_{k \geq 1} \psi_k t^k \in t\mathbb{C}[[t]]$ par la relation

$$(*) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\frac{x}{\phi(x)\phi(-x)} \right) = \phi(x)\phi(-x).$$

On a alors :

Théorème 5.2 (Boissière & Nieper-Wißkirchen [B5]). — *Les ϕ -classes du fibré tangent au schéma de Hilbert de points sur \mathbb{C}^2 sont données par la série génératrice*

$$\sum_{n \geq 0} \phi(T \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) = \exp \left(\sum_{k \geq 0} \frac{\psi_k}{k} p_k \right)$$

Appliquée à la classe de Chern, cette formule donne une première explication de l'apparition des nombres de Catalan, car l'une de leur définition possible est justement par la formule d'inversion (*). Des formules similaires sont données dans [B5,B6] pour les fibrés tautologiques sur $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$.

Toutes ces formules sont obtenues par l'utilisation de l'action du tore \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^2 et du lien entre l'algèbre Λ et les caractères des représentations du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , en poursuivant les travaux de Lehn & Sorger [41] et Vasserot [63]. On munit l'algèbre $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$ d'une double graduation en déclarant que p_i est de *poids conforme* i et *degré cohomologique* $i-1$, et on note Λ^n le sous-espace des polynômes de poids conforme n . Les opérateurs de Nakajima induisent, comme expliqué ci-dessus, un isomorphisme gradué $\Lambda^n \cong H^*(\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$. Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$ une partition de n (on notera $\lambda \vdash n$). Le nombre $\ell(\lambda)$ de parts non nulles est la *longueur* de la partition. Pour tout $r \geq 1$, notons α_r le nombre de parts de λ égales à r et posons $z_\lambda := \prod_{r \geq 1} \alpha_r! r^{\alpha_r}$. De façon similaire aux produits d'opérateurs de Nakajima introduits précédemment, les fonctions de Newton $p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_k}$ forment une base de Λ^n .

Le *diagramme de Young* d'une partition λ est défini par

$$D(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid j < \lambda_{i+1}\}.$$

On représente ce diagramme en suivant une convention matricielle :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & x & h & h \\ \hline & h & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda = (4, 3, 1) \quad x = (0, 1) \\ |\lambda| = 8 \quad h(x) = 4 \\ l(\lambda) = 3 \end{array}$$

où pour chaque cellule $x \in D(\lambda)$, la *longueur d'équerre* $h(x)$ en x est le nombre de cellules à droite et sous x (incluant la cellule x elle-même) et on pose $h(\lambda) := \prod_{x \in D(\lambda)} h(x)$.

Notons $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n)$ l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} des *fonctions classes* sur \mathfrak{S}_n , i.e. les fonctions sur \mathfrak{S}_n à valeurs rationnelles et invariants par conjugaison. Puisque les classes de conjugaison dans \mathfrak{S}_n sont indexées par les partitions de n , les fonctions χ_λ prenant la valeur 1 sur la classe de conjugaison λ et 0 ailleurs forment une base de $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n)$. Notons $R(\mathfrak{S}_n)$ l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} des représentations linéaires du groupe \mathfrak{S}_n . En associant à chaque représentation de \mathfrak{S}_n son caractère, on obtient un isomorphisme $\chi: R(\mathfrak{S}_n) \rightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{S}_n)$. Le *morphisme de Frobenius* est l'isomorphisme $\Phi: \mathcal{C}(\mathfrak{S}_n) \rightarrow \Lambda^n$ caractérisé par $\Phi(\chi_\lambda) = z_\lambda^{-1} p_\lambda$. Pour tout λ , notons χ^λ la fonction classe telle que $\Phi(\chi^\lambda) = s_\lambda$, où s_λ désigne la fonction de Schur associée à la partition λ , et notons χ_μ^λ la valeur de χ^λ sur la classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n indexées par μ . On sait que les représentations de caractères χ^λ sont les représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n .

Le tore $T := \mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}[x, y]$ par $s \cdot x = sx$, $s \cdot y = s^{-1}y$ pour $s \in T$. Cela induit une action de T sur $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ ayant un nombre fini de points fixes ξ_λ indexés par les partitions λ de n (ce sont les idéaux supportés à l'origine et dont l'idéal est monomial, dont le polygone de Newton correspond au diagramme de Young de λ).

L'ingrédient-clé pour les formules énoncées ci-dessus est une formule pour les classes caractéristiques de fibrés T -linéarisés, démontrée dans [B1] en utilisant principalement la formule de localisation en cohomologie équivariante. Soit F un fibré T -linéarisé de rang r sur $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$. Chaque fibre $F(\xi_\lambda)$ est une représentation de T , uniquement déterminée par ses poids $f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda$. Cette donnée permet de récupérer les classes caractéristiques de F (j'énonce ici seulement la formule pour les classes de Chern et le caractère de Chern, la généralisation aux ϕ -classes multiplicatives a été donnée ensuite dans [B5]) :

Théorème 5.3 (Boissière [B1]). — Soit F un fibré T -linéarisé de rang r sur $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ et $f_1^\lambda, \dots, f_r^\lambda$ les poids de l'action sur la fibre en chaque point fixe. Les classes de Chern de F écrites dans Λ^n sont

$$c_k(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \text{Coeff} \left(t^k, \prod_{i=1}^r (1 + f_i^\lambda t) \right) \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu)=n-k}} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu.$$

Les caractères de Chern de F sont

$$ch_k(F) = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{h(\lambda)} \sum_{i=1}^r (f_i^\lambda)^k \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ l(\mu)=n-k}} z_\mu^{-1} \chi_\mu^\lambda p_\mu.$$

Les formules de séries génératrices s'en déduisent ainsi : on sait déjà qu'il existe une formule universelle qui, appliquée au schéma de Hilbert du plan affine, prend la forme — disons dans le cas de la classe de Chern totale — de l'exponentielle d'une forme linéaire. En regardant attentivement la formule on découvre qu'en fait, la seule classe de Chern qu'il faut calculer pour avoir les coefficients de la formule universelle est la classe c_{n-1} (la dernière non nulle ici). Dans [B1], le calcul se fait en utilisant quelques astuces combinatoires et des identités de fonctions hypergéométriques. Dans [B5], pour généraliser à toutes les classes multiplicatives nous avons remplacé l'utilisation de fonctions hypergéométriques par l'utilisation de la formule d'inversion de Lagrange et des astuces combinatoires plus fines. Mais ce qui est le plus surprenant dans cette étude, c'est qu'il semble impossible de démontrer ces formules de séries génératrices par la combinatoire en partant uniquement du théorème ci-dessus : il faut savoir *a priori* la structure de la formule, donnée par les résultats d'universalité, pour arriver au résultat optimal.

6. Implémentation : vers les coefficients manquants

Dans [B6], nous avons poursuivi l'étude des coefficients universels des formules de séries génératrices : les résultats sur le schéma de Hilbert du plan affine donnent quelques séries de coefficients (pour les partitions de longueur un et relatives à la classe 1_S) et nous avons donné d'autres familles de coefficients (voir [B6, Proposition 8.3]), complétant des résultats de Li, Qin & Wang [43]. Mais le coeur de l'article consiste en l'explication de méthodes d'implémentation de la structure d'algèbre vertex des schémas de Hilbert de points sur une surface sur le logiciel MAUDE [13]. L'article est accompagné d'un programme. Ce logiciel est à l'origine fait pour traiter des questions de logique (règles de réécriture en logique), mais est particulièrement bien adapté aux calculs récurrents, par exemple dans des algèbres de Lie (en particulier les crochets de Lie d'opérateurs de Virasoro). Nous avons implémenté dans ce langage la structure d'algèbre de Lie, le calcul dans la cohomologie des variétés et tous les opérateurs (cup-produit par des classes de Chern de fibrés, *etc.*). Le programme est étonnamment efficace (on peut calculer jusqu'au schéma de 8 points) et nous a permis d'étudier beaucoup de séries de coefficients pour des partitions non triviales, correspondants aux classes K_S, e_S, K_S^2 . Nous en avons déduit plusieurs conjectures, dont l'une concernant des partitions de longueur deux a ensuite été démontrée par Nieper-Wikkirchen [49] en étudiant le schéma de Hilbert sur l'espace total du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ avec les mêmes techniques que précédemment. La difficulté de l'implémentation réside dans l'intervention de la formule de Künneth : notre programme n'utilise aucune information

sur la surface, donc il a fallu « mimer » des décompositions de Künneth pour les faire disparaître ensuite formellement (toute l'astuce réside ici).

PARTIE II

DE LA CORRESPONDANCE DE MCKAY AUX CONJECTURES DE RUAN

Ce domaine évolue très vite depuis une dizaine d'années, et il serait trop ambitieux d'en faire une synthèse complète. Je prendrai donc un point de vue plus personnel, en renvoyant par exemple à Reid [56] pour un panorama plus complet des premiers développements du sujet.

7. La correspondance de McKay

Soit $G \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ un groupe fini, avec $n \geq 2$. La singularité quotient \mathbb{C}^n/G est normale et de Gorenstein (il existe un faisceau canonique localement libre de rang un). On cherche une résolution des singularités $\rho: Z \rightarrow \mathbb{C}^n/G$, Z étant lisse et ρ projectif et birationnel, ayant de plus la propriété d'être crépante, ce qui signifie ici que le diviseur canonique K_Z de Z est linéairement équivalent à zéro.

Si $n = 2$, une telle résolution existe et est unique à isomorphisme près, c'est la résolution minimale. Le quotient \mathbb{C}^2/G a une unique singularité à l'origine et $\rho^{-1}(0)$ est une chaîne de courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -2 , dont le graphe d'intersection est le graphe de Dynkin correspondant au groupe polyédral binaire $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. L'idée de McKay [46] est de construire le graphe de sommets des représentants $\{\chi_0, \dots, \chi_k\}$ des représentations irréductibles de G , avec une flèche de χ_i à χ_j si la représentation χ_j intervient dans la décomposition en irréductibles de $Q \otimes \chi_i$, où Q est la représentation de dimension 2 donnée par l'action de G sur \mathbb{C}^2 . On retire ensuite le sommet donné par la représentation triviale, les sens et les multiplicités des flèches, et on découvre que ce graphe est le graphe de Dynkin précédent. Cela implique en particulier que l'on a une base de $H^*(Z, \mathbb{C})$ indexée par les représentations irréductibles de G , et donc $H^*(Z, \mathbb{C}) \cong R(G) \otimes \mathbb{C}$.

Si $n = 3$, une telle résolution existe toujours, mais n'est pas unique en général. Il existe une résolution naturelle (car universelle et fonctorielle) donnée par le schéma de Hilbert d'orbites régulières $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ construit par Nakamura [48], paramétrant les sous-schémas G -invariants $Z \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{C}^n)$ tels que $H^*(\mathcal{O}_Z)$ est isomorphe, en tant que G -module, à la représentation régulière de G (ceci afin de compactifier l'espace de configuration des orbites libres). On peut voir que la restriction du morphisme de Hilbert–Chow

$$\mathrm{Hilb}^{|G|}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \underbrace{\mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n}_{|G|} / \mathfrak{S}_{|G|}$$

se restreint en un morphisme projectif et birationnel $\rho: G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n/G$. Si $n = 3$, Bridgeland, King & Reid [7] démontrent que $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ est lisse et ρ crépant (si $n = 2$, $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ est la résolution minimale des singularités). Ils en déduisent encore dans ce cas qu'il existe une base de $H^*(G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3), \mathbb{C})$ indexée par les représentations irréductibles de G .

Par contre, si $n \geq 4$ il n'existe pas de résolution crépante en général. Les schémas de Hilbert de points sur une surface en sont toutefois un exemple en toute dimension paire.

invariante par l'involution $\{\pm 1\}$. Nous démontrons un lien géométrique fort entre ces deux situations :

Théorème 8.1 (Boissière & Sarti [B4]). — *Il existe un morphisme projectif*

$$f: \tilde{G}\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2) \rightarrow G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)$$

ayant les propriétés suivantes :

1. f contracte toutes les courbes irréductibles $\tilde{C}(\rho)$ pour $\rho \in \text{Irr}(\tilde{G}) \setminus \text{Irr}(G)$ et envoie isomorphiquement $\tilde{C}(\rho)$ sur $C(\rho)$ si $\rho \in \text{Irr}(G)$,
2. f envoie $\tilde{G}\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ surjectivement sur S_0 et en est la résolution minimale.

Ce morphisme est construit comme une transformation naturelle entre les foncteurs de points représentés par les schémas de Hilbert d'orbites régulières. Cette construction modulaire nous permet de montrer facilement la propriété du morphisme par le critère valuatif, et les propriétés de f sont montrées au niveau des familles universelles. Cette méthode permet d'éviter toute étude au cas par cas et tout calcul.

Cette construction et les propriétés de ce morphisme ont permis à Bryan & Gholampour [9] de calculer les invariants de Gromov–Witten de $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)$ à partir de ceux de $\tilde{G}\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$.

9. Les correspondances de McKay en situation symplectique

La philosophie de la correspondance de McKay — qui va se tourner dans les sections suivantes vers les diverses versions des conjectures de Ruan — peut s'énoncer comme suit. On considère une variété algébrique complexe lisse X , quasi-projective, et $G \subset \text{Aut}(X)$ un groupe d'automorphismes tel qu'en tout point $x \in X$, le stabilisateur G_x de x dans G est fini et $G_x \in \text{SL}(T_x X)$. Le quotient $Y := X/G$ a donc (au pire) des singularités de Gorenstein. On suppose qu'il existe une résolution crépante $\rho: Z \rightarrow Y$. On cherche alors à décrire la géométrie de Y en fonction de celle de la paire (X, G) (et éventuellement, comme ce sera le cas par la suite, de certains invariants de Gromov–Witten relatifs au morphisme ρ).

On s'intéresse ici à la correspondance de McKay en dimension quelconque, dans le cadre restrictif des espaces symplectiques complexes. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie, muni d'une forme symplectique, et $G \subset \text{Sp}(V)$ un groupe fini. Supposons donnée une résolution crépante $\rho: Z \rightarrow V/G$, ce qui est équivalent ici à imposer que la résolution est *symplectique*, au sens où la forme symplectique sur l'ouvert lisse de V/G , tirée en arrière sur l'ouvert de Z sur lequel ρ est un isomorphisme, se prolonge en une forme symplectique sur Z entier [37]. On considère trois versions de la correspondance de McKay :

Correspondance de McKay classique. La catégorie dérivée bornée de faisceaux cohérents sur Z et la catégorie dérivée de faisceaux G -équivariants sur V sont équivalentes : $D^b(Y) \sim D_G^b(V)$. Sous cette forme, le résultat est dû à Bezrukavnikov & Kaledin [6]. Cependant, l'équivalence n'est pas donnée par un foncteur de Fourier–Mukai explicite. Par contre, dans les cas où l'on peut choisir $Z = G\text{-Hilb}(V)$ comme résolution crépante (lorsque ce schéma est lisse), le théorème de Bridgeland, King & Reid [7] donne cette équivalence par transformée de Fourier–Mukai par rapport à la famille universelle au-dessus de $G\text{-Hilb}(V)$. Cette équivalence induit un isomorphisme au niveau des groupes de Grothendieck de faisceaux cohérents

$$K(Z) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong K_G(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},$$

le deuxième isomorphisme étant obtenu par restriction à une fibre, suivant l'observation de Gonzales–Sprinberg & Verdier [26].

Correspondance de McKay duale. Elle se passe au niveau de l'homologie de Z . Puisque Z n'est pas compacte, on utilise l'homologie de Borel–Moore (homologie des chaînes simpliciales infinies à support fini sur tout compact). L'énoncé de Kaledin [37] est qu'il existe une base naturelle de $H_*^{\text{BM}}(Z, \mathbb{C})$ indexée par les classes de conjugaison dans G , induisant une bijection $H_*^{\text{BM}}(Z, \mathbb{C}) \cong \mathcal{C}(G)$, où $\mathcal{C}(G)$ désigne l'espace des fonctions classes de G dans \mathbb{C} , *i.e.* les fonctions invariantes par conjugaison. Cette base naturelle est obtenue comme suit. Pour chaque sous-groupe $H \subset G$, notons V^H le sous-espace vectoriel des points fixes et $Y_H \subset V/G$ sa trace dans le quotient. Les sous-variétés $Z_H := \rho^{-1}(Y_H)$ stratifient alors Z et le morphisme ρ a la propriété d'être *semi-petit* pour cette stratification, *i.e.* que l'on a les inégalités

$$\text{codim } Z_H \geq \frac{1}{2} \text{codim } Y_H.$$

Les strates *essentielles*, pour lesquelles on a ci-dessus égalité, sont alors indexées par les classes de conjugaison dans G . En utilisant le théorème de décomposition en cohomologie d'intersection, on montre que ces strates maximales forment une base de l'homologie.

Correspondance de McKay multiplicative. Les deux correspondances précédentes concernent uniquement les structures additives. On cherche mieux avec un modèle combinatoire de l'anneau de cohomologie $H^*(Y, \mathbb{C})$. On part de l'algèbre du groupe G , notée $\mathbb{C}[G]$. On introduit une filtration croissante

$$F^d \mathbb{C}[G] := \langle g \mid \text{rg}(\text{id}_V - g) \leq d \rangle.$$

Cette filtration est compatible avec la structure d'anneau et l'on obtient une structure d'anneau gradué

$$\text{gr}_F \mathbb{C}[G] := \bigoplus_d F^{d+1} \mathbb{C}[G] / F^d \mathbb{C}[G].$$

Pour récupérer une structure commutative, on se restreint au centre $Z(G) := \mathbb{C}[G]^G$ de l'algèbre et l'on note $\text{gr}_F Z(G)$ l'algèbre commutative graduée obtenue (qui préfigure la cohomologie orbifold). Ginzburg & Kaledin [24] démontrent alors que les anneaux $H^*(Z, \mathbb{C})$ et $\text{gr}_F Z(G)$ sont naturellement isomorphes. Cet isomorphisme n'est cependant pas explicite.

En considérant ces trois correspondances, on est naturellement amené à se demander comment elles sont reliées les unes aux autres. Ginzburg & Kaledin [24] formulent le problème comme le calcul des applications en pointillé :

$$\begin{array}{ccc} K(Z) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} & \xleftarrow{\text{classique}} & R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} G \\ \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{?} \\ H^*(Z, \mathbb{C}) & \xleftarrow{\text{multiplicative}} & \text{gr}_F Z(G) \\ \downarrow D & & \downarrow \text{?} \\ H_*^{\text{BM}}(Z, \mathbb{C}) & \xleftarrow{\text{duale}} & \mathcal{C}(G) \end{array}$$

où ch désigne le caractère de Chern et D la dualité de Poincaré. L'intérêt de ces questions réside dans le fait que, contrairement aux attentes initiales, ce diagramme ne commute pas avec des isomorphismes usuels de caractères entre représentations et fonctions classes, et avec les identifications canoniques entre fonctions classes et centre de l'algèbre du groupe G .

On peut étudier cette question sur des exemples. Cependant, si l'on veut voir ce qui se passe, il faut travailler en grande dimension pour que le caractère de Chern prenne sa pleine mesure. Pour traiter d'un seul coup une famille infinie d'exemples en dimension croissante, on travaille avec le schéma de Hilbert de points sur le plan affine : on fixe $V = (\mathbb{C}^2)^n$ muni de sa structure symplectique naturelle et $G = \mathfrak{S}_n$ agissant par permutation des facteurs. Le schéma de Hilbert $Z = \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ fournit une résolution symplectique et Haiman [31] a démontré qu'il est naturellement isomorphe au schéma $\mathfrak{S}_n\text{-Hilb}(V)$ (qui est donc bien lisse dans ce cas particulier). Avant d'énoncer le résultat, rappelons que le groupe de Grothendieck $K(Z)$ est muni d'une filtration topologique décroissante naturelle par le support des faisceaux :

$$F_d K(Z) := \langle \mathcal{F} \mid \text{codim Supp}(\mathcal{F}) \geq d \rangle,$$

et que le caractère de Chern respecte cette filtration (l'image de $F_d(Z)$ est contenu dans $H^{\geq 2d}(Z, \mathbb{C})$). Notons aussi la filtration décroissante de $\mathbb{C}[G]$:

$$F_d \mathbb{C}[G] := \langle g \mid \text{rg}(\text{id}_V - g) \geq d \rangle$$

et $F_d Z(G)$ la filtration induite sur $Z(G)$. On a alors :

Théorème 9.1 (Boissière [B1]). — *La correspondance de McKay classique pour $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ est compatible aux filtrations décroissantes $F_d K(\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$ et $F_d Z(\mathfrak{S}_n)$. L'application graduée associée est exactement la correspondance de McKay multiplicative, et diffère seulement de la correspondance de McKay duale par un facteur scalaire.*

On peut conjecturer que ce résultat reste vrai dans toutes les situations symplectiques.

Ce résultat est démontré dans [B1] par un calcul explicite des correspondances : la correspondance classique est donnée par transformation de Fourier–Mukai, calculable explicitement ; la correspondance multiplicative est donnée par les opérateurs de Nakajima (voir §5) et l'isomorphisme d'anneaux est un résultat antérieur au théorème de Ginzburg–Kaledin, démontré par Lehn & Sorger [41] et Vasserot [63] ; la correspondance duale est très explicite car les sous-variétés en cause ont des interprétations modulaires simples. On commence par identifier les espaces $\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, $R(\mathfrak{S}_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ et $Z(\mathfrak{S}_n)$ avec l'espace Λ^n , ainsi qu'expliqué en §5 (ici, tout le calcul peut se faire avec des coefficients rationnels), puis le calcul utilise comme ingrédient principal le Théorème 5.3.

10. Comportement multiplicatif

Une autre question naturelle dans l'étude de la correspondance de McKay classique dans le cas du schéma de Hilbert de points sur le plan affine est de se demander quelle est la structure d'anneau induite sur $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ par transformation de Fourier–Mukai depuis l'anneau de Grothendieck $K(\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$ (muni du produit tensoriel de faisceaux). En fait, même si ce n'est pas encore explicite à ce stade, l'idée est que la correspondance de McKay classique fait le lien entre la K-théorie de $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ et la K-théorie orbifold de la paire $((\mathbb{C}^2)^n, \mathfrak{S}_n)$, tandis que la correspondance de McKay multiplicative est une version simple de la conjecture cohomologique des résolutions crépantes, dont il sera question dans la suite. Il est donc essentiel de comprendre ces deux isomorphismes. L'article récent d'Iritani [35] donne à ce propos un éclairage nouveau. Dans [B2] j'ai calculé cette structure d'anneau ainsi : le produit tensoriel par un fibré linéarisé dans $K(\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))$ correspond à l'action

d'un opérateur différentiel sur Λ^n . En particulier, je calcule dans [B2] que l'action du fibré tautologique de $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ correspond à l'opérateur

$$\mathcal{E} := \left(\sum_{r \geq 1} r p_r t^r \right) \exp \left(\sum_{r \geq 1} \frac{\partial}{\partial p_r} t^{-r} \right) \Big|_{t^0}.$$

Ces opérateurs permettent de calculer des tables du produit obtenu, données pour les premières valeurs de n dans [B2] dans les bases des fonctions de Newton et des fonctions de Schur (jusqu'à aujourd'hui, cette structure n'est pas encore bien comprise). La démonstration passe par l'utilisation de transformations pléthystiques, inspirées des travaux de Haiman [32, 33].

11. Cohomologie orbifold

Je présente pour simplifier uniquement la définition de la cohomologie orbifold dans le cas qui sera utilisé plus loin. On reste donc dans la situation d'une paire (X, G) comme dans la section précédente, avec X de dimension complexe n , où le quotient $Y := X/G$ est de Gorenstein et est l'espace de modules grossier du champ de Deligne–Mumford propre et lisse $\mathcal{Y} := [X/G]$, qui est un orbifold Gorenstein (voir §13). La cohomologie orbifold du champ \mathcal{Y} , introduite par Chen & Ruan [12], est la cohomologie du *champ d'inertie*

$$I\mathcal{Y} := \coprod_{[g] \in G} X^g / C_g$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison $[g]$ dans G , X^g est le lieu des points fixés par g et C_g est le centralisateur de g dans G . On pose alors

$$\mathrm{H}_{\text{orb}}^*([X/G]) := \bigoplus_{[g] \in G} \mathrm{H}^*(X^g / C_g) = \bigoplus_{[g] \in G} \mathrm{H}^*(X^g)^{C_g},$$

la cohomologie étant prise à coefficients complexes. On définit une nouvelle graduation ainsi : si $x \in X^g$, l'action de g sur l'espace tangent $T_x X$ est diagonalisable de valeurs propres $e^{2i\pi r_1}, \dots, e^{2i\pi r_n}$ avec $r_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. On définit $\text{age}(g) := r_1 + \dots + r_n$, qui est indépendant du point x sur chaque composante connexe de X^g , et ici entier car l'action des stabilisateurs est supposée avoir déterminant un. Si $\alpha \in \mathrm{H}^k(X^g / C_g)$, son degré orbifold, comme élément de $\mathrm{H}_{\text{orb}}^*([X/G])$, est défini par $\text{deg}_{\text{orb}} \alpha := k + 2 \text{age}(g)$. On définit une nouvelle structure d'anneau ainsi : si $\alpha \in \mathrm{H}^*(X^g / C_g)$ et $\beta \in \mathrm{H}^*(X^h / C_h)$, on pose

$$\alpha \cup_{\text{orb}} \beta := \iota_* (\alpha|_{X^{\langle g, h \rangle}} \cdot \beta|_{X^{\langle g, h \rangle}} \cdot e(g, h)) \in \mathrm{H}^*(X^{gh} / C_{gh})$$

où $H := \langle g, h \rangle$ est le sous-groupe de G engendré par g et h , $\iota : X^{\langle g, h \rangle} \hookrightarrow X^{gh}$ est l'inclusion et $e(g, h)$ est la classe d'Euler d'un fibré vectoriel sur X^H construit ainsi : notons a, b, c les ordres de $g, h, (gh)^{-1}$ dans G et soit $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}_1$ le revêtement ramifié de \mathbb{P}_1 ayant une ramification d'ordre a en 0, respectivement b en 1 et c en ∞ . On pose $E := (TX|_{X^H} \otimes \mathbb{R}^1 \text{pr}_*(\mathcal{O}_{\Sigma \times X}))^H$ où $\text{pr} : \Sigma \times X \rightarrow X$ est la projection, et on pose $e(g, h) := c_{\text{top}}(E)$. Je renvoie à Fantechi & Göttsche [20] et Chen & Ruan [12] pour plus de détails.

La relation avec les algèbres graduées construites avant est simple : on a un isomorphisme d'algèbres $\mathrm{H}_{\text{orb}}^*([\mathbb{C}^2]^n, \mathfrak{S}_n) \cong \text{gr}_F Z(\mathfrak{S}_n)$ et mieux, pour un quotient symplectique (V, G) , on a $\mathrm{H}_{\text{orb}}^*([V/G]) \cong \text{gr}_F Z(G)$. Plus généralement, si S est une surface algébrique lisse

et projective, $\mathbf{H}_{\text{orb}}^*([S^n/\mathfrak{S}_n])$ s'identifie naturellement à l'algèbre de Frobenius graduée construite par Lehn–Sorger (voir Remarque 2.1).

Si $\rho: Z \rightarrow X/G$ est une résolution crépante des singularités, Yasuda [64] a démontré que les espaces vectoriels gradués $\mathbf{H}^*(Z, \mathbb{C})$ et $\mathbf{H}_{\text{orb}}^*([X/G])$ sont isomorphes : les dimensions de chaque espace de cohomologie de même degré sont de même dimension. La démonstration, utilisant des méthodes d'intégration motivique, généralise les résultats précédemment obtenus dans des cas plus simples (par exemple G abélien) obtenus par Denef & Loeser [17] et Ito & Reid [36]. Cependant, cet isomorphisme n'est donné par aucun morphisme explicite, et n'est en général pas compatible aux structures d'anneaux dès que l'on sort des situations symplectiques précédentes. Ce sont ces deux problèmes qui vont motiver tous les développements qui suivent.

12. Rappels sur les invariants de Gromov–Witten

Dans tout ce qui suit, Z désigne une variété propre et lisse sur \mathbb{C} , de dimension complexe n , et $\mathbf{H}^*(Z) := \bigoplus_{k \geq 0} \mathbf{H}^{2k}(Z)$ sa cohomologie *paire* (pour simplifier l'exposition) à coefficients complexes. On fixe une fois pour toutes une base homogène $(\phi_k)_k$ de $\mathbf{H}^*(Z)$ telle que $\phi_0 = \mathbf{1}$ est l'élément neutre, et on note $(\phi^k)_k$ la base duale pour la dualité de Poincaré. On notera \deg le degré cohomologique.

12.1. Cohomologie quantique. — Soit $\Gamma \in \mathbf{H}_2(Z, \mathbb{Z})$. On considère l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,n}(Z, \Gamma)$ dont les points géométriques sont les classes d'isomorphismes de triplets (Z, f, \underline{x}) où C est une courbe nodale de genre 0, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sont n points distincts sur le lieu lisse de C , $f: C \rightarrow Z$ est un morphisme tel que $f_*[C] = \Gamma$ et $\text{Aut}(C, f, \underline{x})$ est fini. Cet espace de modules admet une structure d'orbifold complexe lisse et propre. Si Γ n'est pas la classe d'une courbe effective, $\mathcal{M}_{0,n}(Z, \Gamma) = \emptyset$. On note $\text{Eff}_Z \subset \mathbf{H}_2(Z, \mathbb{Z})$ le monoïde (associatif et commutatif) des classes de courbes effectives sur Z . Les morphismes d'évaluation sont notés

$$\text{ev}_i: \mathcal{M}_{0,n}(Z, \Gamma) \longrightarrow Z, \quad \text{ev}_i(C, f, \underline{x}) = f(x_i).$$

Pour $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbf{H}^*(Z)$, les invariants de Gromov–Witten en genre zéro sont par définition

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle_{0,n,\Gamma} := \int_{[\mathcal{M}_{0,n}(Z, \Gamma)]^{\text{vir}}} \text{ev}_1^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \text{ev}_n^*(\gamma_n).$$

Rappelons que $\dim_{\mathbb{C}}[\mathcal{M}_{0,n}(Z, \Gamma)]^{\text{vir}} = \dim_{\mathbb{C}} Z + \int_{\Gamma} c_1(Z) + n - 3$, qui est bien la dimension de l'espace de modules sous bonnes hypothèses (Z convexe).

Ces invariants vérifient une liste de propriétés axiomatiques, pour lesquelles nous renvoyons à Cox & Katz [15]. Rappelons seulement l'axiome du diviseur, qui sera explicitement utilisé dans certains calculs par la suite. Si $n \geq 1$ et $\gamma_n \in \mathbf{H}^2(Z, \mathbb{C})$:

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n \rangle_{0,n,\Gamma} = \int_d \gamma_n \cdot \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \rangle_{0,n-1,\Gamma}.$$

12.1.1. Petite cohomologie quantique. — On n'utilise ici que les invariants à trois points.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbf{H}^*(Z)$, on définit

$$\alpha \star \beta := \sum_{\Gamma \in \text{Eff}_Z} \sum_k \langle \alpha, \beta, \phi_k \rangle_{0,3,\Gamma} \phi^k Q^\Gamma \in \mathbf{H}^*(Z) \otimes \text{Eff}_Z[[Q]].$$

Les axiomes des invariants de Gromov–Witten permettent de voir que ce produit est associatif, commutatif, de neutre $\mathbf{1}$. En posant $Q = 0$ on retrouve le cup-produit usuel.

12.1.2. Déformation quantique. — Supposons que $\rho: Z \rightarrow Y$ est une résolution crépante d'une variété de Gorenstein Y . On peut restreindre la somme définissant le petit produit quantique aux courbes contractées par ρ . Notons $M_\rho(Z) \subset H_2(Z, \mathbb{Z})$ le cône de Mori des classes de courbes effectives contractées. On fait l'hypothèse, qui sera satisfaite sur les exemples traités, que ce cône est engendré par un nombre fini de classes de courbes rationnelles $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Ainsi, toute classe $\Gamma \in M_\rho(Z)$ s'écrit de façon unique $\Gamma = \sum_{\ell=1}^m d_\ell \Gamma_\ell$ avec $d_\ell \in \mathbb{N}$. On assigne une variable formelle q_ℓ à chaque Γ_ℓ de telle sorte que $\Gamma = \sum_{\ell=1}^m d_\ell \Gamma_\ell$ corresponde au monôme $q_1^{d_1} \cdots q_m^{d_m}$. La définition du petit produit quantique, restreinte aux classes $\Gamma \in M_\rho(Z)$, est une déformation de l'anneau $H^*(Z, \mathbb{C})$ notée $H_\rho^*(Z, \mathbb{C})(q_1, \dots, q_m)$.

12.1.3. Grande cohomologie quantique. — On utilise maintenant tous les invariants de Gromov–Witten. Le produit est paramétré par une classe $\tau \in H^*(X)$. Pour $\alpha, \beta \in H^*(X)$, on définit

$$\alpha \bullet_\tau \beta := \sum_{d \in \text{Eff}_X} \sum_{n \geq 0} \sum_k \frac{1}{n!} \langle \alpha, \beta, \underbrace{\tau, \dots, \tau}_n, \phi_k \rangle_{0, n+3, d} \phi^k Q^d \in H^*(X) \otimes \text{Eff}_X[[Q]].$$

De même, les axiomes des invariants de Gromov–Witten permettent de voir que ce produit est associatif, commutatif, de neutre $\mathbf{1}$. En $Q = 0$ on retrouve le cup-produit usuel (la construction similaire, faite à partir d'un orbifold, donne en $Q = 0$ le cup-produit orbifold). Il est pratique d'écrire ce produit à l'aide du *potentiel de Gromov–Witten en genre zéro*

$$\mathcal{F}(\tau) := \sum_{d \in \text{Eff}_X} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \langle \tau^n \rangle_{0, n, d} Q^d,$$

en posant $\langle \tau^n \rangle := \langle \underbrace{\tau, \dots, \tau}_n \rangle$. En décomposant dans la base $\tau = \sum_{k=0}^N t_k \phi_k$, on calcule

$$\tau^n = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \\ \alpha_0 + \dots + \alpha_N = n}} \frac{t_0^{\alpha_0} \cdots t_N^{\alpha_N}}{\alpha_0! \cdots \alpha_N!} \phi_0^{\alpha_0} \cdots \phi_N^{\alpha_N} \text{ de telle sorte que}$$

$$\langle \tau^n \rangle_{0, n, d} = \sum_{\underline{\alpha}} \frac{t^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!} \langle \underbrace{\phi_0, \dots, \phi_0}_{\alpha_0}, \dots, \underbrace{\phi_N, \dots, \phi_N}_{\alpha_N} \rangle_{0, n, d}.$$

On vérifie immédiatement que le produit quantique est caractérisé par

$$\phi_i \bullet_\tau \phi_j = \sum_k \frac{\partial^3 \mathcal{F}(\tau)}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} \phi^k.$$

13. Les conjectures de Ruan

On généralise maintenant le cadre des correspondances de McKay, ce qui va naturellement mener aux conjectures de Ruan. Rappelons qu'un *orbifold* est par définition un champ de Deligne–Mumford complexe à stabilisateur générique trivial. Un *orbifold Gorenstein* est un orbifold tel qu'en chaque point, le stabilisateur agit avec déterminant un sur l'espace tangent. Ceci implique que son espace de modules grossier est Gorenstein, mais ce n'est pas équivalent. Par exemple, la variété $\mathbb{P}(1, 3)$ est lisse, isomorphe à \mathbb{P}_1 mais l'orbifold associé n'est pas Gorenstein. Les conjectures de Ruan prédisent que si $\rho: Z \rightarrow Y$ est une résolution crépante de l'espace de modules grossier Y d'un orbifold de Gorenstein \mathcal{Y} , la grande cohomologie quantique de Z et la grande cohomologie quantique orbifold de \mathcal{Y}

sont reliées par une continuation analytique des paramètres quantiques. Cette conjecture a été formulée plus précisément par Bryan & Graber [10] comme un isomorphisme de variétés de Frobenius (sous une hypothèse restrictive), et ensuite ré-interprétée, en toute généralité, par Coates, Iritani & Tseng [14] comme une transformation symplectique entre les espaces de Givental associés à \mathcal{Y} et Z . Cette transformation symplectique encode toutes les informations sur les relations entre les théories de Gromov–Witten en genre zéro de Z et \mathcal{Y} . Je renvoie au dernier article d'Iritani [35] pour plus de détails sur ces conjectures encore sur des sables mouvants. Je vais m'intéresser dans la suite à une version plus faible. Ces conjectures, sous quelque forme que ce soit, impliquent la *conjecture cohomologique des résolutions crépantes* : la déformation quantique de l'anneau de cohomologie de Z est isomorphe à l'anneau de cohomologie orbifold de \mathcal{Y} , après évaluation des paramètres quantiques en des racines de l'unité. Dans le cas de variétés hyperkähleriennes (ou symplectiques holomorphes), les invariants de Gromov–Witten sont nuls donc la conjecture prévoit dans ce cas un isomorphisme d'algèbres graduées entre $H^*(Z, \mathbb{C})$ et $H_{\text{orb}}(\mathcal{Y})$. Cette conjecture cohomologique hyperkählienne a été vérifiée pour les schémas de Hilbert de points sur une surface K3 (voir Lehn & Sorger [42], Fantechi & Göttsche [20], Uribe [62]), ainsi que pour les résolutions crépantes de quotients symplectiques V/G dont il était question en §9 (voir Ginzburg & Kaledin [24]). La conjecture cohomologique générale a été vérifiée seulement sur quelques familles d'exemples, le principal étant les orbifolds à singularités A_n -transversales, traité par Perroni [55]. Dans les deux sections qui suivent, j'explique les travaux que j'ai effectués autour de cette conjecture sur l'exemple des espaces projectifs à poids : une description de leur cohomologie orbifold, remarquablement proche de celle de la cohomologie orbifold des quotients $[V/G]$ et quelques calculs de résolutions de singularités et d'invariants de Gromov–Witten, permettant de vérifier la conjecture cohomologique de Ruan sur de nouveaux exemples.

14. Cohomologie orbifold des espaces projectifs à poids

Soit $n \geq 1$ un entier et $w := (w_0, \dots, w_n)$ une famille d'entiers strictement positifs (des *poids*). Le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* agit sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par

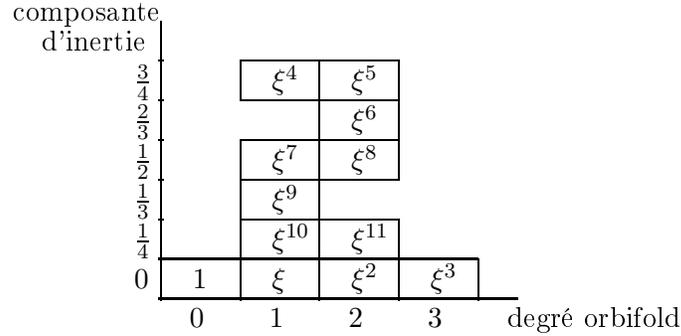
$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) := (\lambda^{w_0} x_0, \dots, \lambda^{w_n} x_n).$$

L'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w)$ est défini comme le champ quotient $[\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*]$. C'est un champ de Deligne–Mumford lisse dont l'espace de modules grossier, noté $|\mathbb{P}(w)|$, est une variété projective de dimension n . Il est facile de voir que le champ $\mathbb{P}(w)$ est un orbifold si et seulement si $\text{pgcd}(w_0, \dots, w_n) = 1$, auquel cas il est Gorenstein si et seulement si chaque poids w_i divise la somme des poids $|w| := w_0 + \dots + w_n$. On compte ainsi un nombre fini d'orbifolds Gorenstein $\mathbb{P}(w)$ en chaque dimension, leur nombre étant le nombre de solutions du problème de combinatoire connu comme le *problème des fractions égyptiennes* (voir [B12]). Dans [B9], nous donnons une description de l'anneau de cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(w)$ en l'identifiant à un modèle combinatoire similaire à celui des quotients globaux, comme le gradué d'une algèbre d'un groupe :

Théorème 14.1 (Boissière, Mann & Perroni [B9]). — *Il existe un isomorphisme d'algèbres de Frobenius graduées entre $H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(w))$ et $\text{gr}_F \mathbb{C}[\mu_{|w|}]$, où $\mu_{|w|}$ est le groupe des racines $|w|$ -ièmes de l'unité et F est une filtration sur $\mathbb{C}[\mu_{|w|}]$.*

Cette description est intéressante car elle fournit une base de l'espace vectoriel de cohomologie orbifold sur laquelle la structure d'anneau est facile à lire. La construction

du modèle (essentiellement la graduation) utilise une combinatoire assez fine associée à la famille de poids. L'isomorphisme entre les deux algèbres de Frobenius est donné explicitement dans une base « géométrique » de la cohomologie orbifold. Toutes les informations pour calculer l'anneau de cohomologie orbifold se lisent alors sur le diagramme suivant, où ξ est une racine primitive 12-ième de l'unité :



Anneau de cohomologie orbifold de $|\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)|$

Une autre façon de représenter cette cohomologie orbifold, qui correspond à la construction du modèle combinatoire et à la définition de la filtration, consiste à représenter sur des disques concentriques les racines w_j -ièmes de l'unité. En les numérotant ensuite dans le sens trigonométrique on obtient la définition du degré sur $\mathbb{C}[\mu_{|w|}]$ qui définit la filtration et le gradué associé. Je renvoie à [B9] pour plus de détails, et me contente de dessiner en Figure 1 cette « voûte étoilée » dans le cas de $\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)$.

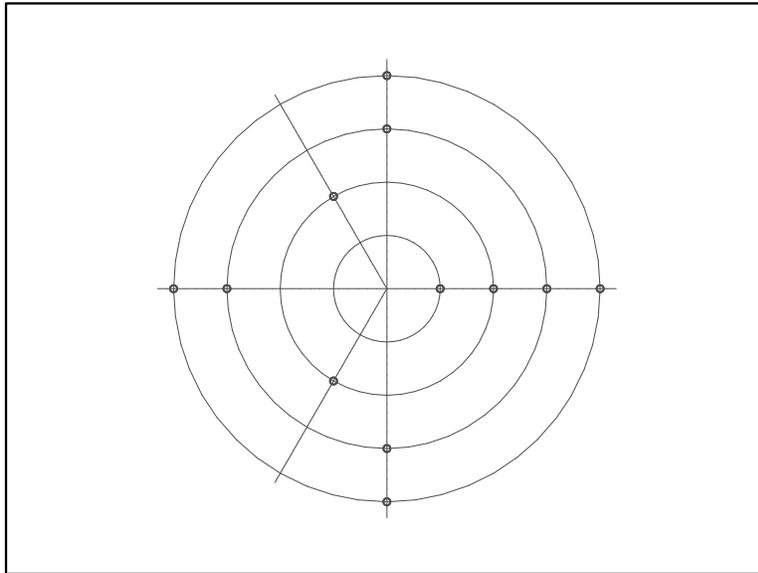


FIGURE 1. Modèle de calcul de la cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)$

Cette façon de représenter la cohomologie orbifold par ce type de diagramme a été réutilisée pour le calcul de la cohomologie orbifold d'hypersurfaces dans des espaces projectifs à poids par Chiodo & Ruan [12].

15. Calculs de déformations quantiques

Le résultat le plus significatif des articles [B10] et [B12] concerne la vérification de la conjecture cohomologique des résolutions crépantes pour l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)$. Son espace de modules grossier a une singularité A_3 -transversale sur la droite $\{[0, 0, x_2, x_3]\}$ et une singularité isolée de type $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ au point $[0, 1, 0, 0]$, ce qui fera apparaître quatre paramètres de déformation quantique :

Théorème 15.1 (Boissière, Mann & Perroni [B10, B12])

La variété $|\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)|$ admet, à isomorphisme près, une unique résolution crépante notée Z . Pour $(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \{(i, i, i, 1), (-i, -i, -i, 1)\}$ il existe un isomorphisme d'anneaux

$$H^*(Z, \mathbb{C})(q_1, q_2, q_3, q_4) \cong H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(1, 3, 4, 4))$$

qui est une isométrie par rapport aux couplages de Poincaré.

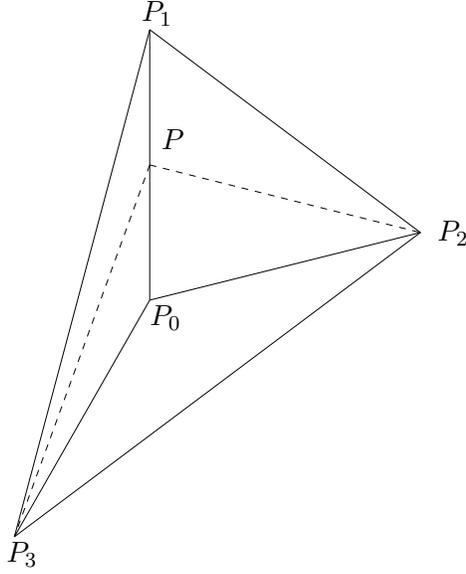
La démonstration utilise d'une part le modèle de calcul de la cohomologie orbifold expliquée ci-dessus, d'autre part des méthodes de géométrie torique pour calculer la résolution crépante des singularités et sa cohomologie et, pour le calcul des invariants de Gromov–Witten, un argument de déformation de la singularité et résolution simultanée, inspiré des travaux de Brieskorn [8]. Ceci est expliqué dans [B12]. Cela permet de fixer les trois premiers paramètres quantiques correspondant à la singularité A_3 -transversale. Concernant le quatrième paramètre quantique, dans [B12] nous observons qu'il peut, bizarrement, être pris nul et nous donnons d'autres espaces projectifs à poids ayant cette propriété. Dans [B10] nous utilisons des résultats de Coates, Iritani & Tseng [14] sur la cohomologie quantique de $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ pour montrer que ce quatrième paramètre quantique peut aussi être évalué en 1. L'isomorphisme d'anneaux construit est défini explicitement dans des bases de la cohomologie.

Pour illustrer la méthode utilisée, je traite ici en détail un espace projectif à poids plus simple, dont on connaît les invariants de Gromov–Witten nécessaires d'après les résultats de Perroni [55] : la vérification de la conjecture de Ruan résultera donc d'un simple calcul. Considérons $\mathcal{Y} := \mathbb{P}(1, 1, 2, 2)$, dont l'espace de modules grossier Y a une singularité A_1 -transversale. Notons $\rho: Z \rightarrow Y$ son unique résolution crépante (elle existe comme pour toute singularité torique de dimension trois, et est unique car c'est une singularité A_1 -transversale, d'après Perroni [55]). Notons Σ l'éventail torique de Y et Σ' celui de Z , obtenu par subdivision de Σ . L'éventail de Y est construit sur les faces du tétraèdre de sommets les points $P_0 := (-1, -2, -2)$, $P_1 := (1, 0, 0)$, $P_2 := (0, 1, 0)$ et $P_3 := (0, 0, 1)$. Celui de Z est obtenu en ajoutant le rayon engendré par $P := (0, -1, -1)$, comme le montre la Figure 2 (je renvoie à [B12] pour plus de détails sur les éventails des champs toriques).

Posons $H := c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)) \in H^2(\mathcal{Y}, \mathbb{C})$ et $h := \rho^*H \in H^2(Z, \mathbb{C})$. Notons $b_i \in H^2(Z, \mathbb{C})$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ la classe du diviseur invariant sous l'action du tore correspondant au rayon de Σ' engendré par P_i , et similairement $e \in H^2(Z, \mathbb{C})$ pour celui engendré par P . On calcule facilement que

$$H^*(Z, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[h, e] / \langle h^2 + \frac{1}{4}e^2 - he, h^2e \rangle.$$

Puisque ρ est crépante, on a $h = \frac{1}{|w|}(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + e)$ (voir Fulton [23]). On calcule que le cône de Mori des classes de courbes effectives contractées est engendré par la classe Γ dont le dual de Poincaré est eb_2 . Etant donné que $\dim([\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(Z, d\Gamma)]^{\text{vir}}) = 3$, les invariants de Gromov–Witten $\Psi_{d\Gamma}^Z(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont non nuls seulement si les α_i sont de degré

FIGURE 2. Polytope de $\mathbb{P}(1, 1, 2, 2)$ et sa résolution crépante.

cohomologique deux. Par l'axiome du diviseur, on a pour tout entier d

$$\Psi_{d\Gamma}^Z(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\int_{\Gamma} \alpha_1 \right) \left(\int_{\Gamma} \alpha_2 \right) \left(\int_{\Gamma} \alpha_3 \right) \cdot d^3 \cdot \Psi_{\Gamma}^Z(\cdot).$$

En utilisant les formules de Mann [45, Proposition IV.3.13] on trouve

$$\int_Z h^3 = \int_Z \rho^* c_1(\mathcal{O}_Y(1))^3 = \int_{\mathbb{P}(1,1,2,2)}^{\text{orb}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,2,2)}(1))^3 = \frac{1}{4},$$

ce qui donne la valeur des invariants de Gromov–Witten

$$\begin{aligned} \Psi_{d\Gamma}^Z(h, h, h) &= 0, & \Psi_{d\Gamma}^Z(h, h, e) &= 0, \\ \Psi_{d\Gamma}^Z(h, e, e) &= 0, & \Psi_{d\Gamma}^Z(e, e, e) &= -2^3 d^3 \cdot \Psi_{\Gamma}^Z(\cdot). \end{aligned}$$

Les formules de Perroni [55] fournissent $\Psi_{\Gamma}^Z(\cdot) = \frac{2}{d^3} \int_{|\mathbb{P}(2,2)|} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(2,2)}(1)) = \frac{1}{d^3}$. On en déduit la correction quantique

$$e \star e = -4h^2 + \left(4 + \frac{8q}{1-q} \right) he,$$

et donc

$$H_p^*(Z, \mathbb{C})(q) \cong \mathbb{C}((q))[h, e] / \langle h^2 e, h^2 + \frac{1}{4}e^2 - he - \frac{2q}{1-q} he \rangle.$$

Le modèle de calcul de la cohomologie orbifold expliquée en §14 fournit une présentation de l'anneau de cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(1, 1, 2, 2)$:

$$H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(1, 1, 2, 2), \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[H, E] / \langle H^2 - E^2, H^2 E \rangle.$$

Si l'on pose $q = -1$ et que l'on définit l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(1, 1, 2, 2), \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbf{H}_{\rho}^*(Z, \mathbb{C})(-1) \\ H &\mapsto h, \\ E &\mapsto \frac{i}{2}e. \end{aligned}$$

on vérifie facilement que l'on obtient un isomorphisme d'anneaux.

PARTIE III
AUTOMORPHISMES DES VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES
HOLOMORPHES IRRÉDUCTIBLES

16. Variétés symplectiques holomorphes irréductibles

Une variété symplectique holomorphe irréductible est par définition une variété complexe X compacte, kählérienne, lisse, simplement connexe et admettant une forme fermée symplectique holomorphe σ_X unique à multiplication scalaire près : $H^0(X, \Omega_X^2) \cong \mathbb{C}\sigma_X$. L'existence de cette forme symplectique force X à être de dimension complexe paire. En dimension deux, on trouve exactement les surfaces K3. En dimension supérieure, les deux familles standards de variétés symplectiques holomorphes sont :

1. Les schémas de Hilbert de points sur une surface K3 : si S est une surface K3, $S^{[n]} := \text{Hilb}^n(S)$ (voir §1) est une variété symplectique holomorphe irréductible [3] de dimension $2n$.
2. Les variétés de Kummer généralisées : si A est tore complexe de dimension deux, on note $A^{[n]}$ la fibre au-dessus de l'origine du morphisme $\text{Hilb}^n(A) \xrightarrow{p} A^n/\mathfrak{S}_n \xrightarrow{s} A$ où s est la sommation. La variété $A^{[n]}$ est symplectique holomorphe irréductible [3] de dimension $2n - 2$.

Il existe d'autres constructions, qui sont des déformations de schémas de Hilbert de deux points sur une surface K3, comme les variétés de Fano d'hypersurfaces cubiques dans \mathbb{P}^5 (voir [5]). Les seuls exemples nouveaux connus — à ce jour! — qui ne sont pas des déformations des familles précédentes sont des espaces de modules de faisceaux sur des surfaces K3 ou des surfaces abéliennes construits par O'Grady [50, 51].

Soit X une variété symplectique holomorphe irréductible. Il existe sur $H^2(X, \mathbb{Z})$ une forme bilinéaire symétrique canonique notée q_X , la *forme de Beauville–Bogomolov* [3] — dont nous noterons encore ainsi l'extension à $H^2(X, \mathbb{R})$ et $H^2(X, \mathbb{C})$ — non-dégénérée et de signature $(3, b_2(X) - 3)$ sur $H^2(X, \mathbb{R})$ et telle que, pour la décomposition de Hodge

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X),$$

l'espace $H^{1,1}(X)$ est orthogonal à $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X) = \mathbb{C}\sigma_X \oplus \overline{\mathbb{C}\sigma_X}$. La restriction de q_X à $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$ a pour signature $(1, b_2(X) - 3)$. Notons \mathcal{K}_X l'ensemble des classes de $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$ pouvant être représentées par une forme fermée de type $(1, 1)$ positive : c'est un cône convexe ouvert dans $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$ appelé le *cône de Kähler* de X . Posons $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} := H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$, notons $\text{NS}(X) := H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} \cap H^2(X, \mathbb{Z})$ le *groupe de Néron–Severi* de X , $\rho(X) := \text{rg NS}(X)$ son *nombre de Picard* et $T(X) := \text{NS}(X)^{\perp}$ l'orthogonal de $\text{NS}(X)$ dans $H^2(X, \mathbb{Z})$. En notant la signature d'un réseau sous la forme du triplet du nombre de valeurs propres positives, nulles puis négatives de la forme quadratique réelle associée, il y a trois types possibles :

- type *hyperbolique* : $\text{NS}(X)$ est non dégénéré de signature $(1, 0, \rho(X) - 1)$ et $T(X)$ a pour signature $(2, 0, b_2(X) - \rho(X) - 2)$;
- type *parabolique* : $\text{NS}(X) \cap T(X)$ est de dimension 1, $\text{NS}(X)$ a pour signature $(0, 1, \rho(X) - 1)$ et $T(X)$ a pour signature $(2, 1, b_2(X) - \rho(X) - 3)$;
- type *elliptique* : $\text{NS}(X)$ est défini négatif, de signature $(0, 0, \rho(X))$ et $T(X)$ a pour signature $(3, 0, b_2(X) - \rho(X) - 3)$.

D'après Huybrechts [34], X est projective si et seulement si $\text{NS}(X)$ est hyperbolique.

Le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(X)$ est de dimension nulle (égale à $h^0(X, T_X)$), c'est donc un ensemble discret et dénombrable (voir [B11]). On a une application naturelle

$$\text{Aut}(X) \longrightarrow \text{O}(\text{H}^2(X, \mathbb{Z}), q_X), \quad f \mapsto f^*.$$

Si X est une surface K3, cette application est injective et l'on dispose du théorème de Torelli global : si $\phi \in \text{O}(\text{H}^2(X, \mathbb{Z}), q_X)$ est compatible à la décomposition de Hodge et envoie une classe de Kähler sur une classe de Kähler, alors il existe un automorphisme $f \in \text{Aut}(X)$ tel que $f^* = \phi$. En dimension supérieure ce résultat fait défaut (par exemple, il existe un contre-exemple de Debarre [16] avec des schémas de Hilbert de deux points sur une surface K3) et rend l'étude des automorphismes beaucoup plus difficile que pour les surfaces K3. Un autre défaut est que l'application naturelle ci-dessus n'est plus injective en général. Huybrechts [34] montre cependant que le noyau de cette application est un groupe fini : un automorphisme agissant trivialement sur la cohomologie laisse *a fortiori* invariante une classe de Kähler, donc aussi la métrique de Calabi-Yau uniquement associée. C'est donc une isométrie. Or le groupe des isométries d'une variété riemannienne compacte est un groupe compact, ici contenu dans le groupe discret $\text{Aut}(X)$, donc fini. Concernant la structure du groupe $\text{Aut}(X)$, Oguiso [52] démontre qu'il est de type fini si X n'est pas algébrique (les cas paraboliques et elliptiques). Par contre, la question reste ouverte dans le cas algébrique (l'argument de Sterk [61] démontrant le résultat similaire pour les surfaces K3 ne s'étend pas). Dans les articles [B11, B13, B14] nous avons cherché à obtenir des résultats plus précis en regardant les schémas de Hilbert de points sur une surface K3 et les variétés de Kummer généralisées.

On s'intéressera plus particulièrement aux automorphismes d'ordre fini. Si $f \in \text{Aut}(X)$ est d'ordre $d \geq 2$, on dira que f est *symplectique* s'il laisse invariante la forme symplectique : $f^*\sigma_X = \sigma_X$, et au contraire *purement non symplectique* s'il existe une racine primitive d -ième de l'unité ξ telle que $f^*\sigma_X = \xi\sigma_X$. L'existence d'automorphismes purement non symplectiques n'est possible que si X est projective [3]. En effet, on sait qu'une variété complexe compacte est projective si et seulement si elle a une forme de Kähler ω dont la classe de cohomologie $[w] \in \text{H}^2(X, \mathbb{C})$ est entière. Pour les variétés symplectiques holomorphes, il suffit de savoir que cette classe est rationnelle. Ainsi, si f est un automorphisme purement non symplectique d'ordre d , puisque $\text{H}^2(X, \mathbb{Q})$ est dense dans $\text{H}^2(X, \mathbb{R})$ et que le cône de Kähler \mathcal{K}_X est ouvert dans $\text{H}^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$, il existe une classe $c \in \text{H}^2(X, \mathbb{Q})$ dont la composante $(1, 1)$ est une classe de Kähler. Prenons $h := \sum_{i=1}^d (f^i)^*c$: cette classe a la même propriété et est f^* -invariante. Mais $\text{H}^{2,0}(X)$ ne contient aucune classe f^* -invariante puisque f est purement non symplectique, donc h est de type $(1, 1)$, c'est donc une classe de Kähler rationnelle.

17. Automorphismes des schémas de Hilbert de points sur une surface K3

Soit S une surface, pour l'instant « quelconque » (analytique complexe, connexe, compacte, kählerienne et lisse). Il existe un morphisme naturel de groupes de Lie (voir [B11])

$$\text{Aut}(S) \longrightarrow \text{Aut}(S^{[n]})$$

dont l'image sera appelée le *groupe des automorphismes naturels*. Dans [B11], je démontre que $\dim \text{Aut}(S^{[n]}) = \dim \text{Aut}(S)$: les composantes connexes de l'identité de ces deux groupes sont donc isomorphes. Cependant, si S est une surface K3 cette information est peu utile puisque ces groupes sont de dimension nulle. Dans [B13], nous précisons la relation entre ces groupes dans le cas des surfaces K3. Cette étude est facilitée par le résultat suivant,

dû à Beauville [2] : si S est une surface K3, le morphisme naturel $\text{Aut}(S^{[n]}) \rightarrow \text{O}(\text{H}^2(X, \mathbb{Z}))$ est injectif, comme dans le cas des surfaces K3. En effet, un automorphisme agissant trivialement sur la cohomologie s'étend en un automorphisme sur une famille de Kuranishi de $S^{[n]}$. Mais si l'on regarde la sous-déformation obtenue en déformant seulement la surface K3, qui est une hypersurface dans cette famille de déformations, puisqu'une surface K3 générique a un groupe d'automorphismes réduit à l'identité, cet automorphisme étendu à la déformation est l'identité sur un ouvert dense de l'espace de paramètres. C'est donc l'identité sur la fibre spéciale $S^{[n]}$. On peut en déduire une caractérisation simple des automorphismes naturels :

Théorème 17.1 (Boissière & Sarti [B13]). —

1. *Un automorphisme $f \in \text{Aut}(S^{[n]})$ est naturel si et seulement si $f(E) = E$.*
2. *Si $\text{NS}(S) = \{0\}$, alors $\text{Aut}(S) = \text{Aut}(S^{[n]})$ (tout automorphisme est naturel).*

La première assertion s'obtient en faisant un lien entre les cônes de Kähler de S et $S^{[n]}$ puis en utilisant le théorème de Torelli global et l'injectivité de l'application $f \mapsto f^*$. La seconde découle alors de la première et du fait que, si S est une surface K3, on a un isomorphisme $\text{NS}(S^{[n]}) \cong \text{NS}(S) \oplus \frac{1}{2}\mathbb{Z}[E]$.

On connaît très peu d'automorphismes non naturels. Beauville [2] en construit un ainsi. Considérons $S \subset \mathbb{P}_3$ une surface K3 définie comme le lieu des zéros d'un polynôme homogène de degré quatre. Pour un choix générique, S ne contient aucune droite. A toute paire de points $\{x, y\}$ sur S on peut alors associer la paire $\{z, t\}$ formée des deux autres points d'intersection de S avec la droite passant par x et y . Ceci définit une application rationnelle $S^{[2]} \rightarrow S^{[2]}$, dont on peut montrer qu'elle est en fait définie partout. Ceci donne une involution non naturelle sur $S^{[2]}$. Une variante de cette construction permet d'obtenir un exemple concret de variété symplectique holomorphe irréductible dont le groupe d'automorphismes est infini [1, 53] : considérons une surface K3 admettant deux plongements distincts comme quartiques dans \mathbb{P}_3 , tous deux ne contenant aucune droite. Chaque plongement permet de construire comme ci-dessus une involution sur $S^{[2]}$. Leur composée est un automorphisme d'ordre infini : cela se voit par exemple en calculant son action sur la cohomologie.

18. Automorphismes des variétés de Kummer généralisées

Soit A un tore complexe et $A^{[n]}$ la variété de Kummer généralisée associée. Les choses se passent ici plus mal : on voit facilement que le morphisme $f \mapsto f^*$ n'est pas injectif [3] : si $a \in A$ est un point de n -torsion, la translation t_a par a sur A induit un automorphisme $t_a^{[n]}$ non trivial de $A^{[n]}$, mais ce même morphisme, vu sur le schéma de Hilbert $A^{[n]}$, est homotope à l'identité donc agit trivialement sur la cohomologie. On montre par ailleurs que le morphisme de restriction $\text{H}^2(A^{[n]}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{H}^2(A^{[n]}, \mathbb{C})$ est surjectif, donc $t_a^{[n]}$ agit trivialement sur la cohomologie. On peut toutefois, comme dans le cas des schémas de Hilbert, arriver au résultat optimal. Notons pour ceci $E_0 := E \cap A^{[n]}$ le diviseur exceptionnel de $A^{[n]}$. On observe tout d'abord qu'il n'y a pas d'application naturelle $\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Aut}(A^{[n]})$ puisqu'un automorphisme naturel de $A^{[n]}$ ne respecte pas nécessairement la fibre $A^{[n]}$. Cependant, on a une décomposition naturelle $\text{Aut}(A) \cong A \rtimes \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$ de tout automorphisme en composée d'une translation et d'un morphisme de groupe. On constate facilement qu'il suffit alors de ne considérer que des translations par des éléments de n -torsion de A . En

notant $T_n(A)$ ce groupe des points de n -torsion, on a donc un morphisme de groupes naturel

$$T_n(A) \times \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A) \longrightarrow \text{Aut}(A^{\llbracket n \rrbracket})$$

dont l'image est appelée encore le groupe des *automorphismes naturels*.

Théorème 18.1 (Boissière, Sarti & Nieper-Wißkirchen [B14])

1. Un automorphisme $f \in \text{Aut}(A^{\llbracket n \rrbracket})$ est naturel si et seulement si $f(E_0) = E_0$.
2. Le noyau du morphisme $\text{Aut}(A^{\llbracket n \rrbracket}) \rightarrow \text{O}(\text{H}^2(A^{\llbracket n \rrbracket}, \mathbb{Z}))$ est isomorphe à $T_n(A) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La première assertion s'obtient, contrairement au cas des schémas de Hilbert, par un argument topologique : on regarde l'automorphisme induit sur le revêtement universel de $A^{\llbracket n \rrbracket} \setminus E_0$, dont on montre qu'il doit provenir d'un automorphisme de A . La deuxième assertion s'en déduit ainsi : on sait d'après la première assertion que ce noyau ne consiste que d'automorphismes naturels, par ailleurs d'ordre fini puisque le noyau est un groupe fini. On sait déjà que les automorphismes induits par des translations par des points de n -torsion sont dans le noyau, il reste donc seulement à étudier ceux obtenus à partir d'automorphismes de groupes d'ordre fini, dont l'action sur la cohomologie est facile à calculer : on montre que seuls $\pm \text{id}$ agissent trivialement.

19. Variétés d'Enriques

Soit S une surface K3 admettant une involution $\iota : S \rightarrow S$ sans point fixe. Cette involution est nécessairement non symplectique et S est projective. Le quotient $Y := S/\langle \iota \rangle$ est une *surface d'Enriques* : c'est une surface complexe kählerienne compacte lisse dont le diviseur canonique est de 2-torsion ($2K_Y = 0$ dans $\text{Pic}(Y)$) et la caractéristique d'Euler holomorphe vaut $\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$. Il est facile de voir que réciproquement, toute surface d'Enriques est le quotient d'une surface K3 par une involution sans point fixe [4]. Il est aussi facile d'en trouver des exemples : prenons comme surface K3 l'intersection complète S de trois quadriques dans \mathbb{P}^5 , données par des équations $Q_i(x_0, x_1, x_2) = Q'_i(y_0, y_1, y_2)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ où $[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2]$ sont les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^5 . Considérons l'involution $\iota : \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^5$ donnée par $\iota([x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2]) = [x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2]$. Cette involution laisse S globalement invariante et fixe un plan dans \mathbb{P}^5 , donc pour un choix générique des quadriques ce lieu fixe n'intersecte pas S . Ainsi $S/\langle \iota \rangle$ est une surface d'Enriques.

On cherche en quelle mesure cette notion peut se généraliser en dimension supérieure. Il est déjà facile de généraliser la construction ci-dessus : prenons par exemple, dans \mathbb{P}_{13} de coordonnées $[x_0, \dots, x_6, y_0, \dots, y_6]$, l'intersection complète X de sept quadriques de la forme $Q_i(\underline{x}) = Q'_i(\underline{y})$ et l'involution $\iota : \mathbb{P}_{13} \rightarrow \mathbb{P}_{13}$ définie par $\iota(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, -\underline{y})$. Cette involution ι laisse X globalement invariante et pour un choix générique des quadriques, sa restriction à X est sans point fixe. On vérifie que X est une variété de Calabi–Yau (par définition, une variété de Calabi–Yau est simplement connexe, de diviseur canonique trivial, et $h^0(X, \Omega_X^i) = 0$ pour $0 < i < \dim X$). Le quotient $Y := X/\iota$ est tel que K_Y est d'ordre deux dans $\text{Pic}(Y)$ et $\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$; Y peut donc prétendre à être appelée une *variété d'Enriques*. On peut similairement généraliser en grande dimension d'autres constructions de surfaces d'Enriques (par exemple, les congruences de Reyes) pour obtenir des quotients de variétés de Calabi–Yau par des involutions sans point fixe.

Tentons de faire mieux : peut-on faire des quotients par des automorphismes de degré plus grand, afin que le diviseur canonique soit d'ordre plus grand ? Posons pour ceci la définition suivante :

Définition 19.1. — Une *variété d'Enriques* est une variété Y complexe, compacte, kählerienne et lisse dont le diviseur canonique est d'ordre $d \geq 2$ dans $\text{Pic}(Y)$, de groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et telle que $\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$. L'entier d est appelé l'*indice* de Y .

Cette définition est plus large que celle utilisée dans [B14], afin d'englober plus d'exemples (voir la discussion dans [B14]) ainsi que le point de vue de Schröer & Oguiso [54]. Si l'on retire l'hypothèse $\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$, pour demander seulement $\chi(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0$ on pourra parler de variété d'Enriques *faible*; elles pourront parfois apparaître comme quotients intermédiaires entre une variété symplectique holomorphe irréductible et une variété d'Enriques.

Les exemples de variétés d'Enriques construits à partir de variétés de Calabi–Yau de dimension paire ne peuvent pas permettre d'obtenir des indices supérieurs à deux car seules les involutions peuvent agir sans point fixe (la caractéristique d'Euler holomorphe d'une variété de Calabi–Yau de dimension paire est deux). Partir de variétés de Calabi–Yau de dimension impaire ne répondrait pas à la question car cela produirait des quotients de caractéristique d'Euler holomorphe nulle, plus proches en ce sens d'une généralisation des surfaces bielliptiques. Pour ces raisons, et toujours en visant la généralisation des surfaces K3, on en vient donc naturellement à chercher des quotients de variétés symplectiques holomorphes irréductibles par des automorphismes agissant librement. On n'obtient cependant pas de classification aussi complète que pour les surfaces. Je compile ici les résultats complémentaires obtenus indépendamment dans [B14] et [54]. Les quatre premières assertions sont des conséquences numériques du théorème de décomposition de Beauville–Bogomolov.

Théorème 19.1. —

1. *Toute variété d'Enriques est de dimension paire.*
2. *Soit X une variété symplectique holomorphe irréductible de dimension $2n - 2$ et $f \in \text{Aut}(X)$ d'ordre $d \geq 2$ agissant librement. Alors d divise n . Si $d = n$, le quotient $Y := X/\langle f \rangle$ est une variété d'Enriques de dimension $2n - 2$ et d'indice n . Si d est un diviseur strict de n , Y est une variété d'Enriques faible d'indice d [B14].*
3. *Soit Y une variété d'Enriques de dimension $2n - 2$ et d'indice n . Si n est premier ou impair, alors Y est isomorphe au quotient d'une variété symplectique holomorphe par un automorphisme d'ordre n agissant librement [B14].*
4. *Toute variété d'Enriques d'indice 2 est isomorphe au quotient d'une variété de Calabi–Yau par une involution sans point fixe [B14].*
5. *Toute variété complexe connexe et non simplement connexe dont le revêtement universel est une variété symplectique holomorphe irréductible a un groupe fondamental cyclique, c'est alors une variété d'Enriques faible [54].*

Pour finir, notons que toute variété d'Enriques isomorphe à un quotient de variété symplectique holomorphe irréductible par un automorphisme agissant librement est nécessairement projective, car l'automorphisme est obligatoirement purement non symplectique, sinon il aurait des points fixes comme on le voit facilement en calculant son nombre de Lefschetz (voir [B14]). Il reste à prouver que de telles variétés existent bien :

Théorème 19.2 (Boissière, Sarti & Nieper-Wißkirchen [B14]; Oguiso & Schröer [54])

Il existe des variétés d'Enriques d'indice trois et quatre.

On démontre ce résultat en construisant explicitement des variétés symplectiques holomorphes irréductibles admettant des automorphismes d'ordre trois et quatre agissant librement. La construction n'est pas difficile en elle-même : il est facile de contrôler que les automorphismes construits n'ont pas de point fixe. La difficulté réside dans le fait qu'il n'est pas facile de trouver une situation qui fonctionne : on connaît peu de variétés symplectiques holomorphes, et peu d'automorphismes dessus. Concentrons-nous sur la construction de variétés d'Enriques de dimension $2n - 2$ et d'indice n (le cas maximal). Si l'on part du schéma de Hilbert de $n - 1$ points sur une surface K3, on voit facilement que tout automorphisme $f^{[n]}$ d'ordre $n \geq 3$ construit à partir d'un automorphisme f de la surface S aura des points fixes sur $S^{[n-1]}$. En effet, f a des points fixes sur S (son nombre de Lefschetz n'est pas nul), donc tout sous-schéma de longueur $n - 1$ dont l'idéal est monomial dans un système local de coordonnées linéarisant et diagonalisant l'action de f est un point fixe de $f^{[n]}$ (voir [B11]). Considérons donc maintenant les automorphismes naturels d'ordre n d'une variété de Kummer généralisée $A^{[n]}$. Les points fixes construits précédemment sur $A^{[n]}$, s'ils sont portés en des points de n -torsion, vivent sur $A^{[n]}$. De plus, les orbites $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ peuvent donner des points fixes si la somme des points est nulle. Seules quelques situations bien choisies permettent alors d'éviter les points fixes (je renvoie à [B14] pour plus de détails) :

Proposition 19.3 (Boissière, Sarti & Nieper-Wißkirchen [B14])

Soit E une courbe elliptique admettant un automorphisme d'ordre $n \in \{3, 4\}$, ξ_n une racine primitive n -ième de l'unité, $A := E \times E$, $h \in \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$ donné par $h = \begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_1, a_2 \in E \setminus \{0\}$ des points d'ordre n , $a := (a_1, a_2) \in A$ et $f := t_a \circ h$. Alors pour un choix approprié de a_1 , $\langle f^{[n]} \rangle$ agit librement sur $A^{[n]}$ et $A^{[n]} / \langle f^{[n]} \rangle$ est une variété d'Enriques de dimension $2n - 2$ et d'indice n .

Par contre, la construction similaire pour $n = 6$ ne fonctionne pas : les automorphismes ainsi construits ont bel et bien des points fixes. Il faudra donc de nouvelles idées pour continuer. Notons que la définition assez souple de variété d'Enriques donnée ci-dessus ouvre la voie à d'autres exemples. Considérons la variété de Calabi–Yau X de dimension 6 munie d'une involution sans point fixe ι construite plus haut, et notre exemple $A^{[3]}$ de variété de Kummer généralisée admettant un automorphisme $f^{[3]}$ d'ordre 3 agissant librement. Alors le produit $X \times A^{[3]} / \langle \iota \times f^{[3]} \rangle$ est une variété d'Enriques d'indice 6. Cependant, elle est isomorphe au produit $X / \langle \iota \rangle \times A^{[3]} / \langle f^{[3]} \rangle$, donc est en fait un *produit* de variétés d'Enriques déjà construites. Similairement, le produit $A^{[3]} / \langle f^{[3]} \rangle \times A^{[4]} / \langle f^{[4]} \rangle$ des variétés d'Enriques d'indices 3 et 4 construites ci-dessus donne une variété d'Enriques d'indice 12. Il convient donc de préciser la définition, et on peut proposer cette solution :

Définition 19.2. — Une variété d'Enriques est dite *irréductible* si le groupe d'holonomie de son revêtement universel est irréductible.

Le théorème de décomposition de Beauville–Bogomolov donne directement la classification des variétés d'Enriques irréductibles :

Proposition 19.4. — Toute variété d'Enriques irréductible est isomorphe soit au quotient d'une variété de Calabi–Yau de dimension paire par une involution sans point fixe, soit au quotient d'une variété symplectique holomorphe irréductible par un automorphisme agissant librement.

Les résultats de classification obtenus précédemment se reformulent alors ainsi :

Corollaire 19.5. — *Toute variété d'Enriques d'indice premier est irréductible.*

Nous arrivons alors à une forme finale du théorème d'existence de variétés d'Enriques de dimension supérieure :

Corollaire 19.6. — *Il existe des variétés d'Enriques irréductibles d'indice 2, 3 et 4.*

PARTIE IV

GÉOMÉTRIE EFFECTIVE : DROITES SUR DES SURFACES

20. Surfaces ayant un grand nombre de droites

Le problème du nombre maximal de droites qu'une surface algébrique de degré d de \mathbb{P}_3 peut contenir est un thème assez ancien et très classique. On sait bien que toute surface cubique contient 27 droites (voir ⁽¹⁾ Figure 3). En degré supérieur ou égal à quatre, les premiers résultats remontent à 1943 : Segre [58, 59] résout la question pour $d = 4$ en montrant que le nombre maximum possible de droites est 64 (il est d'ailleurs facile d'en construire des exemples). La question reste ouverte en degré supérieur. Segre donne une borne maximale $(d - 2)(11d - 6)$ qui est lâche déjà en degré quatre. Les méthodes traditionnelles pour construire des surfaces ayant un grand nombre de droites consistent à prendre des équations faciles à étudier : des surfaces de la forme $\phi(x, y) = \psi(z, t)$, où ϕ, ψ sont des polynômes homogènes de degré d , ou des revêtements de degré d de \mathbb{P}_2 ramifiés le long d'une courbe de degré d , $y^d = f(x, y, z)$. Dans ces deux cas, les nombres de droites sont faciles à calculer par des techniques de géométrie élémentaires :

Proposition 20.1 (Boissière & Sarti [B7]). — *Le nombre N_d de droites sur une surface de degré d d'équation $\phi(x, y) = \psi(z, t)$ est*

- $N_d = 3d^2$ pour $d \geq 3$ et $d \notin \{4, 6, 8, 12, 20\}$;
- $N_4 = 64, N_6 = 180, N_8 = 256, N_{12} = 864, N_{20} = 1600$.

En fait, ce résultat très classique figure dans la littérature, mais les démonstrations sont souvent imprécises. Dans [B7] nous donnons une démonstration détaillée.

Proposition 20.2 (Boissière & Sarti [B7]). — *Soit C une courbe projective plane lisse de degré d ayant β points d'inflexion totale. Alors la surface S obtenue comme le revêtement de degré d de \mathbb{P}_2 ramifié le long de C contient exactement $\beta \cdot d$ droites. En particulier, elle ne contient pas plus de $3d^2$ droites.*

Dans [B7] nous utilisons une méthode nouvelle pour trouver des surfaces ayant plus de droites. Chercher des équations simples à manipuler revient en fait à considérer des surfaces ayant un groupe de symétries petit. Par exemple, les surfaces $\phi(x, y) = \phi(z, t)$ (ici, $\psi = \phi$) ont pour groupe de symétrie un groupe polyédral, à savoir le groupe d'isomorphismes de \mathbb{P}_1 permutant le lieu des zéros de ϕ . Cela explique les valeurs exceptionnelles des nombres de droites en degrés 4, 6, 8, 12, 20, qui correspondent aux nombres et configurations possibles de points dans \mathbb{P}_1 ayant un groupe de symétrie polyédral. Pour faire mieux, la méthode va donc consister à chercher des surfaces ayant un groupe de symétrie plus grand, l'idée étant que si le groupe est gros, et si la surface contient une droite, elle contiendra alors toute l'orbite que l'on peut espérer être grande.

Rappelons la définition des groupes bipolyédraux. Partant du revêtement double $\phi: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, si $G \subset \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ est un groupe polyédral, son image inverse $\tilde{G} := \phi^{-1}G$ est dit *polyédral binaire*. Considérons alors la suite exacte quaternionique

$$0 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{SO}(4, \mathbb{R}) \longrightarrow 0.$$

1. Source : <http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/surf/logo.jpg>

Le groupe image $\sigma(\tilde{G} \times \tilde{G}) \subset \mathrm{SO}(4, \mathbb{R})$ est dit *bipolyédral*. En particulier, le groupe bioctaédral, obtenu à partir du groupe octaédral, a pour cardinal 1152.

Nous améliorons ainsi la borne 256 en degré 6 :

Théorème 20.3 (Boissière & Sarti [B7]). — *Il existe une octique de \mathbb{P}_3 , à symétries bioctaédrales, contenant 352 droites.*

L'équation de cette surface provient de l'étude des surfaces à symétries bipolyédrales faite par Sarti [57] :

$$x^8 + y^8 + z^8 + t^8 + 168(x^2y^2z^2t^2) + 14(x^4y^4 + x^4z^4 + x^4t^4 + y^4z^4 + y^4t^4 + z^4t^4).$$

Pour calculer les nombres de droites sur cette surface, nous avons utilisé une méthode de calcul consistant à paramétrer les droites par leurs coordonnées de Plücker. Le nombre de droites est alors le nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales. Nous avons implémenté cet algorithme sur le logiciel SINGULAR [28].

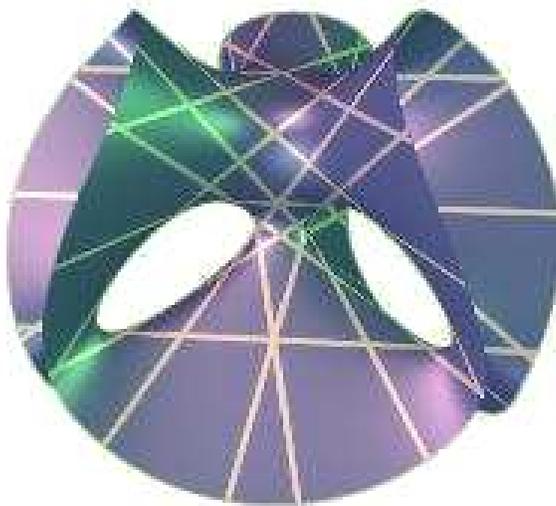


FIGURE 3. Surface cubique avec 27 droites

21. Application à l'étude du groupe de Néron–Severi d'une surface

Le groupe de Néron–Severi $\mathrm{NS}(S)$ d'une surface lisse S donne des informations importantes sur sa géométrie, mais est difficile à décrire en général. On cherche tout d'abord à calculer son nombre de Picard $\rho(S) := \mathrm{rg} \mathrm{NS}(S)$, puis à trouver une famille de générateurs sur \mathbb{Z} . Pour ceci, il est plus simple de commencer par chercher des générateurs de $\mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Si l'on connaît déjà le déterminant du réseau $\mathrm{NS}(S)$, cela peut permettre d'en déduire une famille de générateurs, ou l'existence de classes divisibles. Pour une surface lisse $S \subset \mathbb{P}_3$ de degré $d \geq 3$, les droites contenues dans L ne sont pas des classes de torsion dans $\mathrm{NS}(S)$ et engendrent ainsi un sous-réseau que nous notons $\mathrm{LC}(S)$. Ces droites font des candidats très simples pour engendrer le groupe de Néron–Severi. Nous dirons que $\mathrm{NS}(S)$ est *rationnellement engendré par des droites* si $\mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathrm{LC}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Il est par exemple bien connu que le groupe de Néron–Severi des surfaces de Fermat est rationnellement engendré par des droites [60]. Nous généralisons ce résultat à toutes les quadriques lisses S_ϕ de la forme $\phi(x, y) = \phi(z, t)$ où ϕ est un polynôme homogène de degré quatre. Par choix de coordonnées, on peut écrire ϕ sous la forme

$$\phi(x, y) = yx(y - x)(y - \lambda x)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

La relation entre la géométrie de S_ϕ , qui est une surface K3, et les propriétés arithmétiques de la courbe elliptique E_ϕ définie par $t^2 = \phi(1, y)$ a été étudiée par de nombreux auteurs. Le lien entre le nombre de Picard $\rho(S_\phi)$ et l'existence d'une multiplication complexe sur E_ϕ est particulièrement intéressant et utile dans la démonstration du théorème qui suit. En effet, on a (voir [38] et les références indiquées) :

$$\rho(S_\phi) = \begin{cases} 20 & \text{si } E_\phi \text{ admet une multiplication complexe} \\ 19 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 21.1 (Boissière & Sarti [B8]). — *Le groupe de Néron-Severi de S_ϕ est rationnellement engendré par des droites exactement dans les cas suivants :*

1. $\lambda \notin \overline{\mathbb{Q}}$;
2. $\lambda \in \{-1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\}$;
3. $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{-1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\}$ et $\rho(S_\phi) = 19$.

De plus, groupe de Néron-Severi de S_ϕ est engendré par des droites uniquement dans le cas (2).

La démonstration repose sur la connaissance des équations explicites des droites et leur matrice d'intersection. La connaissance des déterminants des groupes de Néron–Severi permet de détecter la présence de classes divisibles dans les cas (1) et (3).

PARTIE V

PUBLICATIONS

[B0] Thèse *Sur les correspondances de McKay pour le schéma de Hilbert de points sur le plan affine*, sous la direction de Christoph Sorger, soutenue le 27 septembre 2004 à l'Université de Nantes. Président de jury : Manfred Lehn ; rapporteurs : Geir Ellingsrud et Éric Vasserot ; examinateurs : Vincent Franjou, Dmitri Kaledin et François Laudembach.

[B1] *On the McKay correspondences for the Hilbert schemes of points on the affine plane*, **Mathematische Annalen**, 334 (2006), 419-438.

[B2] *Towards the multiplicative behavior of the K-theoretical McKay correspondence*, **Mathematische Zeitschrift**, 252 (2006), 533-555.

[B3] *Chern classes of the tangent bundle on the Hilbert scheme of points on the affine plane*, **Journal of Algebraic Geometry**, 14 (2005), 761-787.

[B4] *Contraction of excess fibres between the McKay correspondences in dimensions two and three*, avec Alessandra Sarti, **Annales de l'Institut Fourier**, 57 n.6 (2007), 1839-1861.

[B5] *Universal formulas for characteristic classes on the Hilbert schemes of points on surfaces*, avec Marc Nieper-Wißkirchen, **Journal of Algebra**, 315 (2007), 924-953.

[B6] *Generating series in the cohomology of Hilbert schemes of points on surfaces*, avec Marc Nieper-Wißkirchen, **London Mathematical Society Journal of Computation and Mathematics**, 10 (2007), 254-270.

[B7] *Counting lines on surfaces*, avec Alessandra Sarti, **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze**, 6 (2007), 39-52.

[B8] *On the Néron-Severi group of surfaces with many lines*, avec Alessandra Sarti, **Proceedings of the American Mathematical Society**, 136 (2008), 3861-3867.

[B9] *A model for the orbifold Chow ring of weighted projective spaces*, avec Etienne Mann et Fabio Perroni, **Communications in Algebra**, 37 (2009), 503-514.

[B10] *The cohomological crepant resolution conjecture for $\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)$* , avec Etienne Mann et Fabio Perroni, **International Journal of Mathematics**, 20 n.6 (2009), 791-801.

[B11] *Automorphismes naturels de l'espace de Douady de points sur une surface*, **Canadian Journal of Mathematics** (à paraître).

[B12] *Computing certain Gromov-Witten invariants of the crepant resolution of $\mathbb{P}(1, 3, 4, 4)$* , avec Etienne Mann et Fabio Perroni, **Nagoya Mathematical Journal** (à paraître) (titre de la prépublication : *Crepant resolutions of weighted projective spaces and quantum*

deformations)

[B13] *Automorphismes de l'espace de Douady de points sur une surface K3*, avec Alessandra Sarti, [arXiv:0905.4370](https://arxiv.org/abs/0905.4370) (soumis).

[B14] *Higher dimensional Enriques varieties and automorphisms of generalized Kummer varieties*, avec Marc Nieper-Wißkirchen et Alessandra Sarti, [arXiv:1001.4728](https://arxiv.org/abs/1001.4728) (soumis).

Les publications [B1], [B2] et [B3] sont issues de ma thèse. Toutes mes publications sont disponibles sur ma page internet :

<http://math.unice.fr/~sb>

Références

- [1] E. AMERIK – « On an automorphism of $\text{Hilb}^{[2]}$ of certain K3 surfaces », [arXiv:0907.3487](https://arxiv.org/abs/0907.3487).
- [2] A. BEAUVILLE – « Some remarks on Kähler manifolds with $c_1 = 0$. », Classification of algebraic and analytic manifolds, Proc. Symp., Katata/Jap. 1982, Prog. Math. 39, 1-26 (1983), 1983.
- [3] ———, « Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, p. 755–782 (1984).
- [4] ———, *Complex algebraic surfaces*, second éd., London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.
- [5] A. BEAUVILLE & R. DONAGI – « La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4 », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), no. 14, p. 703–706.
- [6] R. V. BEZRUKAVNIKOV & D. B. KALEDIN – « McKay equivalence for symplectic resolutions of quotient singularities », *Tr. Mat. Inst. Steklova* **246** (2004), no. Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., p. 20–42.
- [7] T. BRIDGELAND, A. KING & M. REID – « The McKay correspondence as an equivalence of derived categories », *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), no. 3, p. 535–554.
- [8] E. BRIESKORN – « Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen », *Math. Ann.* **166** (1966), p. 76–102.
- [9] J. BRYAN & A. GHOLAMPOUR – « The quantum McKay correspondence for polyhedral singularities », *Invent. Math.* **178** (2009), no. 3, p. 655–681.
- [10] J. BRYAN & T. GRABER – « The crepant resolution conjecture », in *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, p. 23–42.
- [11] M. A. DE CATALDO & L. MIGLIORINI – « The Douady space of a complex surface », *Adv. Math.* **151** (2000), no. 2, p. 283–312.
- [12] W. CHEN & Y. RUAN – « A new cohomology theory of orbifold », *Comm. Math. Phys.* **248** (2004), no. 1, p. 1–31.
- [13] M. CLAVEL, F. DURÁN, S. EKER, P. LINCOLN, N. MARTÍ-OLIET, J. MESEGUER & J. F. QUESADA – « Maude : specification and programming in rewriting logic », *Theoretical Computer Science* **285** (2002), p. 187–243.
- [14] T. COATES, H. IRITANI & H.-H. TSENG – « Wall-crossings in toric Gromov-Witten theory. I. Crepant examples », *Geom. Topol.* **13** (2009), no. 5, p. 2675–2744.
- [15] D. A. COX & S. KATZ – *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [16] O. DEBARRE – « Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **299** (1984), no. 14, p. 681–684.
- [17] J. DENEFF & F. LOESER – « Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence », *Compositio Math.* **131** (2002), no. 3, p. 267–290.
- [18] A. DOUADY – « Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. », *Ann. Inst. Fourier* **16** (1966), no. 1, p. 1–95.
- [19] G. ELLINGSRUD, L. GÖTTSCHE & M. LEHN – « On the cobordism class of the Hilbert scheme of a surface », *J. Algebraic Geometry* **10** (2001), p. 81–100.
- [20] B. FANTECHI & L. GÖTTSCHE – « Orbifold cohomology for global quotients », *Duke Math. J.* **117** (2003), no. 2, p. 197–227.
- [21] J. FOGARTY – « Algebraic families on an algebraic surface », *Amer. J. Math.* **90** (1968), p. 511–521.

- [22] ———, « Algebraic families on an algebraic surface. II. The Picard scheme of the punctual Hilbert scheme », *Amer. J. Math.* **95** (1973), p. 660–687.
- [23] W. FULTON – *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [24] V. GINZBURG & D. KALEDIN – « Poisson deformations of symplectic quotient singularities », *Adv. Math.* **186** (2004), no. 1, p. 1–57.
- [25] Y. GOMI, I. NAKAMURA & K.-I. SHINODA – « Coinvariant algebras of finite subgroups of $SL(3, \mathbf{C})$ », *Can. J. Math.* **56** (2002), p. 495–528.
- [26] G. GONZALEZ-SPRINBERG & J.-L. VERDIER – « Construction géométrique de la correspondance de McKay », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), no. 3, p. 409–449.
- [27] L. GÖTTSCHE – « The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface », *Math. Ann.* **286** (1990), no. 1-3, p. 193–207.
- [28] G.-M. GREUEL, G. PFISTER & H. SCHÖNEMANN – « SINGULAR 2.0 », A Computer Algebra System for Polynomial Computations, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, 2001, <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [29] I. GROJNOWSKI – « Instantons and affine algebras. I. The Hilbert scheme and vertex operators », *Math. Res. Lett.* **3** (1996), no. 2, p. 275–291.
- [30] A. GROTHENDIECK – « Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. Exp. No. 221, 249–276.
- [31] M. HAIMAN – « t, q -Catalan numbers and the Hilbert scheme », *Discrete Math.* **193** (1998), p. 201–224.
- [32] ———, « Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture », *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 941–1006.
- [33] ———, « Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane », *Invent. Math.* **149** (2002), p. 371–407.
- [34] D. HUYBRECHTS – « Compact hyper-Kähler manifolds : basic results », *Invent. Math.* **135** (1999), no. 1, p. 63–113.
- [35] H. IRITANI – « An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds », [arXiv:0903.1463v3](https://arxiv.org/abs/0903.1463v3).
- [36] Y. ITO & M. REID – « The McKay correspondence for finite subgroups of $SL(3, \mathbf{C})$ », in *Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994)*, de Gruyter, Berlin, 1996, p. 221–240.
- [37] D. KALEDIN – « McKay correspondence for symplectic quotient singularities », *Invent. Math.* **148** (2002), p. 151–175.
- [38] M. KUWATA – « Elliptic fibrations on quartic $K3$ surfaces with large Picard numbers », *Pacific J. Math.* **171** (1995), no. 1, p. 231–243.
- [39] M. LEHN – « Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces », *Invent. Math.* **136** (1999), no. 1, p. 157–207.
- [40] ———, « Lectures on Hilbert schemes. », Hurtubise, Jacques (ed.) et al., Algebraic structures and moduli spaces. Proceedings of the CRM workshop, Montréal, Canada, July 14-20, 2003. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). CRM Proceedings & Lecture Notes 38, 1-30 (2004)., 2004.
- [41] M. LEHN & C. SORGER – « Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes », *Duke Math. J.* **110** (2001), p. 345–357.
- [42] M. LEHN & C. SORGER – « The cup product of Hilbert schemes for $K3$ surfaces », *Invent. Math.* **152** (2003), no. 2, p. 305–329.

- [43] W.-P. LI, Z. QIN & W. WANG – « Hilbert schemes and \mathcal{W} algebras », *Int. Math. Res. Not.* (2002), no. 27, p. 1427–1456.
- [44] W.-P. LI, Z. QIN & W. WANG – « Stability of the cohomology rings of Hilbert schemes of points on surfaces », *J. reine angew. Math.* **554** (2003), p. 217–234.
- [45] E. MANN – « Orbifold quantum cohomology of weighted projective spaces », *J. Algebraic Geom.* **17** (2008), no. 1, p. 137–166.
- [46] J. MCKAY – « Graphs, singularities and finite groups », *Proc. of Symp. in Pure Math.* **37** (1980), p. 183–186.
- [47] H. NAKAJIMA – « Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces », *Annals of math.* **145** (1997), p. 379–388.
- [48] I. NAKAMURA – « Hilbert scheme of abelian group orbits », *J. Alg. Geom.* **10** (2001), p. 757–779.
- [49] M. NIEPER-WISSKIRCHEN – « Equivariant cohomology, symmetric functions and the Hilbert schemes of points on the total space of the invertible sheaf $\mathcal{O}(-2)$ over the projective line », 2006, [arXiv:math.AG/0610834](https://arxiv.org/abs/math/0610834).
- [50] K. G. O'GRADY – « Desingularized moduli spaces of sheaves on a $K3$ », *J. Reine Angew. Math.* **512** (1999), p. 49–117.
- [51] ———, « A new six-dimensional irreducible symplectic variety », *J. Algebraic Geom.* **12** (2003), no. 3, p. 435–505.
- [52] K. OGUIISO – « Tits alternative in hyperkähler manifolds », *Math. Res. Lett.* **13** (2006), no. 2-3, p. 307–316.
- [53] ———, « A remark on dynamical degrees of automorphisms of hyperkähler manifolds », *Manuscripta Math.* **130** (2009), no. 1, p. 101–111.
- [54] K. OGUIISO & S. SCHRÖER – « Enriques manifolds », [arXiv:1001.4912](https://arxiv.org/abs/1001.4912).
- [55] F. PERRONI – « Chen-Ruan cohomology of ADE singularities », *International Journal of Mathematics* **18** (2007), no. 9, p. 1–51.
- [56] M. REID – « La correspondance de McKay », *Astérisque* (2002), no. 276, p. 53–72, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.
- [57] A. SARTI – « Pencils of symmetric surfaces in \mathbb{P}_3 », *J. Algebra* **246** (2001), no. 1, p. 429–452.
- [58] B. SEGRE – « The maximum number of lines lying on a quartic surface », *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **14** (1943), p. 86–96.
- [59] ———, « On arithmetical properties of quartic surfaces », *Proc. London Math. Soc. (2)* **49** (1947), p. 353–395.
- [60] T. SHIODA – « On the Picard number of a complex projective variety », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **14** (1981), no. 3, p. 303–321.
- [61] H. STERK – « Finiteness results for algebraic $K3$ surfaces », *Math. Z.* **189** (1985), no. 4, p. 507–513.
- [62] B. URIBE – « Orbifold cohomology of the symmetric product », *Comm. Anal. Geom.* **13** (2005), no. 1, p. 113–128.
- [63] E. VASSEROT – « Sur l'anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de \mathbf{C}^2 », *C.-R. Acad. Sc. Paris* **332** (2001), p. 7–12.
- [64] T. YASUDA – « Twisted jets, motivic measures and orbifold cohomology. », *Compositio Math.* **140** (2004), no. 2, p. 396–422.

11 octobre 2010

SAMUEL BOISSIÈRE, Laboratoire J.A.Dieudonné, UMR CNRS 6621, Université de Nice Sophia-Antipolis,
 Parc Valrose, 06108 Nice, France • E-mail : samuel.boissiere@unice.fr
 Url : <http://math.unice.fr/~sb/>