

Mathematics Elliptic

I) Courbes Elliptiques

- ~~Basics~~ les rappels sur les courbes elliptiques

II) Surfaces elliptiques

- Définition d'une surface elliptique / Exemple
- Fibrés singuliers
- Notion de Weierstrass
- Groupe de Mordell-Weil et section de Mordell-Weil
- Quelques problèmes ouverts

- M. Schütt - T. Shaska, Mordell-Weil Lattices

- J. Cassels, Lectures on elliptic curves

- J. Silverman, The arithmetic of elliptic curves

Tributions elliptiques

Literature

1) Courbes elliptiques

Rapels sur les courbes elliptiques

M-Schiff // "Modell - Vel.
T. Shwabe "Lattices"

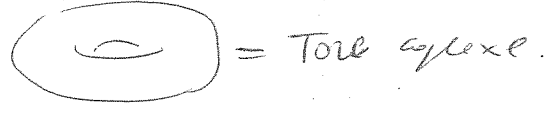
2) Base facts on elliptic curves

We work here over \mathbb{C} the complex numbers.

Def A non elliptic curve is a Riemann surface of genus $g \geq 1$.

is $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$ where $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau \mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbb{C}$

est un revêtement \mathbb{Z} -module libre de rang 2.



On peut placer une tore complexe dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et on obtient une courbe elliptique (pour cela on utilise les fonctions elliptiques de Weierstrass) et on a une équation:

$$z y^2 = x^3 + a x z^2 + b z^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Dans le cône affine $z=1$ nous avons l'équation

$$E: y^2 = x^3 + ax + b \quad \text{et on rajoute, pour } z=0$$

le pt à l'infini: $(0:1:0)$.

qui est un pt d'inflexion de la courbe elliptique.

Recall that "attached" to an elliptic curve there are two numbers:

i) discriminant $\Delta = (4a^3 + 27b^2)$ souvent seulement

$$\Delta = 4a^3 + 27b^2$$

pour signature

E est lisse $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

ii) invariant: $j = \frac{2^8 \cdot 3^3 \cdot a^3}{4a^3 + 27b^2} = \frac{(+48)^3 \cdot a^3}{\Delta}$

$E \cong E' \Leftrightarrow j = j'$ (E, E' courbes elliptiques)

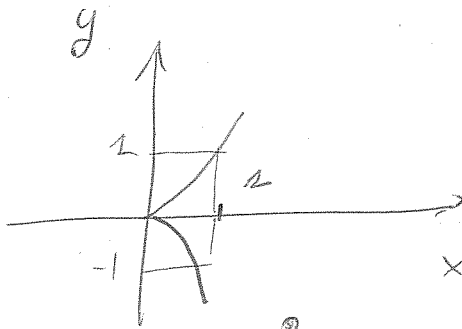
Si $\Delta = 0$ nous avons $4a^3 + 27b^2 = 0$, nous avons 2 cas :

(2)

(1) $a = b = 0$

(2) $ab \neq 0$ et $\Delta = 0$.

Cas (1) : $y^2 = x^3$: cusp.



Cas (2) : $4a^3 = -27b^2$ ce $\left(\frac{-a}{3}\right)^3 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow -\frac{a}{3} = \left(\frac{3b}{2a}\right)^2$

$\Rightarrow -\frac{a}{3} = d^2$ et $\frac{b}{2} = d^3$ (*) $\frac{b}{2} = \left(\frac{+3b}{-a2}\right)^3$

avec $\boxed{a = \frac{-3b}{2d}}$

Si on remplace (*) dans $y = x^3 + ax + b$ on obtient :

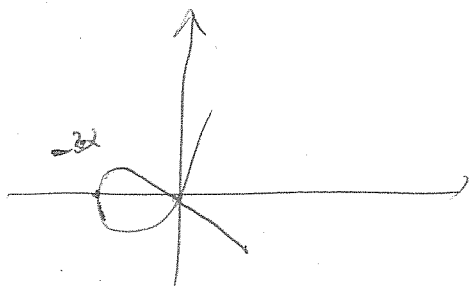
$y = x^3 - 3d^2x + 2d^3$ et $(x,y) = (d, 0)$ est racine.

et en divisant on obtient $y = (x-d)^2(x+2d)$

Si $x' = x - d = 0$ $x = x' + d$ on a :

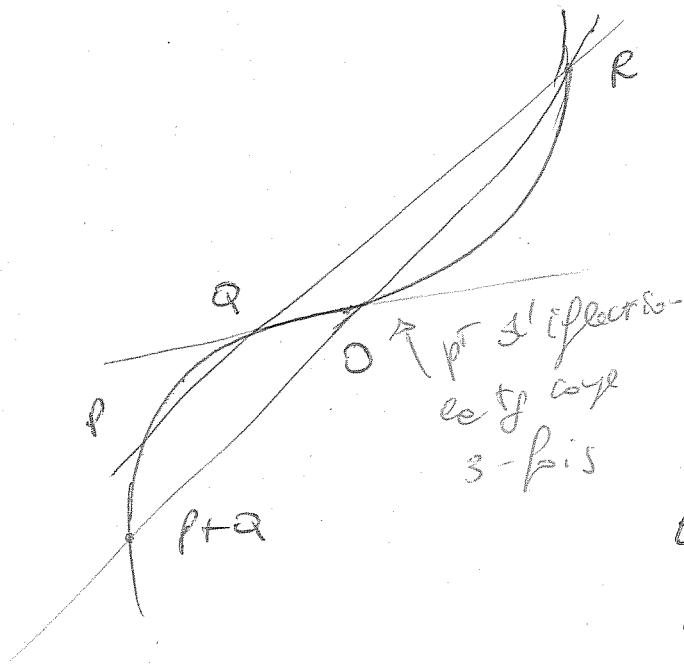
$y = x'^2(x'+3d) = x'^3 + 3dx'^2$

qui est un cusp.



Le cas de l'oeuf

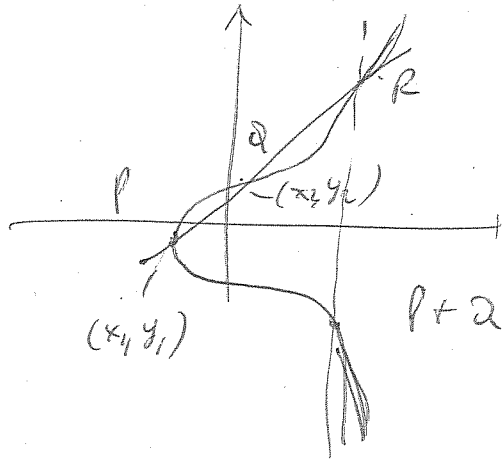
On rappelle que donnée $E \subset \mathbb{P}^2$ une courbe elliptique et $O \in E$ point d'inflexion (une courbe elliptique a 9 pts d'inflexion). On définit une loi de l'oeuf :



③
 la droite par P, Q
 intersecte la courbe E
 dans un pt R et
 la droite par R et O
 intersecte E dans le pt
 que nous désignons
 P+Q.

En particulier $P+Q+R=O$
 $O=O$ P, Q, R sont alignés.

On ajoute -P en utilisant le Torsion en O
 Si $O = (0:1:0)$ est le pt. à l'infini dans un écart en coordonnées



$$y^2 = x^3 + ax + b$$

Théorème d'addition $E \times E \rightarrow E$ est un morphisme de groupe
 $(P, Q) \mapsto P+Q$

avec O élément neutre et l'inverse -P s'ajoute aussi.

Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ et

$$P+Q : \begin{cases} x = -(x_1 + x_2) + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 \\ y = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) - y_1 \end{cases}$$

Attention Ici "+" est la somme au tout quel point on effectue
 $O+O=O$ mais si on répète O au tout quel

diviseur

$$0 \oplus 0 = 20.$$

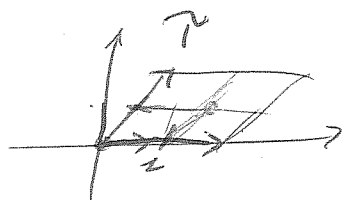
ou autre que celle habituelle

(4)

Def. On appelle $P \in E$ pt. de m -Torsion si $mP = \underbrace{P + \dots + P}_{n \text{ fois}} = 0$

• Les groupe des pts de m -Torsion est $E(m) \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^2$
(en effet nous avons m^2 pts de Torsion).

Ex 2-Torsion: $\frac{\mathbb{C}}{2\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}}$



$P = x + iy = (x, y)$ pts de 2-torsion sont.

$(0,0), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{\pi}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ (4 pts).

Dans le modèle $E \subset \mathbb{P}^2$, $P \in E$ est de 2-Torsion \Leftrightarrow

$2P = 0$ ou $P = -P$. (i.e. \bar{P} par P passe par 0)

Translation

Multiplication complexe: Observons que si $P \in E(m)$ alors on a un automorphisme

$$\begin{aligned} \varphi_P: E &\longrightarrow E & \text{et } \varphi_P \text{ à ordre } m \\ Q &\longmapsto Q + P & \text{clairement } \varphi_P(0) = P + 0 = P \end{aligned}$$

i.e. chaque translation par un pt. de Torsion définit un autom. de E qui ne fixe pas 0. On peut ^{l'étudier} se ramener par $\text{Aut}(E, 0)$ à des automorphismes de E qui fixent 0.

On a vu le modèle de Weierstrass

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

l'involution naturelle est $E \xrightarrow{\sigma} E$
 $(x, y) \mapsto (x, -y)$

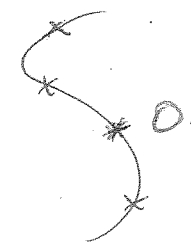
si on projette $zy^2 = x^3 + axz^2 + bz^3$

et l'automorphisme est induit par $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$
 $(x:y:z) \mapsto (x:-y:z)$

les pts fixes sur $\{y=0\} \cap E$ et $(0:1:0) \in E$

$\{y=0\} \cap E: x^3 + axz^2 + bz^3 = 0$ ce sont 3 pts.

Donc il y a 4 pts fixes sur E



si on regarde $E = \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}$, $\tau \in \mathbb{C}$

l'automorphisme induit par $\eta \mapsto -\eta$ préservant le point $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

et les pts fixes ont $\eta \in E + \tau$ et $2\eta = -\eta$ i.e. $3\eta \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

\Rightarrow 0 pts de torsion. (nous en avons en effet 4.)

Lemme E courbe ell. et $G = \text{Aut}(E, 0) =$ groupe des automorphismes
(peu importe en effet le pt) $\Rightarrow G$ est un groupe fini d'ordre

- 2 si $j \neq 0, 1728$
 - 4 si $j = 1728$
 - 6 si $j = 0$
- } j-invariant

* On a vu que toute courbe elliptique admet une automorphisme

si $(b=0)$ ou c la courbe elliptique
 $y^2 = x^3 + ax$ et $j = \frac{(4a)^3}{4} = 2^6 \cdot 3^3 = 1728$

en particulier on peut supposer $a=1$ (les 2 courbes de ces j-inv.)

$y^2 = x^3 + x$ et on a l'automorphisme d'ordre 4
 $(x,y) \mapsto (-x, iy)$

induit par $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$
 $(x:y:z) \mapsto (-x:iy:z)$

Dans \mathbb{P}^2 fixe ces pt. $U = (0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:0:0)$ (6)

\uparrow \uparrow \uparrow
 E E E

Nous avons 2 pts fixes $\left. \begin{matrix} (0 \\ 1 \end{matrix} \right\} x$

Si $\boxed{Q=0} \Rightarrow \boxed{j=0}$ $y^2 = x^3 + b$ et on peut écriv.
 $y^2 = x^3 + 1$

l'automorphisme d'ordre 3 est $(x, y, z) \xrightarrow{\sigma_3} (\omega x, y, z)$
 6 est $(x, y, z) \xrightarrow{\tau_6} (\omega x, -y, z)$ } 3pt

En coord. proj. $xy^2 = x^3 + z^3$ et $\text{Fix}_{\sigma_3} = \{x=0\} \cap E = z (y^2 - z^2) = 0$ } 3pts
 et $\text{Fix}_{\tau_6} = (0:1:0) = 0$. } 4pt.

Si on a même :

ordre auto	# fixe pts
2	4
3	3
4	2
6	1

une transformation utile

Remarque (sur une transformation)

On remarque que la transformation $(x, y) \mapsto (u^2 x, u^3 y)$, $u \in \mathbb{C}^*$ agit de la façon suivante sur une courbe elliptique:

$$y^2 = x^3 + ax + b \mapsto u^6 y^2 = u^6 x^3 + au^2 x + b \quad \text{si on divise par } u^6$$

$$y^2 = x^3 + \frac{a}{u^4} x + \frac{b}{u^6} \quad (*)$$

Les deux courbes elliptiques (*) ont le même J -invariant, on peut donc supposer $a = u^4$ ou $b = u^6$ pour éliminer un coefficient.

Exemples: le plan de Fermat

Soit $t \in \mathbb{C}$ on considère la famille suivante de courbes elliptiques:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \supset E_t : x^3 + y^3 + z^3 - txyz = 0 \quad t \in \mathbb{C} \quad (*)$$

Pour les valeurs du paramètre $t = 3, 3\omega, 3\omega^2$ la cubique est singulière et l'ordonnée de 3 droites. Par exemple si $t = 3$

$$E_3 : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

Si on rajoute le pt $t = \infty \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$ on rajoute encore

$$E_\infty = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\}$$

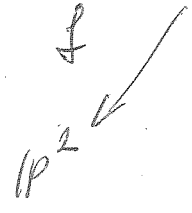
Une exemple d'une surface elliptique: supposons donc t coord.

affine de \mathbb{P}^2 et donc on peut "projeter" la surface affine

(*) dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$

$$S = \{(x:y:z), (t_0:t_1) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid t_0(x^3+y^3+z^3) - t_1xyz = 0\}$$

$$C \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \quad (t = \frac{t_1}{t_0})$$



Si on projette sur \mathbb{P}^1 on a une morphisme $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ et cela définit une fibration elliptique. Soit pour $(w:t_1) \in \mathbb{P}^1$ on a $f^{-1}(t) = E_t$
 $f^{-1}(\infty) = E_\infty$

Le fibre "général" est E_t . Sur le laps des fibres remarquables $w=0$ et $w=\infty$ et tous les points d'intersection.

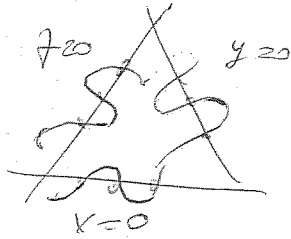
$$\mathbb{C}(w) = \mathbb{C}(t) \quad (t = \frac{t_1}{t_0})$$

Remarquons que les pts $(z: -w, 0)$, $w = \infty$ et tous les points d'intersection appartiennent au fibre E_t et ils donnent les 9 pts d'intersection.

$$(2: -w: 0) \quad (-w: 2: 0) \quad (2: 0: -w) \quad (-w: 0: 2) \quad (0: 2: -w) \quad (0: -w: 2) \quad (8)$$

$(2: -1: 0)$ $(2: 0: -1)$ $(0: 2: -1)$. Ces 9 pts sont les 9 pts

de base du plan de Hesse et ils jouent un rôle important dans la géométrie projective et plus en particulier pour la courbe plane sur \mathbb{P}^2 de degré 6 de Steiner-Weil de la forme



II Surfaces elliptiques

2.1 Définition d'une surface elliptique / Exemples

Soit C une courbe lisse propre / \mathbb{C} et soit S une surface lisse propre et $f: S \rightarrow C$

un morphisme surjectif avec fibres lisses, on appelle $f: S \rightarrow C$ une fonction de S sur la courbe C

Si $v \in C$ on appelle $F_v = f^{-1}(v)$ le fib sur $v \in C$ et $\text{Sup}(F_v) = \{x \in S \mid f(x) = v\}$ le support de F_v

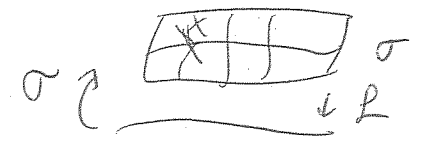
on appelle $f: S \rightarrow C$ une fonction de genre g si toutes les fibres sont des courbes de genre g à l'exception d'un nombre fini. On obtient donc une famille $\{F_v \mid v \in C\}$ de courbes de genre g paramétrée par C . Le fib propre est le fib sur le pt régulier de C .

Ici on va étudier le cas de $g(F_v) = 1$ i.e. les fonctions elliptiques

Définition

(3)

(1) Soit $f: S \rightarrow C$ une fibration une section globale de f est un morphisme $\sigma: C \rightarrow S$ t.p. $f \circ \sigma: C \rightarrow C$ est l'identité sur C (i.e. $f \circ \sigma|_C = \text{id}_C$)



(2) Une surface elliptique est une fibration de genre 1 C

$$f: S \rightarrow C$$

t.p. S est une surface algébrique lisse, C courbe projective lisse, et $\sigma_0: C \rightarrow S$ est une section et S est relativement minimal i.e. les fibres de f $\neq \emptyset$ des courbes (-1).

Rem relativement minimal \neq minimal (ou voir le jeu de Hesse)

Si on resume: Une surface elliptique (ou fibration elliptique) est

- * surface projective lisse S
- * C courbe proj. lisse
- * $f: S \rightarrow C$ morphisme + section $\sigma_0: C \rightarrow S$ t.p.

(1) Toutes les fibres de S à l'exception d'un nombre fini sont des courbes elliptiques (fibres singulières)

(2) Aucune fibre contient une courbe (-1). (voir par ex. les éclatements)

Rem Nous serait intéressés aux cas $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ avec $S \cdot K_S \geq 3$ ou surface rationnelles. (i.e. birat à \mathbb{P}^2)

Prop $f: S \rightarrow C$ fib. ell. Les sections globales de f sont en bijection, avec les pts $K = K(C)$ rationnel de $E (=$ fibre projective $\mathbb{P}^1(C))$

$K(C) =$ Corps des fonctions de la courbe de base C (ex. $K(\mathbb{P}^1) = K(t)$) (10)

pt $k(t) = \text{reste}$: reste par $P \in S$ avec toutes les coord. dans

$$k(t) \text{ car } k = \mathbb{F}$$

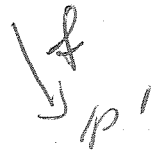
Exemple (Le plan de base) EXEMPLE A

$S \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ définie par

$$t_0(x^3 + y^3 + z^3) - t_1 x y z = 0 \quad \text{on prend ici } C = \mathbb{P}^1$$

ainsi $k = k(t) = \mathbb{C}(t)$ est le corps des fonctions rationnelles

en $t = \frac{t_1}{t_0}$. Si on projette : $S \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$



On dit que c'est une fonction elliptique (ou surface elliptique) sur \mathbb{P}^1

On va vérifier les conditions pour être une fonction elliptique

S est lisse et f satisfait les cond (1) + (2).

S lisse On prend $z \neq 0$ et $t_0 \neq 0$, alors S est définie localement par l'équation :

$$F(x, y, t) = F_0 x^3 + y^3 + 1 - t x y = 0$$

Si F est singulière, alors $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - ty = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - tx = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -xy = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

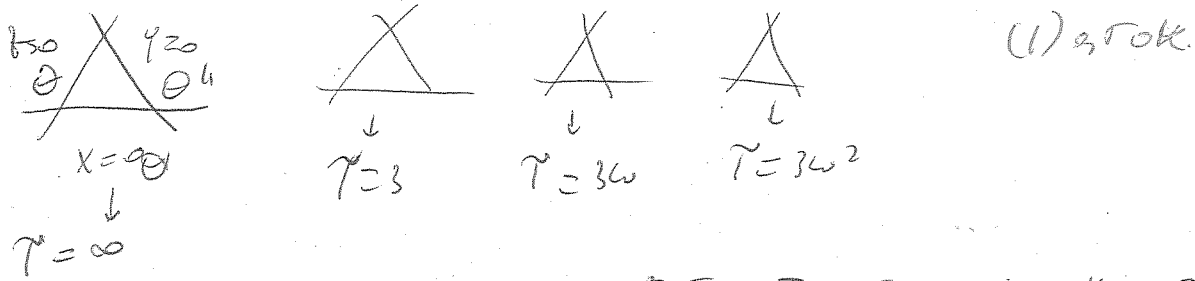
mais $F(0, 0, t) = 1$ donc aucune de ces pts est sur F .

De même pour les autres coord. locales.

(1) + (2) Si $\gamma \in \mathbb{P}^1$ lisse $\Rightarrow F^{-1}(\gamma)$ est une courbe lisse

et $F^{-1}(\gamma)$ est singulière $\Leftrightarrow \gamma = 3, 3\omega, 3\omega^2, \infty$, $\omega^3 = 1$

On a donc joliment le volume $\tau = \dots$ (11)



(2) Relativité anisotrope: on a tout $F_V = \theta + \theta' + \theta''$, $\tau \in \{3, 3w, 3w^2, 0\}$ et on calcule θ^2 sur S . On utilise que $F_V \sim F_V$ $\forall \theta \in \mathbb{P}^1$

(F_V est évidemment equiv. à F_V)

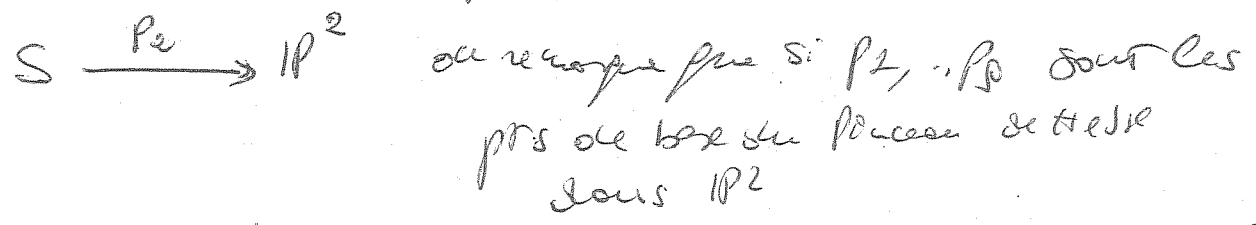
$$0 = (\theta \cdot F_V) = (\theta \cdot F_V) = (\theta, \theta + \theta' + \theta'') =$$

\uparrow
car $\theta \subset \text{line}$

$$= \theta\theta + \theta\theta' + \theta\theta'' = \theta^2 + 1 + 1$$

$\Rightarrow \theta^2 = -2$ et de même pour toutes les autres courbes.

Considérons maintenant la projection:



alors $P_2^{-1}(P_i) \cong \mathbb{P}^1$ (projetive par (P_i, P_i)) $\Rightarrow S \cong \mathbb{B}\mathbb{P}^2_{P_1, P_p}$

$\cong \mathbb{P}^1$

qui est bien une surface rationnelle avec

$$K_S = P_2^* K_{\mathbb{P}^2} + \bar{E}_1 + \dots + \bar{E}_p = P_2^*(0_{\mathbb{P}^2}(-3)) + \bar{E}_1 + \dots + \bar{E}_p$$

$\cong -F$ pour degré.

(en effet $P_2^*(-3L) \cong P_2^*(-\text{cubique dans } \mathbb{P}^2)$) $= -F + \bar{E}_1 + \dots + \bar{E}_p$ (équ. not. prescrite par blow-up).

Remarquons que $E_i \cdot F = 1 \Rightarrow \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_p$ sont des diviseurs de la fibration et sont des courbes (-1) (elles viennent du blow-up).

E donnée en forme de Weierstrass par.

$$S': (E) y^2 = x^3 + t^5 + 1$$

(E) de Weierstrass de l'anneau

sur le corps des

fonctions rationnelles

$\mathbb{C}(t)$ de \mathbb{P}^1

$$S' \rightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y, t) \mapsto t$$

Soit S' la surface définie par (E) dans \mathbb{A}^3 avec coordonnées (x, y, t)

Fait f surface elliptique $S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui contient S'

...

On va construire S : S' est lisse (pas de zéros communs des dérivées partielles). On dit que $t \in \mathbb{C}^*$ et on écrit:

$$\frac{y^2}{t^6} = \frac{x^3}{t^6} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^6}$$

avec $\bar{t} = \frac{1}{t}, \bar{y} = \frac{y}{t^3}, \bar{x} = \frac{x}{t^2}$

$$\bar{y}^2 = \bar{x}^3 + \bar{t} + \bar{t}^6 \quad (\neq *)$$

Soit S'' définie par $(*)$ dans $\mathbb{A}^3 = \mathbb{C}^3$ avec coord

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ elle est à nouveau une surface lisse \mathbb{C}^3

Considérons $\mathbb{C}^3 = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^3$ x, y, t
 $\mathbb{C}^3 = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^3$ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$

On recolle maintenant S' et S''

par. on recolle $t \neq 0, t \cdot \bar{t} = 1; x = t^2 \bar{x}; y = t^3 \bar{y}$

On obtient une surface $\tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$
 $(x, y, t) \mapsto t$

(prend au point $\bar{t} = 0$ l'infini
au point $\bar{t} = 1$ et on écrit
l'équation $(*)$)

(pour étudier le modèle)
 $S' \rightarrow \mathbb{A}^1$

On considère S^* d'une façon naturelle où on "ajoute le pt à l'infini" à S^* i.e. on obtient

$$S_1 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1: y^2 z = x^3 + (t^5 + 1) z^3$$

et on a S^* :

$$S_2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 \quad \bar{y}^2 \bar{z} = \bar{x}^3 + (\bar{t} + \bar{t}^6) \bar{z}^3$$

Maintenant on considère S_1 et S_2 comme ouvert avec:

$$t\bar{t} = 1, x = t^2 \bar{x}, y = t^3 \bar{y} \text{ et } z = \bar{z}$$

et on obtient une surface S par quotient S^* en tant que sous-espace ouvert) et une fibration elliptique:

$$f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$$

Le complément de S^* dans S est $z=0$ resp $\bar{z}=0$. qui définit la section nulle de la fibration.

Singular fibres: On considère Δ par le 2 modes affines:

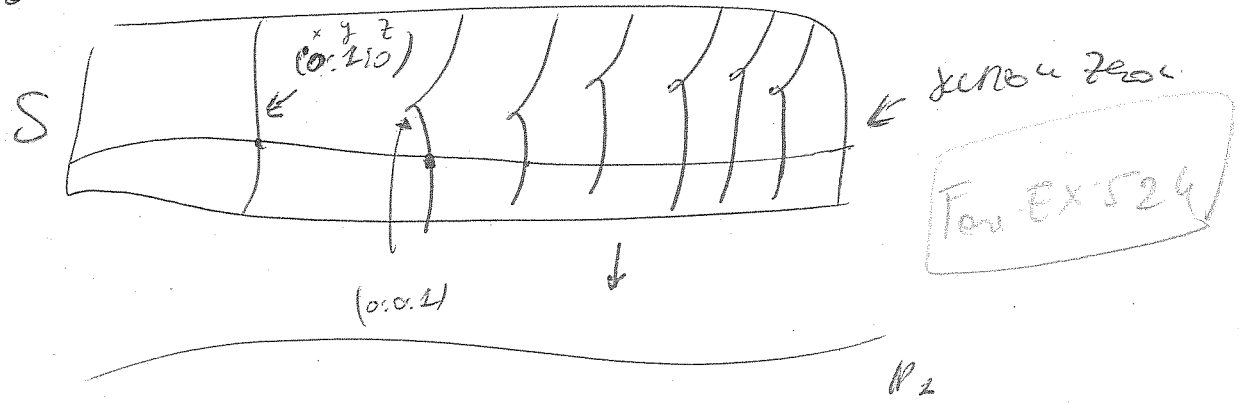
$$S_1: \Delta(t) = 27(t^5 + 1)^2 = 0 \quad t^5 = -1 \quad \text{5 racines avec mult 2}$$

$$S_2: \Delta(\bar{t}) = 27(\bar{t} + \bar{t}^6)^2 = 27\bar{t}^2(1 + \bar{t}^5)^2$$

$\bar{t} = -1$ et $\bar{t} = 0$
" \uparrow $(t = \infty)$
 $\bar{t} = t^5 = 1$

Nous avons 6 fibres de multiplicité 2 et dans le cas où on voit que le cubique est: $y^2 = x^3$ ou $\bar{y}^2 = \bar{x}^3$ donc une courbe cubique cuspidale

Notes on (0,0,1)



Ouverte: S est dans \mathbb{C}^3 une surface riemannienne.

2 Filles singulières

Si $E_0 \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe elliptique et C une courbe lisse. On peut considérer le produit $S = E_0 \times C \xrightarrow{p_2} C$. Nous ne voulons pas étudier les surfaces T et toutes les fibres sont isomorphes à E_0 . Donc on a:

Généralisation: chaque surface elliptique $f: S \rightarrow C$ est une fibre singulière (i.e. réductible, avec, simple, double...)

On dit alors ici les fibres singulières possible d'une fibration elliptique: cela ont été classifiés par Kodaira (années 60)

Soit $F_v = f^{-1}(v)$ une fibre singulière, on l'écrit en fait que l'inverse sur S :

$$F_v = \sum_{i=0}^{m_v-1} \mu_{v,i} \Theta_{v,i} \quad \text{ou}$$

* $m_v = \#$ comp. ined. en F_v

* $\Theta_{v,i} \quad 0 \leq i \leq m_v-1$: comp. ined.

$\mu_{v,i}$: multiplicité de $\Theta_{v,i}$ en F_v

* $m_v^{(1)}$: $\#$ composantes simples (i.e. avec $\mu_{v,i} = 1$)

Théorème I (i) J : Composante de v par un carré S_0
 section $\text{div}^u(0)$. Elle est appelée la composante isolée
 et notée par $\Theta_{v,0}$. Le coeff $\mu_{v,0} = 1$

(ii) Si F_v est iméd + sig (ie. $m_v = 1, F_v = \Theta_{v,0}$) et $\Theta_{v,0}$ est soit une courbe ell avec un cusp (= I_2) q soit " avec une cusp (= II)

(iii) Si F_v est une fibre sigurière réductible ($m_v > 1$) = 0
 each composante $\Theta_{v,i}$ de F_v est une courbe lisse réductible
 (ie. $\cong \mathbb{P}^2$) avec au plus $(\Theta_{v,i})^2 = -2$

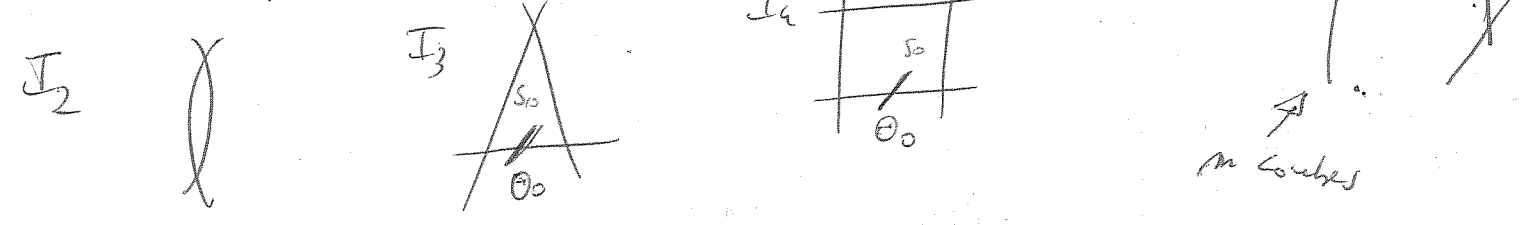
ou on a déjà vu une colat pour l'auto-intersection!

Théorème II Les fibres sigurières possibles sont:

$$I_m, I_b^*, III, IV, II^\alpha, III^\alpha, IV^\alpha, m > 1, b \geq 0$$

où $m = m_v - 1$ et où $\Theta_i = \Theta_{v,i}$

I_m : $F_v = \Theta_0 + \dots + \Theta_{m-1}$ où pour $m \geq 3, (\Theta_i, \Theta_{i+1}) = 1 \forall i = 0, \dots, m-1$
 et $(\Theta_{m-1}, \Theta_0) = 1$. Si $m = 2 \Rightarrow (\Theta_0, \Theta_1) = 2$



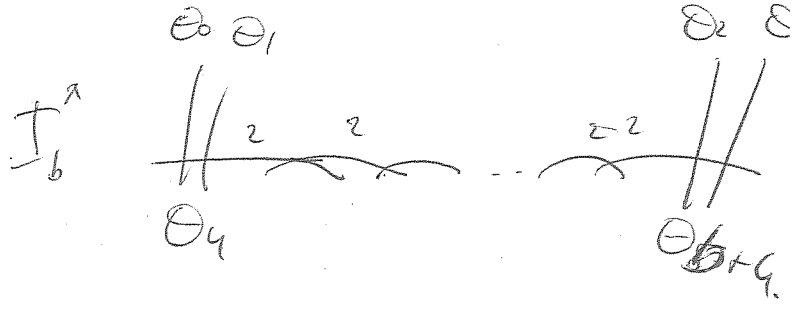
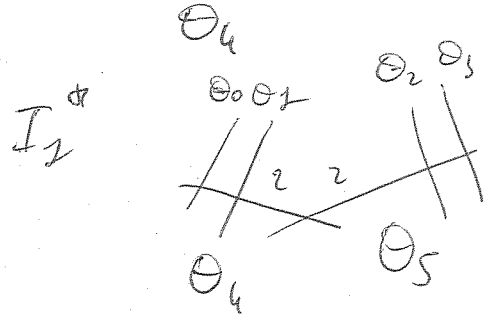
I_b^* : $F_v = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + 2\Theta_4 + \dots + 2\Theta_{b+4}$ $m = b + 5, b \geq 0$

Ici: $(\Theta_0, \Theta_4) = (\Theta_1, \Theta_4) = 1, (\Theta_2, \Theta_{b+4}) = (\Theta_3, \Theta_{b+4}) = 1$ et
 $(\Theta_4, \Theta_5) = \dots = (\Theta_{b+3}, \Theta_{b+4}) = 1$

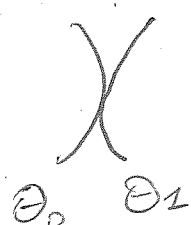
$$\downarrow \theta_0 \parallel \theta_1 \parallel \theta_2 \parallel \theta_3$$

$$\Gamma_v = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4$$

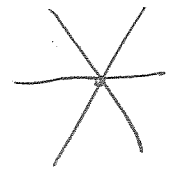
(16)



III: $F_v = \theta_0 + \theta_1, m=2$ or $(\theta_0, \theta_1) = 2$ $\theta_0 \cap \theta_1 = 2\pi^1$

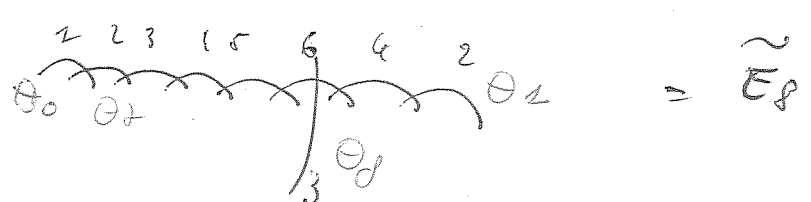


IV: $F_v = \theta_0 + \theta_2 + \theta_2, m=3$ $\theta_0 \cap \theta_2 \cap \theta_2 = 2\pi^1, (\theta_i, \theta_j) = 2$ if $i \neq j$



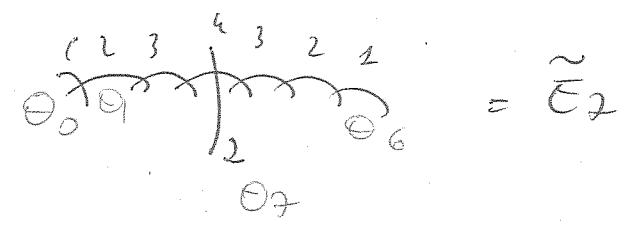
IV*: $F_v = \theta_0 + 2\theta_7 + 3\theta_6 + 4\theta_5 + 5\theta_4 + 6\theta_3 + 6\theta_2 + 3\theta_1, m=8$

or $(\theta_0, \theta_7) = (\theta_7, \theta_6) = (\theta_6, \theta_5) = (\theta_5, \theta_4) = (\theta_4, \theta_3) = (\theta_3, \theta_2) = (\theta_2, \theta_1) = (\theta_3, \theta_1) = 2$



III*: $F_v = \theta_0 + 2\theta_2 + 3\theta_2 + 4\theta_3 + 3\theta_4 + 2\theta_5 + \theta_6 + 2\theta_7, m=8$

or $(\theta_0, \theta_1) = (\theta_1, \theta_2) = (\theta_2, \theta_3) = (\theta_3, \theta_4) = (\theta_4, \theta_5) = (\theta_5, \theta_6) = (\theta_3, \theta_7) = 2$



$$IV^* : Tr = \theta_0 + \theta_1 + 2\theta_2 + 3\theta_3 + 2\theta_4 + \theta_5 + 2\theta_6, m=7 \quad (17)$$

$$al \quad (\theta_1, \theta_2) = (\theta_2, \theta_3) = (\theta_3, \theta_4) = (\theta_4, \theta_5) = (\theta_3, \theta_6) = (\theta_6, \theta_0) = 2$$

$$\begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline & & \theta_6 & & \\ \hline & & 2 & & \\ \hline & & & & \theta_0 \\ \hline & & & & 2 \end{matrix} = \tilde{E}_6$$

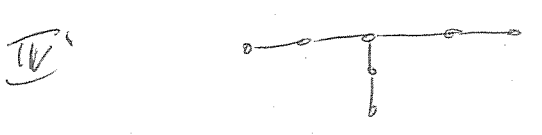
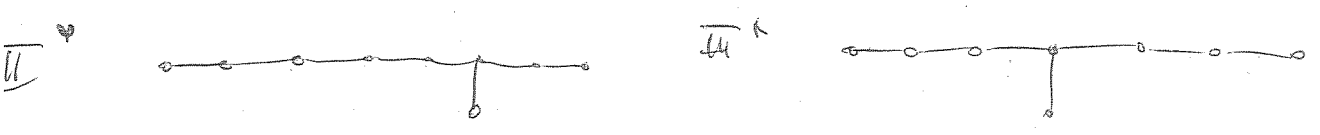
preuve : utiliser la forme de Weierstrass et étudier les pts singuliers de la surface elliptique.

Diploèmes de Dyckin 02/08/2020

Si F_V est l'une des fibres singulières précédentes, on peut associer un diploème de Dyckin cf. cloque. Courbe est une "..." et si 2 courbe s'intersectent on fait un "pont" →



↑
associé avec le diploème de Dyckin!
↓



Le diploème de Dyckin restreint est le diploème de Dyckin sous la ~~relation~~ ^{coordonnée} θ_0 .

Prop le diploème de Dyckin restreint d'une fibre réductible est le même diploème de Dyckin pour les réseaux de racines (root lattice) de type A, D, E comme il suit :

type de F_V	$I_m (m \geq 1)$	$I_6^* (b \geq 0)$	III	IV	II^*	III^*	IV^*
Diploème de Dyckin	A_{m-1}	D_{b+4}	A_1	A_2	E_8	E_7	E_6

Preuve elle suit de Km. I et II.

Def Soit $T_V =$ le réseau de rank $m-1$ engendré par θ_i ($i=1, \dots, m-1$) ($m=m_V$) avec forme bilinéaire définie par.

$$b(\theta_i, \theta_j) = -(\theta_i, \theta_j)$$

Collone Le réseau T_V est défini positif, et isomorphe au réseau de racines défini avec A, D, E associé avec \tilde{F}_V .

En particulier on a :

Type de \tilde{F}_V	I_m ($m \geq 1$)	$I_6^{(b,0)}$	III	IV	IV ⁺	III'	V
$\text{det}(T_V)$	m	4	2	3	2	2	3

Preuve doit par \rightarrow " $m_V(2)$

Conséquence de résultats précédents et des réseaux de racines.

On rappelle que $b(\theta_i, \theta_j) = -(\theta_i, \theta_j) \in \{0, -1, 2\}$

□

Exemple (EXEMPLE A)
le plan de Hecke.

On peut transformer de façon birationnelle le plan de Hecke par sous le surface elliptique :

$$S_0: x^3 + y^3 + z^3 - txyz = 0 \quad (*)$$

en la surface elliptique (singulière) :

$$S: y^2 + 9xy - (t^3 - 27)y = x^3 \quad (**)$$

(pour t "général" si $\Delta(t) \neq 0$ on écrit la courbe ell (**)

en la forme (**)) S_0 et S se voit par changement de

S_0 est lisse mais S ne l'est pas. Ici on calcule

$$\Delta(t) = (t^3 - 27)^3$$

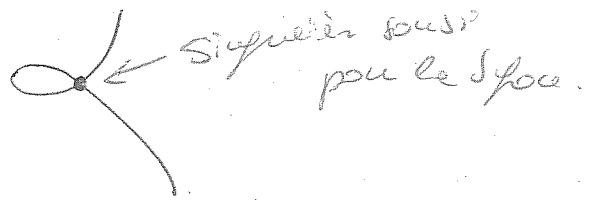
Nous avons donc 3 choix de immerger, par conséquent (19)
 $t^3 - 2t = 0$ et aussi sur $t = \infty$ ou de la
 les coord.

et pour la valeurs le surface S est singulière.

E.g. prenons $t=3$ (il y a une courbe $3U, 3\bar{U}$).

la courbe est $y^2 + Pxy = x^3$ (i.e. $y^2 = x(x^2 - Py)$)

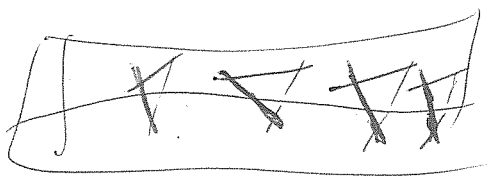
qui est une cubique nodale en $(0,0)$ i.e. S est singulière
 en $(x,y,t) = (0,0,3)$



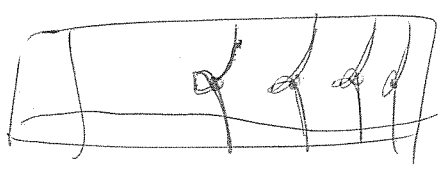
On veut voir que si on calcule le ~~le~~ blow-up

$\tilde{S} \rightarrow S$ on obtient une fonction elliptique
 avec 4 fibres I_3

\tilde{S}



S



On calcule A^3 avec coord x,y,t
 et on regarde ce transformé \tilde{S}

on ~~calcule~~ change le coord en $t-3$
 pour travailler en $(0,0,0)$.

donc A^3 avec coord (x,y,T)
 et P^2 avec coord (x',y',t')

On a les eq.

$$\mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \supset \text{BL}_{0,0,0}(\mathbb{A}^3) = \left\{ ((x,y,T), (x',y',t')) \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid \begin{array}{l} xy' = yx' \\ xt' = Tx' \\ yt' = Ty' \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ ((x,y,t), (x',y',t')) \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid \begin{array}{l} xy' = yx' \\ xt' = (t-3)x' \\ yt' = (t-3)y' \end{array} \right\}$$

$(xy' = yx')$; $x = (t-3)x'$; $y = (t-3)y'$

Et si on regarde le transformée stricte \tilde{S} de S sous

$A^3 \times U$ $(t-3)(t^2+3t+9)$

$\tilde{S} \cap U$: $(t-3)^2 y'^2 + 9(t-3)^2 x'y' - (t-27)(t-3)y' = (t-3)^3 x'^3$

$\Rightarrow (t-3)^2 [y'^2 + 9x'y' - (t^2+3t+9)y' = (t-3)x'^3] = 0$

$(t-3)^2 = 0 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow (x', y', t) \in \mathbb{P}^2$ i.e. sous le diviseur \tilde{S} (risk pour $t=3$) et si on replace sous \tilde{S} (risk pour $t=3$)

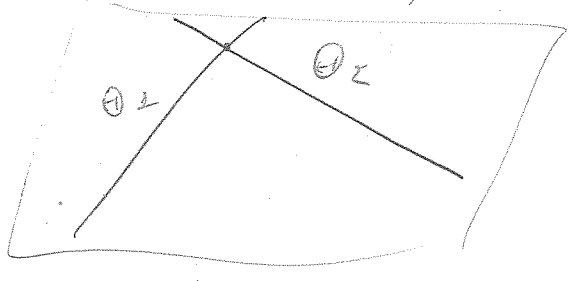
ou e par $t=3$ $y'^2 + 9x'y' - (9+9+9)y' = 0$

$\Rightarrow y'(y' + 9x' - 27) = 0$

2 constantes connexes sur le pt. singulier de \tilde{S}

2 courbes avec $y'=0$ sous \mathbb{P}^2 et $y'+9x'-27=0$

pour \tilde{S} le point $(x', y', t) = (3, 0, 3)$ \mathbb{P}^2



Si on regarde ce cas $x'=1 = V$

$y = xg'$; $x t' = (t-3) \Rightarrow t = x t' + 3$

ou e: $\tilde{S} \cap V$:

$x^2 y'^2 + 9x^2 y' - ((x t' + 3)^3 - 27) x y' = x^3$
 $x^3 t'^3 + 27 + 9x^2 t'^2 + 27x t'$

$$x^2 (y'' + p y' - (x^2 t' + p t x + 27 t') y' - x) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (y'' - (t'^3 x^2 + p t'^2 x + 27 t' - p) y' - x) = 0.$$

Si $\boxed{t=3} = 0$ $x=0$ ou $t'=0$.

Si $\boxed{x=0}$ ou $y'' - 27 t y' + p y' = 0 \Rightarrow y'(y' - 27 t' + p) = 0$

Si $\boxed{t'=0}$ ou $y'' + p y' = 0$

ou 3 composantes:

$$Z(x, y') \cup Z(x, y' - 27 t' + p) \cup Z(t', y'' + p y' - x)$$

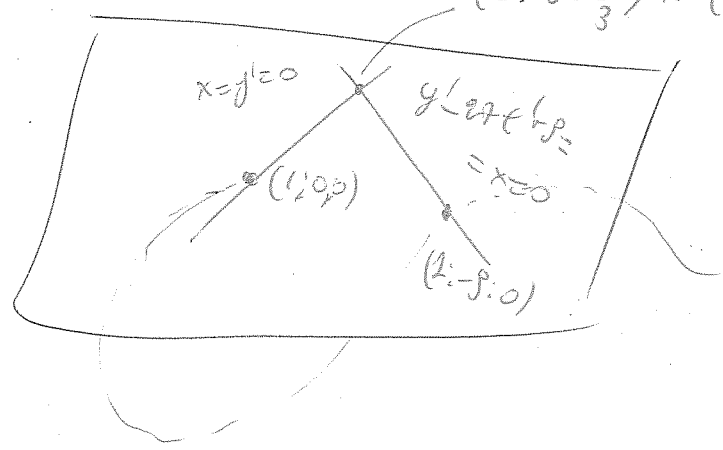
↑ " \mathbb{P}_2 même coproduct avec $t=1$ ↑ " \mathbb{P}_0 nouvelle coproduct = Trou. simple de la cubique avec le west.

Le courbe $Z(t', y'' - p y' - x)$ coup \mathbb{P}^2 avec eq. $x=y=T=0$
 $t=3$

dans $t'=0, y'' + p y' = 0 \Rightarrow y'(y' + p) = 0$

$\Rightarrow (x' | y' | t') = (1, 0, 0) \in Z(x, y')$

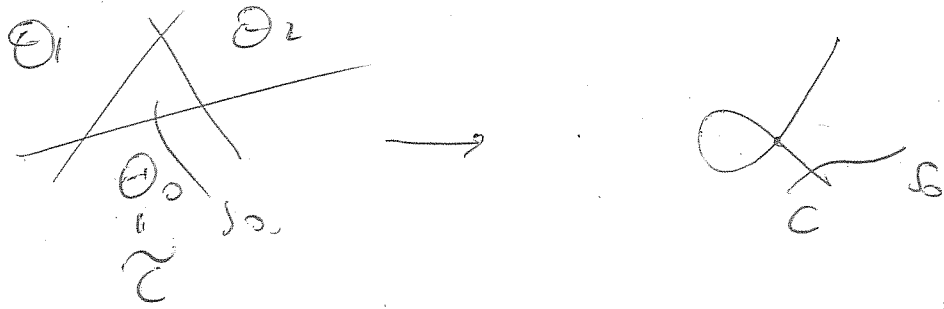
ou $(x' | y' | t') = (1, -p, 0) \in Z(x, y' - 27 t' + p)$ comme avant.
 $(2: 0: \frac{1}{3}) \sim (3: 0: 1)$



Si on prend le cas $\boxed{y'=1}$ ou voir \mathbb{P}_2 et \mathbb{P}_0 et on le voit par.

\mathbb{P}_1 (pu $y'=0$)

On voit donc bien sous $t=3$ la fibre Γ_3 (22)
 et Θ_1 & Θ_2 sont connectés au nord de la courbe



On peut faire des calculs précis dans le cas de $t^3 = 27$
 $t = 3\omega, t = 3\bar{\omega}$. On peut faire aussi le même calcul pour $t = \infty$
 en considérant l'équation qu'on obtient après la
 transformation: $(x, y, t) \mapsto \left(\frac{x}{t^2}, \frac{y}{t^3}, \frac{1}{t}\right)$ (Ex?)

23 Modèle de Weierstrass

Soit E une courbe elliptique sur $K((t))$ le corps de
 fractions d'une courbe lisse. Alors elle est donnée par l'équation
 de Weierstrass.

$$(*) \quad y^2 = x^3 + A(t)x + B(t) \quad \text{on peut même écrire}$$

avec $A(t), B(t) \in K((t)) (= \mathbb{C}((t)))$ polynômes

On appelle une équation modèle de Weierstrass de la surface S
 définie par la même équation sous $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. $t = \frac{t_1}{t_0}$ si $t_0 \neq 1$
 $(x, y, t) \quad (t_0, t_1)$

Les fibres singulières de la fibration sont sur les lieux de

$$\Delta(t) = 0$$

$$\text{pour système } \Delta(t) = 4A(t)^3 + 27B(t)^2$$

Si (*) est singulière comme on a vu dans l'exercice (23)
 pour obtenir une surface elliptique on doit enlever l'ellipsoïde.

$$\tilde{S} \rightarrow S \rightarrow \mathbb{P}^2$$

Les singularités de S sont là où les fibres sont singulières et
 donnent donc lieu aux fibres singulières p^r ou e vu: ^{avant} (voir ex A)

On admettra toujours que le module de Weierstrass est

minimal i.e. $V(b^{(t)} \in K[t])$

$$b \nmid A(t), \text{ ~~ou~~ } b \nmid B(t)$$

(i.e. $A(t)$ et $B(t)$ n'ont pas un facteur commun.)

En utilisant (*) on peut décider le type de surface.

Rappel On peut classer les surfaces elliptiques selon la
 dimension de Kodaira,

$K(S) = -\infty$ surfaces rationnelles (birationnelles à \mathbb{P}^2)

§
 relatives i.e. \exists app. birat $S \rightarrow C \times \mathbb{P}^1$

(si $C \cong \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1$ rat)

$K(S) = 0 \rightarrow$ surfaces abéliennes \mathbb{C}^2 / Λ

\rightarrow surfaces $K3$

\rightarrow surfaces d'Enriques

\rightarrow surfaces bielliptiques.

$K(S) = 1$ surfaces elliptiques propres ($\neq K3$ rationnel...)

i.e. $\exists p: S \rightarrow B$ $p^{-1}(b)$ est une courbe ell.

$K(S) = 2$ surfaces de type générale

On peut montrer que $\deg(A(t)) = 4d$, $\deg(B(t)) = 6d$
 pour $d \geq 1$ et si $K(S) = -\infty$

$d=1 \Rightarrow \deg A(t) \leq 4$; $\deg B(t) \leq 6$ et surface est rationnelle
 hauteur est 4; $\deg \Delta(t) = 12$
 $d=2 \Rightarrow \deg A(t) \leq 8$, $\deg B(t) \leq 12$ et surface est K3
 hauteur est 8; $\deg \Delta(t) = 24$

$d \geq 3 \Rightarrow$ surface est elliptique ($K(S) = 1$)

STOP
 ICI

Fait important

$e(S) = \sum_{v \in P_L} e(F_v)$ (Valable pour toute fib. ell. sur \mathbb{C})
 Clé de la Euler-Charactéristique
 Topologie de la surface
 si $e(S) > 0 \Rightarrow$ SC fibre sing.

et pour les fibres (singulières) on a :

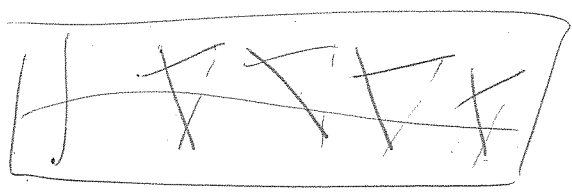
$e(F_v) = \begin{cases} 0 & F_v \text{ lisse} \\ m v & I_m \\ m v + 1 & I_6^*, III, IV, II^*, III^*, IV^* \end{cases}$

Exemple (pinon de treize)

$H^0(1,0) \rightarrow H^0(1,0) \rightarrow H^0(1,2) \rightarrow H^0(1,2)$

on a vu que la surface elliptique est

$b_2 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4$



$e(S) = \sum_{v \in P_1} e(F_v) = 12$

(qui est en effet la caractéristique topologique de S, pour S rationnelle)

P^2

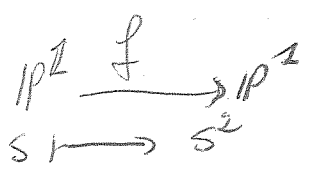
On obtient l'équation:

$$y^2 + 9xy - (t^3 - 27)y = x^3$$

ici $\Delta(t) = (t^3 - 27)^3 \cdot 7^3$ de degré 12

(on voit les racines en $t^3 = 27$ et $t = \infty$ (i.e. 720).

Considérons maintenant le "classement de base"



i.e. \mathbb{P}^1 est naturellement double de \mathbb{P}^1 ramifié en 2 pts ∞ .

L'équation devient avec $t = S^2$:

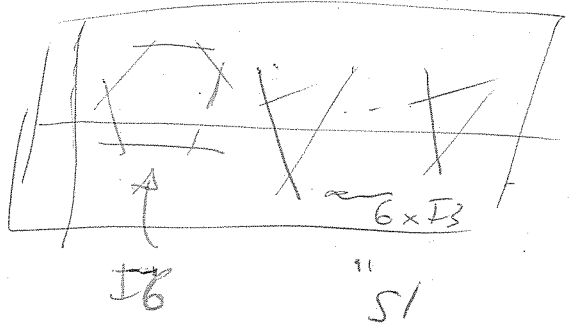
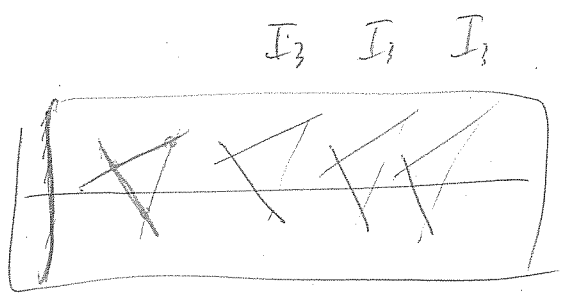
$$y^2 + 9xy - (s^6 - 27)y = x^3$$

Si on calcule $\Delta(s) = (s^6 - 27)^3 \cdot 7^6$ d'où $\Delta(s) = 24$ par K3

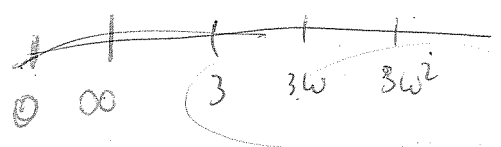
\Rightarrow nous avons 6 zéros de multiplicité 3
1 zéro de multiplicité 6

pour comprendre les fibres singulières on peut copier de la ramification sur 0 et ∞ .

encore une fibre de \mathbb{P}^1 (voir double de la courbe pos!)



2:1



6 pts de ramification
sur ∞ 6 copies de I_3

* pour étudier les propriétés des zéros de $\Delta(t)$ on écrit

l'équation:

$$y^2 = x^3 + A(t) + B(t) \quad \text{étudier les zéros de } A(t), B(t) \quad (\text{Total de points})$$

Si on a $e(S') = 6 + 6 \cdot 3 = 24$

S' est une surface K3. (pour s'être $e(S') > 24$)
en effet $e(S) = 12$

2. EXEMPLES - et une surface K3

Avec le cuspide de base:

$$y^2 = x^3 + t^5 + 1 \quad \Delta(t) = 27(t^5 + 1)^2 \Rightarrow \text{cuspide}$$

$$4A(t)^3 + 27B(t)^2 \quad \Delta(t, z) = 27(t^5 + z^5)^2 z^2$$

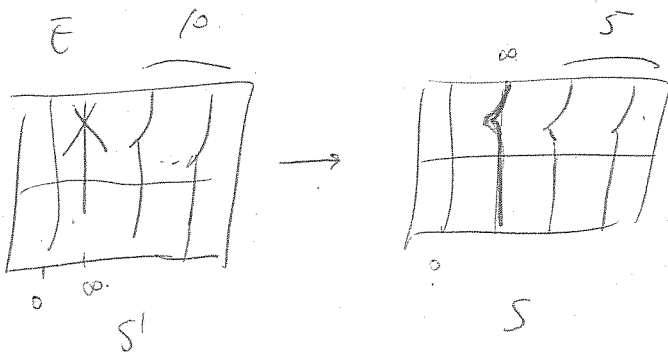
\Rightarrow 6 cusp. Si on fait le cuspide de base:

$$y^2 = x^3 + t^{10} z^2 + 1 \quad \Delta(t, z) = 27(t^{10} z^2 + z^{12})^2$$

$$= 27 z^4 (t^{10} + z^{10})^2$$

\Rightarrow 10 fibres II

1 fibre IV
 $(2-1)(2-1)(2-1)+1 = 4$



$e(S') = 2 \cdot 10 + 4 = 24$ et admet une surface K3

Néron-Severi et Néel-Wal. Lattice

Let S be an elliptic surface one can show that $N_S(S) = \frac{\text{Div}(S)}{\sim}$
est toujours sans torsion. et il contient le residu nul

$\text{Triv}(S)$

par en le réseau engendré par le choix de la section ~~de~~
~~de~~ et les coupures des fibres. Comme toutes les fibres
 sont quadratiques

$$Tuv(S) = \langle (s_0), F \rangle \oplus \bigoplus_{v \in R} T_v^-$$

où : (s_0) = classe de la section

F = classe de la fibre

T_v^- = réseau engendré par les coupures de la fibre F_v qui n'intersectent pas s_0

R = ensemble de pts de C t.p. $T_v \neq 0$ i.e.

pts qui correspondent aux fibres singulières multiples.

prop Les classes de $\{s_0, F, \theta_{v_i}, v \in R \text{ et } s_i \in m_{v_i} - 1\}$ sont une base sur \mathbb{Z} de $Tuv(S)$. Inparticulier.

$$\text{rank}(Tuv(S)) = 2 + \sum_{v \in R} (m_v - 1)$$

preuve On remarque que le réseau engendré par $\langle (s_0), F \rangle$ est

$$\begin{pmatrix} -\chi & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ou montre que } s_0^2 = -\chi \text{ ou } \chi \text{ est le constant terme d'ale } \chi = \chi(s_0) \text{ si } S \text{ est } \mathbb{C}^3 \chi = 2)$$

et le det = -1 et signature (sur \mathbb{R}) (2, 2) si χ est impair.

$$\begin{pmatrix} -\chi & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{isomorphe}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } \chi \text{ est pair } \begin{pmatrix} -\chi & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{isomorphe}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) : on prend $s_0 + \frac{\chi}{2} F$ et F dans $(s_0 + \frac{\chi}{2} F)^2 = -\chi + 2 \cdot \frac{\chi}{2} = 0$
 $F^2 = 0$ et $F \cdot (s_0 + \frac{\chi}{2} F) = 1$

Et ce det $(\oplus_{\nu} T_{\nu}^{-1}) \neq 0$ car les rayon $T_{\nu} \neq 0$ et tous (c)
 défini positif, on le vu avant. no Nordell etc + height pour
no Torison!

Remarque (2) On a donc $\text{Tur}(S) \subseteq \text{NS}(S)$. On pourrait avoir l'inverse.

$\text{Tur}(S) = \text{NS}(S)$ mais on peut bien avoir $\text{Tur}(S) \subsetneq \text{NS}(S)$

et ici $E(\mathbb{C}) =$ groupe des sections de la fibration, a un rôle important. = groupe de Nordell-Wel.

(2) Comme sur une courbe de genre g mais avec un loi de jay, les sections d'une fibration elliptique $E \rightarrow \mathbb{P}^1$ ayant un jay, qui peut être étre ou bien avoir de la torsion. ex. $\exists \delta \in E(\mathbb{C})$ section T-f $m_i \delta = \delta_0$ (sections de torsion, elles \nexists jayons! a différence des courbes elliptiques).

$\frac{\delta + \dots + \delta}{\text{dans ce loi de jay.}}$

Et on peut montrer que l'application

$$(*) \quad E(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \frac{\text{NS}(S)}{\text{Tur}(S)}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{élément de jay.} \\ \uparrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array} & \xrightarrow{\quad} & (P) \text{ mod } \text{Tur}(S) \\ & \nearrow \text{élément de NS}(S) & \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe abélien.

Gallaire

nombre de jayons $= g(S) = n + 2 + \sum_{\nu \in R} (m_{\nu} - 1)$

où $n = \text{rk du jay. de Nordell-Wel}$
 $E(\mathbb{C})$

$E(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus n}$
 / tors

On peut donner à $E(\mathbb{C})$ la structure d'un espace
 Top.

On définit sur $E(\mathbb{C})$ une forme bilinéaire symétrique à
 valeurs dans \mathbb{Q} . On utilise (*) et la base

Lemme . $P \in E(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists!$ élément $\varphi(P) \in NS(S) \otimes \mathbb{Q} = NS(S)_{\mathbb{Q}}$

† p. (i) $\varphi(P) \equiv (P) \pmod{Tr(S) \otimes \mathbb{Q}}$ et (ii) $\varphi(P) \perp Tr(S)$

Soit $P, Q \in E(\mathbb{C})$ on définit alors produit int dans $NS(S)$.

$$\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -(\varphi(P), \varphi(Q)) \quad \text{produit int}$$

On a la formule explicite
 selon χ

$$\langle P, Q \rangle = \chi + (P, Q) + (Q, S) - (P, Q) - \sum_{v \in R} \text{cont}_v(P, Q)$$

Et donc $\langle P, P \rangle = \chi + 2(P, P) + \chi - \sum_{v \in R} \text{cont}_v(P, P)$ (i) et (ii)

$$= 2\chi + 2(P, P) - \sum_{v \in R} \text{cont}_v(P)$$

Cette formule est très utile pour détecter les sections de
 Torsion en effet

$$E(\mathbb{C}) \text{ de Torsion } \Leftrightarrow \langle P, P \rangle = 0$$

$(\frac{E(\mathbb{C})}{\text{Top}}, \langle \rangle)$ est un espace défini positif. Espace de
 Minkowski.

Exemple (2-Torsion)

Considérons la surface $K3$ elliptique:
 $y^2 = x(x^2 + a(t)x + b(t))$

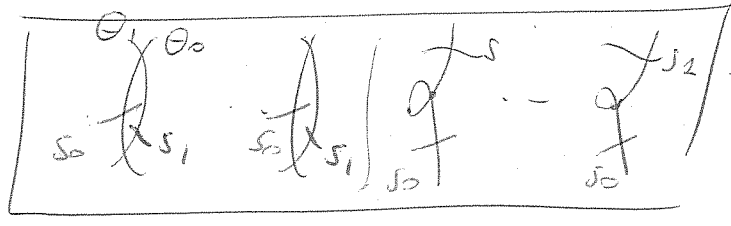
soit $a(t) = 4$, $b(t) = 8$ en une forme représentant ~~différent~~ de la forme de Weierstrass. On a les sections:

$S_0 \leftrightarrow (0:1:0)$
 $x \ y \ z$
 $S_1 \leftrightarrow (0:0:1)$
 Le section S_1 est de 2 Torsion
 (Toujours cette forme prend on e pr de 2 Torsion)

On calcule à l'aide du discriminant par le fibration:

à 8 fibres I_2 et 8 fibres I_1 , donc $8 \cdot 2 + 8 = 24 = \ell(S)$

ou utiliser la formule de l'espace de modules...



$P \notin S = 10$

et on: $10 = n + 2 + 8 = n + 10$
 $\Rightarrow n = 0$

↓
 P^2

on veut comprendre comme S_1 coupe les fibres I_2 .

$\langle S_1, S_1 \rangle = 2 \cdot \frac{2}{X(S)} + 2 \langle S_1, S_0 \rangle - \sum_{P \in R} \text{mult}_P(P)$

Ici si S_1 coupe la fibre $\theta_0 \Rightarrow \text{mult}_P(P) = 0$
 coupe $\theta_1 \Rightarrow \text{mult}_P(P) = \frac{1}{2}$

$2 - \langle S_1, S_1 \rangle = 4 - \sum_{P \in R} \text{mult}_P(P) \Rightarrow S_1$ coupe les 8 fibres en θ_1 .

Ici $MW(S) \cong \text{Id}$ et en effet on a $MWS/2 \cong \begin{matrix} \text{Oublier } \mathbb{C} \\ \text{Hélice de} \\ \text{resonance} \end{matrix}$ (3)

explicite, si

Quelques Problèmes ouverts

- * Étudier les différentes fonctions elliptiques sur la même surface $K3$ (papier de C. L. et al.)
- * Étudier les surfaces rationnelle elliptiques qui ont partout comme revêtement doubles spéciaux au feu (A. F. 2020)
(Bien avec les pinceaux de Hodge de l'indice m : plusieurs de courbes planes de degré $3m$ avec 9 pts de base de multiplicité m).
- * Étude d'automorphismes des surfaces $K3$ (---)