ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE
NORMES USUELLES, ÉQUIVALENCE DES NORMES

SOMMAIRE

Dans toute la leçon, E désigne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Sauf contre-exemple particulier)

Prérequis

Entre autres prérequis élémentaires, on supposera acquis les résultats suivants :

- Tout espace vectoriel E de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.
- Définition d'une application lipschitzienne d'un espace vectoriel normé dans un autre.
- Définition d'une application continue d'un espace vectoriel normé dans un autre.
- L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.
- Une partie F de E est fermée dans E si et seulement si toute suite d'éléments de F convergeant dans E converge dans F.
- Définition d'une partie compacte X : toute suite d'éléments de X admet une valeur d'adhérence dans X.
- Un intervalle fermé borné est un compact de $\mathbb{R}$.
- Un produit fini de compacts est un compact.
- Dans $\mathbb{R}^n$ les parties compactes sont les parties fermées bornées.
- Si X est une partie fermée d'un compact A, alors X est compacte.
- Toute application continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

1. Normes sur un espace vectoriel *E*

1.1. Définition d'une norme

Définition

On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

i) $\forall x \in E,$	$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$	(séparation)
ii) $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K},$	$N(\lambda x) = \lvert\lambda\rvert N(x)$	(homogénéité)
iii) $\forall (x, y) \in E \times E,$	$N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$	(inégalité triangulaire)

Notation et vocabulaire : on note $N(x) = \|x\|_E$ ou $N(x) = \|x\|$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. On appelle espace vectoriel normé, tout couple $(E, \| \,.\, \|)$ où $\| \,.\, \|$ est une norme sur E.

Remarques :

- D'après ii) avec $\lambda = 0$, il vient $N(0) = 0$.
- La condition $\forall x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ serait superflue dans la définition : d'après iii) et ce qui précède on a :

$$\forall x \in E : 0 \leqslant N(0) \leqslant N(x - x) \leqslant N(x) + N(-x) \leqslant N(x) + |-1|N(x) \leqslant 2N(x), \text{ d'où } N(x) \geqslant 0$$

- Si la propriété i) (séparation), n'est pas vérifiée, on dit que N est une semi-norme.
- Contrairement aux espaces euclidiens, deux vecteurs non liés peuvent réaliser "l'égalité" triangulaire. Considérer, dans $\mathbb{R}^n$, $x = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (1, 0, \ldots, 0)$ avec la norme $\|x\| = \sup\limits_{i \in \{1;\ldots;n\}} |x_i|$.

  On a alors $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x + y\| = 2$, donc $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ et pourtant x et y ne sont pas (positivement) liés.

Une propriété utile : *inégalité triangulaire renversée*

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x - y\|$$

Cette propriété est importante, elle permettra d'affirmer que toute norme N est continue sur E.

(Pour démontrer la propriété, on écrit $x = (x - y) + y$ et $y = (y - x) + x$ puis on utilise l'inégalité triangulaire)

Norme sur un sous-espace vectoriel : si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction de N à F est évidemment une norme sur F appelée norme induite.

Distance associée à une norme :

À partir de toute norme N sur E, on peut construire une distance d par :

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto N(x - y)$$

L'application d ainsi définie vérifie alors les 3 propriétés :
1) $\forall (x, y) \in E \times E$, $d(x, y) = d(y, x)$
2) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
3) $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$
Ce qui en fait bien une distance.

Ainsi tout espace vectoriel normé est un espace métrique et la norme N engendre une topologie sur E.

Noter qu'il existe des distances ne découlant pas d'une norme, comme par exemple, la distance discrète :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

En effet, l'application N obtenue en posant $N(x) = d(x, 0)$ ne vérifie pas l'axiome d'homogénéité.

1.2. Normes usuelles

On montre que les applications ci-dessous sont des normes :

i) $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $x \longmapsto |x|$

ii) $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \in]0 ; +\infty[$: $x \longmapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ (surtout pour $p = 1$ ou 2)

iii) $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $x \longmapsto \|x\|_\infty = \sup\limits_{i\in\{1;\dots;n\}} |x_i|$.

iv) Norme d'une application linéaire continue $u \in \mathcal{LC}(E, F)$ où $(E, \|\ .\ \|_E)$ et $(F, \|\ .\ \|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie :

$u \longmapsto \|u\| = \sup\limits_{x\in\overline{B}(0,1)} \|u(x)\|_F$ où $\overline{B}(0, 1)$ désigne la boule fermée unité : $\overline{B}(0, 1) = \{x \in E$ tels que $\|x\|_E \leqslant 1\}$

Note : une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue sur E si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in E : \|u(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$$

v) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}_n[X]$: $P \longmapsto \|P\| = \sup\limits_{i\in\{0;\dots;n\}} |a_i|$.

Preuve :

i) Évident

ii) Toutes les conditions de la définition se démontrent aisément sauf l'inégalité triangulaire, qui est l'inégalité de Minkowski qui se démontre de façon technique à l'aide de la convexité (non triviale) de la fonction homogène suivante : $x \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ (voir leçon sur la convexité)

iii) Inégalité triangulaire pour $\|\ .\ \|_\infty$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

On a (inégalité triangulaire classique sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \sup_{i\in\{1;\dots;n\}} |x_i| + \sup_{i\in\{1;\dots;n\}} |y_i|$$

En particulier, pour l'indice i tel que $|x_i + y_i|$ soit maximal :

$$\sup_{i\in\{1;\dots;n\}} |x_i + y_i| \leqslant \sup_{i\in\{1;\dots;n\}} |x_i| + \sup_{i\in\{1;\dots;n\}} |y_i|$$

D'où :

$$\|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

iv) Inégalité triangulaire pour $\|\ .\ \|$ sur $\mathcal{L}(E, F)$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

Comme $\|\ .\ \|_F$ est une norme sur F, on a :

$$\forall x \in E, \|(u + v)(x)\|_F \leqslant \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F$$

En particulier :

$$\forall x \in \overline{B}(0,1),\ \|(u + v)(x)\|_F \leqslant \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \leqslant \sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|u(x)\|_F + \sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|v(x)\|_F$$

Et en passant à la borne supérieure pour $x \in \overline{B}(0,1)$, il vient :

$$\sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|(u+v)(x)\|_F \leqslant \sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|u(x)\|_F + \sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|v(x)\|_F$$

D'où : $$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

v) Inégalité triangulaire pour $\| \,.\, \|$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$

On a (inégalité triangulaire classique sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ |a_i + b_i| \leqslant |a_i| + |b_i| \leqslant \sup_{i\in\{0;\ldots;n\}} |a_i| + \sup_{i\in\{0;\ldots;n\}} |b_i|$$

En particulier, pour l'indice i tel que $|a_i + b_i|$ soit maximal :

$$\sup_{i\in\{0;\ldots;n\}} |a_i + b_i| \leqslant \sup_{i\in\{0;\ldots;n\}} |a_i| + \sup_{i\in\{0;\ldots;n\}} |b_i|$$

D'où : $$\|P+Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$$

1.3. Normes équivalentes

Définition

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes si :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \text{ tels que : } \forall x \in E,\ \lambda N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \mu N_1(x)$$

On note alors $N_1 \sim N_2$ sur E. La relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence :

- On a $N_1 \sim N_1$ en choisissant $\lambda = \mu = 1$ d'où la réflexivité.
- Si $\lambda N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \mu N_1(x)$ alors $\frac{1}{\mu} N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \frac{1}{\lambda} N_2(x)$ d'où la symétrie.
- Si $\lambda N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \mu N_1(x)$ et $\lambda' N_2(x) \leqslant N_3(x) \leqslant \mu' N_2(x)$ alors $\lambda\lambda' N_1(x) \leqslant N_3(x) \leqslant \mu\mu' N_1(x)$

  D'où la transitivité.

Remarques :

- deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si et seulement si l'application $Id : (E, N_1) \longrightarrow (E, N_2)$ est bicontinue (ou encore "si l'identité est un homéomorphisme").
- deux normes N_1 et N_2 sont non équivalentes si et seulement si il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que la suite $\left(\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}\right)$ ne soit pas bornée.

Exemple : sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_2$ et $\| \,.\, \|_\infty$ sont équivalentes.

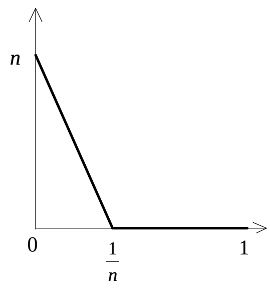
En effet on montre sans difficultés que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

Contre-exemple : sur $E = C([0\ ;\ 1], \mathbb{R})$, on considère les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ définies par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0\,;\,1]} |f(t)|$$

On considère la suite (f_n) d'éléments de E définie par : $f_n(x) = \begin{cases} -n^2x+n & \text{si } x \in \left[0\ ;\ \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}\ ;\ 1\right] \end{cases}$.



On a : $\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0\,;\,1]} |f_n(t)| = n$ et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

D'où : $$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Donc il n'existe pas de réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \leqslant M\|f_n\|_1$

Donc les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2. Cas de la dimension finie.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

2.1. Équivalence des normes

L'intérêt du théorème suivant est que, en dimension finie, on n'aura plus à préciser quelle est la norme utilisée dans les diverses propriétés topologiques (telles que la continuité ou la compacité).

Théorème

Soit E un e.v.n. **sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$**.

Si E est dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Attention !
Ce théorème est faux si le corps de base n'est pas complet !

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et N une norme quelconque sur E. Munissons E de la norme $\|\,.\,\|_\infty$:

Rappelons que pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a : $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\{1;...;n\}} |x_i|$

Lemme

Si E est de dimension finie, alors toute norme N est une application **continue** de $(E, \|\,.\,\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$.

Preuve du lemme :

Nous allons montrer que l'application N est lipschitzienne.

Soit $x \in E$, on a : $N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$

D'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme N, on a :

$$N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,N(e_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} N(e_i)\,\|x\|_\infty$$

Posons $M = \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$. ($M > 0$ car, les e_i étant non nuls, on a $N(e_i) \neq 0$).

D'où : $$N(x) \leqslant M\,\|x\|_\infty$$

On peut donc écrire : $\exists M > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x - y) \leqslant M\,\|x - y\|_\infty$

Or, d'après l'inégalité triangulaire renversée :

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$$

On peut donc écrire : $\exists M > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leqslant M\,\|x - y\|_\infty$

Ce qui signifie que l'application $N : (E, \|\ .\ \|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ .\ |)$ est M-lipschitzienne donc continue (sur E).

<u>Démonstration du théorème</u> :

<u>Premier cas</u> : *E* est un e.v.n. sur $\mathbb{R}$.

Comme, E est de dimension finie, il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$.

On va montrer que N est équivalente à $\|\ .\ \|_\infty$. Considérons la sphère unité S pour $\|\ .\ \|_\infty$:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \|x\|_\infty = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \sup_{i \in \{1;\ldots;n\}} |x_i| = 1\} \subset \prod_{i=1}^{n} [-1\,;\,1]$$

- L'ensemble $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} [-1\,;\,1]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$: en effet, l'intervalle $[-1\,;\,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$. De plus, un produit fini d'espaces compacts est compact donc $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} [-1\,;\,1]$ est un compact $\mathbb{R}^n$.
- S est bornée dans $\mathbb{R}^n$ (puisque contenue dans la boule fermée unité pour $\|\ .\ \|_\infty$)
- S est fermée dans $\mathbb{R}^n$: en effet, l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \|x\|_\infty$ est continue (d'après le lemme) donc l'image réciproque d'un fermé est un fermé. Or, $S = f^{-1}(\{1\})$ et le singleton $\{1\}$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |.|)$, donc S est fermée dans $\mathbb{R}^n$.

<u>Bilan</u> : S est fermée et contenue dans le compact P donc S est compacte dans $\mathbb{R}^n$.

On sait que N est continue sur $\mathbb{R}^n$ donc N est continue sur le compact S.

Donc l'application N est bornée et atteint ses bornes sur S :

$$\exists (m, M) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^2 \text{ tels que } \forall x \in S : m \leqslant N(x) \leqslant M$$

Mais N atteint ses bornes, donc pour un certain $x_0 \in S : N(x_0) = m$

Or, $x_0 \neq 0$ (car $x_0 \in S$) donc $N(x_0) \neq 0$ et $m > 0$.

Donc : $$\exists (m, M) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \text{ tels que } \forall x \in S : m \leqslant N(x) \leqslant M$$

Il ne reste plus qu'à étendre le résultat ci-dessus à $\mathbb{R}^n$:

Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Posons $x' = \dfrac{x}{\|x\|_\infty}$.

Il est clair qu'ainsi $x' \in S$ donc on a : $$m \leqslant N(x') \leqslant M$$

Or, $$N(x') = N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{1}{\|x\|_\infty} N(x)$$

D'où : $$m\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant M\|x\|_\infty$$

Enfin, cette double inégalité est toujours vraie si $x = 0$.

On a donc démontré que N et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Donc, par transitivité, toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Deuxième cas</u> : *E* est un e.v.n. sur $\mathbb{C}$.

On se ramène au cas précédent en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$. Cette identification est expliquée ci-dessous.

Déjà, on muni $\mathbb{R}^{2n}$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$ et $\mathbb{C}^n$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$. On définit l'application f par :

$$f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$$
$$(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) \mapsto (x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2, \ldots, x_n + \mathbf{i}y_n)$$

<u>Montrons que f est un isomorphisme d'e.v.n. (i.e. f est linéaire, bijective et bicontinue)</u>

- La linéarité est évidente (découle de celle des applications Re et Im)
- La bijectivité aussi (car $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathbf{i}y$)
- Continuité de f.

  On montre que f est continue en 0 :

  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, on a :

  $$\|f(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\|_\infty = \|(x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2, \ldots, x_n + \mathbf{i}y_n)\|_\infty \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{|x_k + \mathbf{i}y_k|\}$$

  Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

  $$|x_k + \mathbf{i}y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant 2 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|x_j| ; |y_j|\} \leqslant 2 \|(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\|_\infty$$

  Donc : $$\|f(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\|_\infty \leqslant 2 \|(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\|_\infty$$

  Il suffit donc de choisir $\eta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour assurer :

  $$\|(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\|_\infty \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

  Donc f est continue en 0, et par linéarité, continue sur $\mathbb{R}^{2n}$.

- Continuité de f^{-1}.

  Même type de raisonnement que ci-dessus. Cela découle des inégalités :

  $$\|f^{-1}(x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2, \ldots, x_n + \mathbf{i}y_n)\|_\infty = \|(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|x_j| ; |y_j|\}$$

  Or, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $$|x_j| \leqslant |x_j + \mathbf{i}y_j| \text{ et } |y_j| \leqslant |x_j + \mathbf{i}y_j|$$

  Donc : $$\|f^{-1}(x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2, \ldots, x_n + \mathbf{i}y_n)\|_\infty \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{|x_k + \mathbf{i}y_k|\}$$

  C'est-à-dire : $$\|f^{-1}(x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2, \ldots, x_n + \mathbf{i}y_n)\|_\infty \leqslant \|(x_1 + \mathbf{i}y_1, x_2 + \mathbf{i}y_2, \ldots, x_n + \mathbf{i}y_n)\|_\infty$$

  On en déduit que f^{-1} est continue en 0, et par linéarité, continue sur $\mathbb{C}^n$.

Cette identification entre les e.v.n. $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$ étant faite, on peut légitimement ramener le cas complexe au cas réel.

Contre-exemple : **normes non équivalentes en dimension finie**.

On considère : $$E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,] = \{a + b\sqrt{2} \text{ où } a, b \in \mathbb{Q}\}$$

On vérifie facilement que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2. (E est sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^2$, ses éléments sont "stables" par addition et par multiplication par un rationnel, ce qui justifie que E un e.v. (en tant que s.e.v. de $\mathbb{R}^2$). Enfin, on montre que E est isomorphe à $\mathbb{Q}^2$ (considérer l'application $\varphi : \mathbb{Q}^2 \to E, (a, b) \mapsto a + b\sqrt{2}$. φ est clairement surjective. De plus, φ est injective car $\sqrt{2}$ est irrationnel). On a donc $\dim_{\mathbb{Q}} E = 2$)

On considère, sur E, les deux applications suivantes :

$$N_1 : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ a + b\sqrt{2} \mapsto |a| + |b| \end{array} \quad \text{et} \quad N_2 : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ a + b\sqrt{2} \mapsto |a + b\sqrt{2}\,| \end{array}$$

Vérifions que ce sont des normes :

Séparation :

$$N_1(a + b\sqrt{2}\,) = 0 \Rightarrow |a| + |b| = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

$$N_2(a + b\sqrt{2}\,) = 0 \Rightarrow |a + b\sqrt{2}\,| = 0 \overset{\sqrt{2} \text{ irrationnel}}{\Rightarrow} a = b = 0$$

Homogénéité :

$\forall \lambda \in \mathbb{Q}$, $$N_1(\lambda(a + b\sqrt{2}\,)) = N_1(\lambda a + \lambda b\sqrt{2}\,) = |\lambda a| + |\lambda b| = |\lambda|\, N_1(a + b\sqrt{2}\,)$$

$$N_2(\lambda(a + b\sqrt{2}\,)) = |\lambda(a + b\sqrt{2}\,)| = |\lambda|\, N_2(a + b\sqrt{2}\,)$$

Inégalité triangulaire :

$$N_1(a + b\sqrt{2} + a' + b'\sqrt{2}\,) \leqslant |a + a'| + |b + b'| \leqslant |a| + |a'| + |b| + |b'| \leqslant N_1(a + b\sqrt{2}\,) + N_1(a' + b'\sqrt{2}\,)$$

$$N_2(a + b\sqrt{2} + a' + b'\sqrt{2}\,) \leqslant |a + a' + b\sqrt{2} + b'\sqrt{2}\,| \leqslant |a + b\sqrt{2}\,| + |a' + b'\sqrt{2}\,| \leqslant N_2(a + b\sqrt{2}\,) + N_2(a' + b'\sqrt{2}\,)$$

Donc N_1 et N_2 sont bien des normes sur E.

Montrons que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes :

Il suffit de considérer la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$$

La formule du binôme fait apparaître deux suites (a_n) et (b_n) d'entiers telles que :

$$u_n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

On montre facilement que la suite (v_n) définie par $v_n = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n$ vérifie :

$$v_n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

En conséquence la suite (a_n) vérifie : $$a_n = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (car $1 - \sqrt{2} \in]-1, 1[$) et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ ($1 + \sqrt{2} > 1$), la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

Or, on a $N_1(u_n) = |a_n| + |b_n|$ donc : la suite $(N_1(u_n))$ diverge vers $+\infty$

Et $N_2(u_n) = |1 - \sqrt{2}\,|^n$ donc : la suite $(N_2(u_n))$ converge vers 0

La suite $\left(\dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)}\right)$ n'est donc pas bornée. Donc les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

2.2. Quelques conséquences du théorème :

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$.

1) Soit F un espace vectoriel normé (de dimension quelconque) sur le même corps $\mathbb{K}$ que E. Alors :

toute application linéaire f de E dans F est continue.

2) Une partie X de E est compacte si et seulement si X est fermée bornée.

3) E est complet (toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E)

4) Tout sous-espace vectoriel F de E est fermé.

Preuve :

1) Soit (e_i) une base de E. Munissons E et F de leur $\| \,.\, \|_1$ respective. On a :

f étant linéaire : $$\forall x \in E : \|f(x)\|_1 = \left\| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|_1$$

D'après l'inégalité triangulaire : $$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(e_i)\|_1$$

Et en posant $M = \sup\limits_{i \in \{1;\ldots;n\}} \{\|f(e_i)\|_1\}$, il vient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(e_i)\|_1 \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

D'où finalement : $$\forall x \in E, \|f(x)\|_1 \leqslant M \, \|x\|_1.$$

D'où : $$\forall (x, y) \in E^2 : \|f(x - y)\|_1 \leqslant M \, \|x - y\|_1$$

Et comme f est linéaire : $$\forall (x, y) \in E^2 : \|f(x) - f(y)\|_1 \leqslant M \, \|x - y\|_1$$

Donc f est M-lipschitzienne sur E donc continue sur E relativement à $\| \,.\, \|_1$ donc relativement à toute norme d'après le théorème.

2) Supposons X compacte dans E.

Montrons que X est fermée :

Soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant vers $y \in E$. Comme X est compacte, la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $\ell \in X$. Mais comme (x_n) converge, $\ell = y$, donc $y \in X$. D'où X est fermée.

Montrons que X est bornée.

Si X n'était pas bornée, on aurait : (quelque soit la norme choisie)

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in X \text{ tel que } \|x\| \geqslant A$$

En particulier, on peut construire une suite (x_n) d'éléments de X telle que :

$$\forall n \in N, \|x_n\| \geqslant n$$

Un telle suite n'admet pas de valeur d'adhérence, ce qui contredirait le fait que X est compacte.

Donc X est bornée.

Réciproquement, supposons X fermée bornée dans E.

Soit ϕ une application linéaire bijective de E dans $\mathbb{R}^n$. Comme ϕ est une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, elle est continue (d'après 1)) donc $\phi(X)$ est fermée bornée dans $\mathbb{R}^n$ donc compact de $\mathbb{R}^n$. Comme ϕ^{-1} est également continue, on en déduit que X est compact dans E.

3) Soit (u_n) une suite de Cauchy dans E. Comme (u_n) est bornée, il existe un réel $r > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}(0, r)$ contienne $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Or, $\overline{B}(0, r)$ est compacte (puisque fermée bornée). Donc toute suite de $\overline{B}(0, r)$ admet une valeur d'adhérence. Or, toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge. Donc (u_n) converge, et comme $\overline{B}(0, r)$ est fermée, (u_n) converge dans $\overline{B}(0, r)$ donc dans E. Donc E est complet.

Remarque : un espace vectoriel normé de dimension finie (donc complet) s'appelle un espace de Banach.

4) Comme F est dimension finie, il est complet (d'après3)). Montrons qu'alors F est fermé :

Soit (x_n) une suite d'éléments de F convergeant vers un élément ℓ de E. Puisque (x_n) converge, elle est de Cauchy et comme F est complet, (x_n) converge dans F, donc $\ell \in F$ et par suite F est fermé.

Contre-exemple : il existe, en dimension infinie, des **applications linéaires non continues**.

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ (qui est de dimension infinie) muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ et l'application linéaire de dérivation φ :

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ \quad P \longmapsto P' \end{array}$$

Considérons la suite (P_n) définie sur $\mathbb{N}^*$, par : $P_n = \dfrac{1}{n} X^n$

On a, d'une part : $\|P_n\|_\infty = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Et d'autre part : $\|\varphi(P_n)\|_\infty = \|X^{n-1}\|_\infty = 1$

Intuitivement, que montre ce contre-exemple ? On sait que la dérivée du polynôme nul, c'est le polynôme nul. Or, il existe des polynômes très "proches" du polynôme nul (pour la norme $\| \cdot \|_\infty$) dont la dérivée n'est pas "proche" du polynôme nul. L'opération de dérivation n'est donc pas continue pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Ainsi, la suite (P_n) converge vers 0 pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ tandis que la suite $(\varphi(P_n))$ ne converge pas vers 0.

On en déduit que φ n'est pas continue en 0. (Et comme φ est linéaire, φ n'est continue en aucun point de E)

2.3. Caractérisation de la dimension finie par une propriété topologique

Théorème de Riesz

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Alors :

E est de dimension finie $\Leftrightarrow$ La boule fermée unité $\overline{B}(0, 1)$ est compacte

Démonstration :

Preuve de "$\Rightarrow$" :

Supposons E de dimension finie.

Comme la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ est **fermée** (image réciproque du fermé $[0, 1]$ par l'application norme qui est continue, puisque E est de dimension finie) et **bornée** (clair) donc elle est compacte.

Preuve de "$\Leftarrow$" :

Lemme 1

Soit (E, N) un espace normé.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie.

On note d la distance induite par N.

Alors : $\forall a \in E, \exists b \in F, N(a - b) = d(a, F)$

On rappelle que :

$$d(a, F) = \inf_{x \in F} \{N(a - x)\}$$

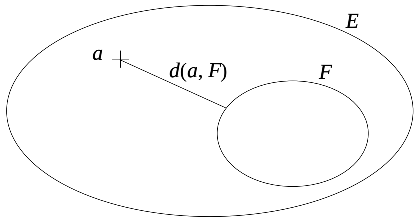
(Cette borne inférieure existe bien car l'application $f_a : F \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto N(a - x)$ est continue car F est de dimension finie)

Démonstration du lemme 1 :

Comme F est de dimension finie, F est fermé dans E.

Soit $a \in E$.

Si $a \in F$, on choisit $b = a$.



Si $a \notin F$, alors F étant fermé, $a \notin \overline{F}$. Donc : $\qquad d(a, F) > 0$

D'après les propriétés de la borne inférieure, il existe une suite (b_n) d'éléments de F telle que $N(a - b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(a, F)$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |N(a - b_n) - d(a, F)| \leqslant \varepsilon)$$

En particulier avec $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow N(a - b_n) \leqslant 1 + d(a, F))$$

Mais d'après l'inégalité triangulaire renversée :

$$|N(a) - N(b_n)| \leqslant N(a - b_n)$$

D'où : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |N(b_n) - N(a)| \leqslant 1 + d(a, F) \Rightarrow 0 \leqslant N(b_n) \leqslant N(a) + 1 + d(a, F))$

La suite (b_n) est donc bornée dans un espace de dimension finie. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(b_{\sigma(n)})$ convergeant vers un certain élément b.

Et comme F est fermé, $b \in F$.

On a vu que : $\qquad N(a - b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(a, F)$

Donc, on a également : $\qquad N(a - b_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(a, F)$

Et par continuité de N : $\qquad N(a - b) = d(a, F)$

Lemme 2

Soit (E, N) un espace normé de dimension infinie

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie.

On note d la distance induite par N.

Alors : $\qquad \exists x \in \overline{B}(0, 1), d(x, F) = 1$

Démonstration :

Soit $a \in E \setminus F$.

D'après le lemme 1 : $\qquad \exists b \in F, N(a - b) = d(a, F)$

Comme $a \in E \setminus F$, $d(a, F)$ est non nul. Posons :

$$x = \frac{a-b}{N(a-b)}$$

Il est clair que $x \in \overline{B}(0, 1)$.

D'une part, comme $0 \in F$, on a :

$$d(x, F) \leqslant d(x, 0) \leqslant N(x) \leqslant 1 \qquad (1)$$

D'autre part, pour tout $y \in F$, on peut écrire :

$$x - y = \frac{a-v}{N(a-b)} \qquad \text{où } v = b + N(a - b)y \in F$$

Ainsi : $$N(x - y) = \frac{N(a-v)}{N(a-b)} = \frac{d(a,v)}{d(a,F)} \geqslant 1 \qquad \text{car } v \in F$$

Par passage à la borne inférieure, on obtient :

$$d(x, F) \geqslant 1 \qquad (2)$$

D'après (1) et (2), on déduit : $d(x, F) = 1$

Ce qui prouve le lemme 2.

Venons-en maintenant à la démonstration de l'implication "$\Leftarrow$" . Raisonnons par contraposition.

Supposons E de dimension infinie.

Soit $e_1 \in \overline{B}(0, 1)$. On pose $F_1 = \text{Vect}(e_1)$.

Alors, il existe $e_2 \in \overline{B}(0, 1)$ tel que $d(e_2, F_1) = 1$. Puis, on pose $F_2 = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Alors, il existe $e_3 \in \overline{B}(0, 1)$ tel que $d(e_3, F_2) = 1$. Puis, on pose $F_3 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_2)$.

Et ainsi de suite.

Comme E est de dimension infinie, on construit ainsi une suite infinie (e_n) telle que :

$$\forall (i, j),\ (i \neq j \ \Rightarrow\ N(e_i - e_j) \geqslant 1)$$

Il sera donc impossible d'en extraire une sous-suite convergente.

Donc $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.

On conclut par contraposition.

On dispose donc d'un "critère" pour savoir si un espace vectoriel normé est de dimension infinie :

<u>Exemple</u> : $E = C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,\,2\pi]} |f(x)|$$

On considère la suite (f_n) de fonctions de E définies par $f_n(x) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}nx}$.

On a $|f_n| = 1$, donc les f_n sont éléments de $\overline{B}(0, 1)$.

Or $\|f_n - f_p\|_\infty = \sup_{x\in[0,\,2\pi]} \left|\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}px}\right| = 2$ car :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}px} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{n+p}{2}\right)x}\left[\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{n-p}{2}\right)x} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\left(\frac{n-p}{2}\right)x}\right] = 2\ \cos\left[\left(\frac{n-p}{2}\right)x\right]\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{n+p}{2}\right)x}$$

Donc $\left|\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}px}\right| = 2\ \cos\left[\left(\frac{n-p}{2}\right)x\right]$ et ,(particulariser $x = 0$), $\sup_{x\in[0,\,2\pi]} \left|\mathbf{e}^{\mathbf{i}nx} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}px}\right| = 2$.

Comme on a $\|f_n - f_p\|_\infty = 2$, il est impossible d'extraire une sous-suite de (f_n) qui converge pour $\|\ .\ \|_\infty$, donc $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte et E est de dimension infinie.