Université d'Orléans
Département de mathématiques

2001/2002

# La décomposition du Mouvement Brownien Fractionnaire en ondelettes

Mémoire de DEA
effectué par Hermine BIERME
sous la direction de Mesdames Aline BONAMI et Anne ESTRADE

# Table des matières


**1 Les processus généralisés et le Mouvement Brownien Fractionnaire** **3**

1.1 Les processus généralisés . . . 3

1.1.1 Définition . . . 3

1.1.2 Les processus généralisés gaussiens . . . 4

1.1.3 Les processus généralisés stationnaires . . . 4

1.1.4 Les processus généralisés à différences stationnaires . . . 5

1.2 Le mouvement Brownien Fractionnaire . . . 6

1.2.1 Définition et Propriétés . . . 6

1.2.2 Le bruit gaussien Fractionnaire . . . 7

**2 Les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires** **9**

2.1 Introduction . . . 9

2.1.1 Motivation . . . 9

2.1.2 Lien avec l'intégration et la dérivation . . . 9

2.2 Les opérateurs $D^d_{r,h}$, $d \in \mathbb{R}$, $r$, $h \in ]0,1[$ . . . 10

2.3 Les opérateurs de dérivation fractionnaire, $d \geq 0$. . . . 11

2.3.1 Convergence . . . 11

2.3.2 Les opérateurs de dérivation fractionnaire sur $\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$ . . . 12

2.3.3 Les opérateurs de dérivation fractionnaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ . . . 13

2.4 Les opérateurs d'intégration fractionnaire, $d \leq 0$. . . . 13

2.4.1 Convergence . . . 13

Etude lorsque $r$ tend vers 1 . . . 13

Etude lorsque $h$ tend vers 0 . . . 15

2.4.2 Les opérateurs d'intégration fractionnaire sur $\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ . . . 17

2.5 Conclusion . . . 17

**3 Une base d'ondelettes** **18**

3.1 Fonctions de base . . . 18

3.1.1 Les fonctions $\varphi$ et $\psi$ . . . 18

3.1.2 Les fonctions $\varphi^d$ et $\psi^d$, $d \in \mathbb{R}$ . . . 21

3.2 Base de Riesz . . . 23

3.2.1 Définition . . . 23

3.2.2 Caractérisation . . . 23

3.2.3 Application . . . 24

**4 Les espaces $C^s_\alpha$** **30**
4.1 Les espaces $C^s_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 \leq s \leq 1$. . . . . 30
4.2 Les espaces $C^s_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $-1 < s < 0$. . . . . 35
4.3 Primitives des distributions de $C^s_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $-1 < s < 0$. . . . . 36

**5 La décomposition du mouvement Brownien Fractionnaire en ondelettes** **39**
5.1 La décomposition du bruit blanc gaussien en ondelettes . . . . . 39
5.2 La décomposition du bruit blanc gaussien Fractionnaire en ondelettes . . . . 41
5.3 La décomposition du Mouvement Brownien Fractionnaire en ondelettes . . . 44

**A Rappels et notations concernant les distributions tempérées** **50**
A.1 L'espace de Schwartz . . . . . 50
A.1.1 Définition . . . . . 50
A.1.2 Les espaces $\mathcal{S}_j(\mathbb{R}), j \in \mathbb{N}$ . . . . . 51
A.2 L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ . . . . . 52

Par ses nombreuses applications (plus récemment dans le domaine des télécommunications) et ses possibles généralisations, le mouvement brownien fractionnaire (MBF) est un objet d'étude très intéressant.
Parallèlement, la théorie des ondelettes, dont les origines sont pluridisciplinaires, apporte des outils de grande précision dans un large domaine d'applications.
Il semblait donc naturel de relier les deux en cherchant une décomposition en ondelettes du MBF.

La méthode employée par Meyer Y., Sellan F., Taqqu M.S. [1] est une généralisation de la méthode du point milieu de Lévy. Elle s'appuie sur la décomposition du bruit blanc gaussien (BBG) dans une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ ce qui permet d'obtenir, par dérivation ou intégration fractionnaire, la décomposition du bruit gaussien fractionnaire (BGF) en ondelettes. Enfin, l'intégration du BGF fournit la décomposition en ondelettes du MBF.

Dans ce but, nous aurons besoin d'intoduire des processus généralisés dont nous donnerons les définitions et les principales propriétés au chapitre 1. Nous verrons alors comment le MBF peut se "généraliser" ce qui nous permettra de définir le BGF (respectivement le BBG), processus generalisé stationnaire dérivé du MBF (respectivement du mouvement brownien). Nous introduirons au chapitre 2 les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires. Dans le chapitre 3 nous construirons les familles d'ondelettes qui interviendront dans ces nombreuses décompositions. Elle nous permettrons dans le chapitre 4 de définir des espaces fonctionnels de distributions qui éclaireront les démonstrations du chapitre 5, consacré à la décomposition du MBF en ondelettes.

# Chapitre 1

# Les processus généralisés et le Mouvement Brownien Fractionnaire

## 1.1 Les processus généralisés

### 1.1.1 Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, $K \in \{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R}), \mathcal{S}_j(\mathbb{R}), j \in \mathbb{N}\}$ et $\widetilde{K} \subset K$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des fonctions de $K$ à valeurs réelles.
$\Phi$ est une fonction aléatoire sur $K$ (respectivement sur $\widetilde{K}$) si à chaque élément $\varphi$ de $K$ (respectivement de $\widetilde{K}$) on fait correspondre une variable aléatoire complexe (respectivement réelle) $\Phi(\phi)$.
$\Phi$ est une fonction aléatoire sur $K$ (respectivement sur $\widetilde{K}$) linéaire si pour tout $\varphi, \psi \in K$ (respectivement $\widetilde{K}$) et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$)

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi) \quad \text{presque sûrement.}$$

$\Phi$ est une fonction aléatoire sur $K$ (respectivement sur $\widetilde{K}$) continue si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j \leq n$, si les suites $(\varphi_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\varphi^j$ dans $K$ (respectivement dans $\widetilde{K}$) muni de sa topologie naturelle alors

$$\lim_{k\to+\infty} (\Phi(\varphi_k^1), \ldots, \Phi(\varphi_k^n)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\Phi(\varphi^1), \ldots, \Phi(\varphi^n)) \quad \text{(convergence en loi).}$$

Une fonction aléatoire sur $K$ (respectivement sur $\widetilde{K}$) linéaire et continue est appelée processus généralisé sur $K$ (respectivement sur $\widetilde{K}$). On note $\Phi(\varphi) :=< \Phi, \varphi >$ pour indiquer la linéarité et la continuité de $\Phi$.

**Remarque 1.1.1.1.** *Si $X$ est un processus généralisé sur $K$ tel que pour tout $\varphi \in \widetilde{K}$ $< X, \varphi >$ est une variable aléatoire réelle, $X$ se restreint en un processus généralisé sur $\widetilde{K}$. Réciproquement, si $X$ est un processus généralisé sur $\widetilde{K}$, $X$ se prolonge en un processus généralisé sur $K$ en posant pour tout $\varphi \in K$, $< X, \varphi >=< X, \mathcal{R}e(\varphi) > +i < X, \mathcal{I}m(\varphi) >$. Ce prolongement est unique.*

**Définition 1.1.1.1.** *Soit $X$ un processus généralisé sur $K$ tel que pour tout $\varphi \in K$, la variable aléatoire $< X, \varphi >$ admette un moment d'ordre 1 dépendant continûment de $\varphi$, on dit alors que $X$ est un processus généralisé du premier ordre. On appelle valeur moyenne du processus généralisé $X$ la fonction $m_X : K \to \mathbb{C}$ donnée par*

$$m_X(\varphi) = \mathbf{E}[< X, \varphi >] \text{ pour tout } \varphi \in K.$$

*$m_X$ est une forme linéaire continue sur $K$.*
*Si $m_X \equiv 0$ le processus est dit centré.*

**Définition 1.1.1.2.** *Soit $X$ un processus généralisé sur $K$ tel que pour tout $\varphi \in K$, la variable aléatoire $< X, \varphi >$ admette un moment d'ordre 2 dépendant continûment de $\varphi$, on dit alors que $X$ est un processus généralisé du second ordre. On appelle forme de corrélation du processus généralisé $X$ la fonction $\Gamma_X : K \times K \to \mathbb{C}$ donnée par*

$$\Gamma_X(\varphi, \psi) = \mathbf{E}[< X, \varphi > \overline{< X, \psi >}], \text{ pour tout } \varphi, \psi \in K.$$

*$\Gamma_X$ est une forme bilinéaire positive continue sur $K \times K$.*

**Remarque 1.1.1.2.** *Si $X : K \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est une application linéaire continue, $X$ définit un processus généralisé du second ordre sur $K$.*

**Définition 1.1.1.3.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus généralisés sur $K$.*
*On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $X$ si $X$ est un processus généralisé sur $K$ et presque sûrement pour tout $\varphi \in K$, la suite $(< X_n, \varphi >)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $< X, \varphi >$.*

### 1.1.2 Les processus généralisés gaussiens

**Définition 1.1.2.1.** *Soit $X$ un processus généralisé du second ordre sur $\widetilde{K}$ .*
*$X$ est un processus généralisé gaussien sur $\widetilde{K}$ si pour toutes fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de $\widetilde{K}$ $(< X, \varphi_1 >, \ldots, < X, \varphi_n >)$ est un vecteur gaussien.*
*Son espérance est alors $(m_X(\varphi_1), \ldots, m_X(\varphi_n))$ et sa matrice de covariance $(\Gamma_X(\varphi_i, \varphi_j))_{1\leq i,j\leq n}$.*

**Remarque 1.1.2.1.** *Comme $\widetilde{K}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, par linéarité, il suffit de montrer que pour tout $\varphi \in \widetilde{K}$ $< X, \varphi >$ est une variable aléatoire gaussienne.*

**Proposition 1.1.2.1.** *Un processus généralisé gaussien sur $\widetilde{K}$ est entièrement déterminé par sa valeur moyenne et sa forme de corrélation.*

Nous nous intéresserons dans la suite à des processus généralisé gaussien centré.

**Théorème 1.1.2.1.** *Soit $\Gamma : \widetilde{K} \times \widetilde{K} \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue positive alors il existe un unique processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{K}$ tel que $\Gamma_X = \Gamma$.*

**Proposition 1.1.2.2.** *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de processus généralisés gaussiens sur $\widetilde{K}$ qui converge presque sûrement vers $X$, processus généralisé du second ordre, alors $X$ est un processus généralisé gaussien sur $\widetilde{K}$.*

**preuve** Pour tout $\varphi \in \widetilde{K}$, la suite $(< X_n, \varphi >)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes qui converge presque sûrement donc en loi vers $< X, \varphi >$ ainsi $< X, \varphi >$ est gaussienne et $X$ est gaussien.

### 1.1.3 Les processus généralisés stationnaires

**Définition 1.1.3.1.** *Soit $X$ un processus généralisé sur $K$, il est dit stationnaire si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in K$*

$$(< X, \tau_t\varphi_1 >, \ldots, < X, \tau_t\varphi_n >) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (< X, \varphi_1 >, \ldots, < X, \varphi_n >),$$

*avec $\tau_t$ l'opérateur de translation par $t$.*

**Théorème 1.1.3.1 (Bochner).** *La forme de corrélation d'un processus généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ stationnaire du second ordre $X$ s'écrit de manière unique :*

$$\Gamma_X(\varphi,\psi) = (\gamma_X, \varphi * \check{\overline{\psi}}) \text{ pour toutes } \varphi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

*où $\gamma_X$ est la transformée de Fourier d'une mesure positive à croissance lente $\mu_X$ appelée densité du processus.*

**Corollaire 1.1.3.1.** *La forme de corrélation d'un processus généralisé sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ stationnaire du second ordre $X$ s'écrit de manière unique :*

$$\Gamma_X(\varphi,\psi) = (\gamma_X, \varphi * \check{\psi}) \text{ pour toutes } \varphi,\psi \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$$

*où $\gamma_X$ est la transformée de Fourier d'une mesure positive à croissance lente $\mu_X$ appelée densité du processus.*

**preuve** On prolonge $X$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en posant $< X,\varphi >=< X,\mathcal{R}e(\varphi) > +i < X,\mathcal{I}m(\varphi) >$. Ce prolongement $X$ est un processus généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ stationnaire du second ordre donc d'après le théorème 1.1.3.1 il existe une unique mesure positive à croissance lente $\mu$ telle que pour toutes fonctions $\varphi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\Gamma_X(\varphi,\psi) =< \widehat{\mu}, \varphi * \check{\overline{\psi}} >$. Finallement, si $\varphi,\psi \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$

$$\Gamma_X(\varphi,\psi) =< \widehat{\mu}, \varphi * \check{\psi} >,$$

donc $\mu_X = \mu$ et $\gamma_X = \widehat{\mu_X}$ .

**Corollaire 1.1.3.2.** *Si $X$ est un processus généralisé gaussien centré stationnaire sur $\widetilde{K}$ alors $X$ est entièrement déterminé par $\mu_X$ ou $\gamma_X$ .*

### 1.1.4 Les processus généralisés à différences stationnaires

**Définition 1.1.4.1.** *Soit $X$ un processus généralisé sur $K$, il est dit à différences d'ordre $k$ stationnaires si sa $k$-ième dérivée est un processus généralisé stationnaire ie pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in K$*

$$(< X,\tau_t\varphi_1^{(k)} >,\ldots,< X,\tau_t\varphi_n^{(k)} >) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (< X,\varphi_1^{(k)} >,\ldots,< X,\varphi_n^{(k)} >).$$

*Si $k=1$, $X$ est dit à accroissements stationnaires.*

**Proposition 1.1.4.1.** *Soit $X$ un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{K}$.*
*Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi,\psi \in \widetilde{K}$,*

$$\Gamma_X(\tau_t\varphi,\tau_t\psi) = \Gamma_X(\varphi,\psi)$$

*alors $X$ est un processus stationnaire.*
*Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi,\psi \in \widetilde{K}$,*

$$\Gamma_X(\tau_t\varphi^{(k)},\tau_t\psi^{(k)}) = \Gamma_X(\varphi^{(k)},\psi^{(k)})$$

*alors $X$ est un processus stationnaire à différences d'ordre $k$ stationnaires.*

Cette partie est largement traitée dans [3].

## 1.2 Le mouvement Brownien Fractionnaire

### 1.2.1 Définition et Propriétés

**Définition 1.2.1.1.** *On appelle mouvement Brownien Fractionnaire de paramètre $H \in ]0,1[$, noté $B_H$ l'unique processus gaussien centré tel que*
*i) $B_H(0) = 0$ presque sûrement ;*
*ii) les trajectoires $t \mapsto B_H(t)$ sont continues p.s. ;*
*iii) pour tout $t, s \in \mathbb{R}$*

$$\mathbf{E}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\}.$$

*Le processus $B_H$ est à accroissements stationnaires ie pour tout $s \in \mathbb{R}$*

$$\{B_H(t) - B_H(s),\, t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{B_H(t-s),\, t \in \mathbb{R}\}.$$

*Le processus $B_H$ est $H$ auto-similaire ie pour tout $a > 0$*

$$\{a^{-H}B_H(at),\, t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{B_H(t),\, t \in \mathbb{R}\}.$$

*Si $H = \frac{1}{2}$, $B_H$ est le mouvement Brownien.*

On cherche à "prolonger" $B_H$ en un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. L'hypothèse de continuité nous permet seulement de prolonger $B_H$ en un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$.
En effet, soit $\omega \in \Omega$ tel que $t \mapsto B_H(t,\omega)$ soit une fonction continue alors $B_H(\omega) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})'$ en posant $< B_H, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} B_H(t,\omega)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
$\mathbf{E}(| < B_H, \varphi > |^2) \leq \int_{\mathbb{R}} |t|^H |\varphi(t)|dt$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ donc $B_H$ est du second ordre.
De plus, si $\varphi$ est à valeurs réelles, non identiquement nulle et de support inclus dans $[-A, A]$, avec $A > 0$, alors

$$\frac{2A}{n}\sum_{k=1}^{n} B_H(-A + \frac{2kA}{n}, \omega)\varphi(-A + \frac{2kA}{n}) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} B_H(t,\omega)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} B_H(t,\omega)\overline{\varphi(t)}dt.$$

On en déduit que $\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} B_H(t,\omega)\varphi(t)dt$ suit une loi gaussienne centrée en tant que limite presque sûre d'une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées. $B_H$ définit donc un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$. De plus, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\mathbf{E}(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |B_H(t,\omega)\varphi(t)\overline{B_H(s,\omega)\psi(s)}|dtds) \leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |t|^{2H}|s|^{2H}|\varphi(t)\psi(s)| < \infty$$

donc, par Fubini, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\Gamma_{B_H}(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\overline{\psi(s)}\mathbf{E}(B_H(t)B_H(s))dtds.$$

Comme $(t,s) \mapsto \mathbf{E}(B_H(t)B_H(s)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)'$ pour $H \in ]0,1[$, on cherche un processus généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ dont la forme de corrélation vérifie pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\Gamma_H(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\overline{\psi(s)}\mathbf{E}(B_H(t)B_H(s))dtds.$$

D'après le théorème 1.1.2.1 p.4 et la remarque 1.1.1.1 p.3 il suffit de vérifier que $\Gamma_H$ est une forme bilinéaire continue positive sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \times \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

Il est clair que $\Gamma_H$ est une forme bilinéaire continue sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \times \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$, montrons qu'elle est positive. Soit $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$ telle que $\theta(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\varphi \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$, on pose pour $n \geq 1$, $\varphi_n : x \mapsto \varphi(x)\theta(\frac{x}{n})$.
Pour tout $n \geq 1$ $\varphi_n \in \widetilde{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$ donc $\Gamma_H(\varphi_n, \varphi_n) = \Gamma_{B_H}(\varphi_n, \varphi_n) \geq 0$.
Comme $\Gamma_H(\varphi_n, \varphi_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma_H(\varphi, \varphi)$ on en déduit la positivité de $\Gamma_H$.
On note encore $B_H$ le processus obtenu.

### 1.2.2 Le bruit gaussien Fractionnaire

**Définition 1.2.2.1.** *On définit le bruit gaussien fractionnaire $Z_H$ comme étant la dérivée de $B_H$ :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad < Z_H, \varphi >= - < B_H, \varphi' > .$$

**Proposition 1.2.2.1.** *$Z_H$ est un processus généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gaussien, centré, stationnaire sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.*

**preuve** Il est clair que $Z_H$ est un processus généralisé gaussien centré, car $B_H$ en est un. Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose $\gamma_H : t \mapsto -\frac{1}{2}|t|^{2H}$, $\gamma_H \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{Z_H}(\varphi, \psi) &= \mathbf{E}[< Z_H, \varphi > \overline{< Z_H, \psi >}] = \mathbf{E}[< B_H, \varphi' > \overline{< B_H, \psi' >}] \\
&= < \gamma_H, \varphi' * \overline{\check{\psi'}} >= - < \gamma_H', \varphi * \overline{\check{\psi'}} > \\
&= < -\gamma_H'', \varphi * \overline{\check{\psi}} > .
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma_{Z_H}(\tau_t\varphi, \tau_t\psi) = \Gamma_{Z_H}(\varphi, \psi)$ donc $Z_H$ est stationnaire, de plus $\gamma_{Z_H} \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} -\gamma_H''$.

**Corollaire 1.2.2.1.** *$B_H$ est un processus généralisé gaussien, centré, à accroissements stationnaires sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ .*

**Proposition 1.2.2.2.**
*1 )$\gamma_{Z_H}(t) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} H(2H-1)pf(|t|^{2H-2})$ si $H \neq \frac{1}{2}$, $\gamma_{Z_{1/2}}(t) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \delta_0$.*
*2 )$\mu_{Z_H}(\xi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} C_H|\xi|^{1-2H}$ si $H \neq \frac{1}{2}$, avec $C_H = \frac{1}{\pi}H \sin H\pi\Gamma(2H)$, $\mu_{Z_{1/2}}(\xi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} C_{1/2}$.*
*$Z_{1/2}$ est appelé bruit blanc gaussien généralisé et noté $Z$.*

**preuve**
$\gamma_{Z_H} = -\gamma_H'' = \frac{1}{2}(|t|^{2H})'' \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} H(2H-1)pf(|t|^{2H-2})$ si $H \neq \frac{1}{2}$, $\gamma_Z = \frac{1}{2}(|t|)'' \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \delta_0$.
$\mu_{Z_H}(\xi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \frac{1}{2\pi}\widehat{\check{\gamma_{Z_H}}}$, donc, si $H \neq \frac{1}{2}$, $\mu_{Z_H}(\xi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} H(2H-1)\frac{1}{\pi}\sin H\pi\Gamma(2H-1)|\xi|^{1-2H} = C_H|\xi|^{1-2H}$, car $(2H-1)\Gamma(2H-1) = \Gamma(2H)$, et $\mu_Z(\xi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \frac{1}{2\pi} = C_{1/2}$ (cf [2]).

Le bruit blanc gaussien généralisé admettant une densité très simple on cherche une décomposition en ondelettes du bruit gaussien fractionnaire à partir de celle du bruit blanc. On remarque en effet que si $U : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire continu tel que $U(\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}) \subset \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$, on peut définir un nouveau processus généralisé noté $UZ$ par $< UZ, \varphi >=< Z, U(\varphi) >$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Alors $\Gamma_{UZ}(\varphi,\psi) =< \gamma_Z, U(\varphi) * \overline{\check{U(\psi)}} >= \frac{1}{2\pi^2} < 1, \widehat{U(\varphi)}\overline{\widehat{U(\psi)}} >$ car $\gamma_Z \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$.
On cherche donc U tel que $\int_{\mathbb{R}} \widehat{U(\varphi)}(\xi)\overline{\widehat{U(\psi)}(\xi)}d\xi = \int_R 2\pi C_H|\xi|^{1-2H}\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)d\xi$,
de sorte que $\Gamma_{UZ}(\varphi,\psi) = \Gamma_{Z_H}(\varphi,\psi)$.
Il faut alors encore vérifié que $UZ$ est un processus généralisé gaussien centré stationnaire.
Comme $Z$ est gaussien centré, $UZ$ l'est aussi.
Enfin, si pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\widehat{U(\tau_t\varphi)}\overline{\widehat{U(\tau_t\psi)}} = \widehat{U(\varphi)}\overline{\widehat{U(\psi)}}$, $UZ$ sera stationnaire.

Pour déterminer $U$, on remarque que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{D(\varphi)}(\xi)\overline{\widehat{D(\psi)}(\xi)} = |\xi|^2\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}, \ \ et \ \ \widehat{D(\tau_t\varphi)}(\xi)\overline{\widehat{D(\tau_t\psi)}(\xi)} = \widehat{D(\varphi)}(\xi)\overline{\widehat{D(\psi)}(\xi)}.$$

si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $D$ l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ;

$$\widehat{D^{-1}(\varphi)}(\xi)\overline{\widehat{D^{-1}(\psi)}(\xi)} = |\xi|^{-2}\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}, \ \ et \ \ \widehat{D^{-1}(\tau_t\varphi)}(\xi)\overline{\widehat{D^{-1}(\tau_t\psi)}(\xi)} = \widehat{D^{-1}(\varphi)}(\xi)\overline{\widehat{D^{-1}(\psi)}(\xi)}.$$

si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ avec $D^{-1}$ l'opérateur d'intégration défini sur $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ par
$D^{-1}(\varphi) : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On cherchera enfin une décomposition du mouvement Brownien Fractionnaire en "intégrant" le bruit gaussien Fractionnaire.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires qui vont nous permettre d'obtenir le bruit gaussien Fractionnaire à partir du bruit blanc gaussien.

# Chapitre 2

# Les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Motivation

Soit $H \in ]0,1[$ on pose $d = \frac{1}{2} - H \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ on voudrait trouver un opérateur $U$ : $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ linéaire continu tel que $U(\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}) \subset \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$, et, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{U(\varphi)}(\xi)\overline{\widehat{U(\psi)}(\xi)}d\xi = \int_R |\xi|^{2d}\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)d\xi. \tag{2.1}$$

Si on pose $\widehat{U(\varphi)}(\xi) := (i\xi)^d\widehat{\varphi}(\xi) = |\xi|^d e^{id\frac{\pi}{2}sgn(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi)$, $U$ vérifie (2.1) mais on introduit une singularité en zéro qui nous oblige à restreindre l'opérateur à $\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$.

### 2.1.2 Lien avec l'intégration et la dérivation

On a déjà vu le lien qu'il existait entre la dérivation (respectivement l'intégration) et la multiplication de la transformée de Fourier par $(i\xi)$ (respectivement par $(i\xi)^{-1}$).
On note D l'opérateur de dérivation défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $I$ l'opérateur identité et $\tau_h$ l'opérateur de translation par $h$ pour $h \in \mathbb{R}$.

En remarquant que

$$D \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \lim_{h\to 0}(\frac{I-\tau_h}{h})$$

on cherche à définir pour $d \geq 0$ (respectivement $d \leq 0$) un opérateur de dérivation (respectivement d'intégration) fractionnaire par

$$\text{"}\ D^d \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \lim_{h\searrow 0}(\frac{I-\tau_h}{h})^d\ \text{"}.$$

Pour cela il est nécessaire de donner un sens à $(I-\tau_h)^d$.
Or, pour $0 \leq r < 1$, $d \in \mathbb{R}$, $(I - r\tau_h)^d$ a un sens donné par :

$$(I - r\tau_h)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{(d)} r^k \tau_h^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{(d)} r^k \tau_{hk}$$

où $\gamma_k^{(d)} = O_{k\to\infty}(k^{-1-d})$ ( dans la suite on écrira $|\gamma_k^{(d)}| \leq C_d(1+|k|)^{-d-1}$ ).

On voudrait définir $(I-\tau_h)^d$ par $(I-\tau_h)^d = \lim_{r\nearrow 1}(I-r\tau_h)^d$.
Nous allons donc voir dans la suite pour quelle topologie cette limite existe et quelles sont ses propriétés avant de faire tendre à son tour $h$ vers 0. Dans ce but nous allons tout d'abord étudier plus en détail l'opérateur "$D_{r,h}^d := (\frac{I-r\tau_h}{h})^d$".

## 2.2 Les opérateurs $D_{r,h}^d$, $d \in \mathbb{R}$, $r$, $h \in ]0,1[$

**Définition 2.2.0.1.** *Soit $d \in \mathbb{R}$, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ on pose $z^d = |z|^d e^{idArg(z)} = e^{dLog(z)}$, où $Arg(z) \in ]-\pi,\pi]$ désigne l'argument principal de $z$ et Log est la fonction logarithme principal holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.*
*On définit alors, pour $z \in \mathbb{C} \setminus [1,+\infty[$ $F_d(z) = (1-z)^d$, $F_d$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [1,+\infty[$.*

**Lemme 2.2.0.1.** *Pour $|z| < 1$*

$$F_d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{(d)} z^k.$$

*Si $d \geq 0$, $F_d$ se prolonge par continuité à $\mathbb{C} \setminus ]1,+\infty[$ en posant $F_d(1) = 0$ .*

**Définition 2.2.0.2.** *Soit $d \in \mathbb{R}$, $r, h \in ]0,1[$, $K \in \mathbb{N}$, on pose*

$$\begin{array}{rccc} D_{K,r,h}^d : & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ & \varphi & \mapsto & h^{-d}(\sum_{k=0}^{K} \gamma_k^{(d)} r^k \tau_{hk}\varphi) \end{array}$$

**Proposition 2.2.0.1.** *Pour tout $K \in \mathbb{N}$ $D_{K,r,h}^d : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire continu, et la suite $(D_{K,r,h}^d)_{K\in\mathbb{N}}$ converge quand $K$ tend vers $+\infty$ vers un opérateur linéaire continu.*
*On note $D_{r,h}^d : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sa limite, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*

$$\widehat{D_{r,h}^d(\varphi)} = (\frac{1-re^{-ih\xi}}{h})^d \widehat{\varphi}.$$

**preuve** Pour $K \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Phi_K = D_{K,r,h}^d(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Soit $K, L \in \mathbb{N}$, $L < K$, $N \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |(1+|t|)^N(\Phi_K^{(j)}(t) - \Phi_L^{(j)}(t))| &\leq (1+|t|)^N \sum_{k=L+1}^{K} |\gamma_k^{(d)}| r^k |\varphi^{(j)}(t-hk)| \\ &\leq \pi_{N,j}(\varphi) \sum_{k=L+1}^{K} |\gamma_k^{(d)}| (1+|kh|)^N r^k \end{aligned}$$

Ainsi, $\pi_{N,j}(\Phi_K - \Phi_L) \leq \pi_{N,j}(\varphi) \sum_{k=L+1}^{K} |\gamma_k^{(d)}| (1+|kh|)^N r^k$.
Comme $|\gamma_k^{(d)}| \leq C_d(1+|k|)^{-d-1}$ et $0 < r < 1$, $\sum \gamma_k^{(d)} |(1+|kh|)^N r^k$ converge pour tout $n, j \in \mathbb{N}$ et $(\Phi_K)_{K\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k^{(d)} r^k \tau_{hk}\varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On pose $D^d_{r,h}: \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & h^{-d}(\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k^{(d)} r^k \tau_{hk}\varphi) \end{array}$.

$D^d_{r,h}$ est opérateur linéaire continu, de plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi) &= \lim_{K\to+\infty} \widehat{D^d_{K,r,h}(\varphi)}(\xi) \text{ par continuité de la transformée de Fourier} \\ &= h^{-d} \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} \gamma_k^{(d)} (re^{-ih\xi})^k \widehat{\varphi}(\xi) \\ &= h^{-d} F_d(re^{-ih\xi})\widehat{\varphi}(\xi) = (\frac{1-re^{-ih\xi}}{h})^d \widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

**Corollaire 2.2.0.1.** *Par transposition on définit $D^d_{r,h} : \mathcal{S}(\mathbb{R})' \to \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ linéaire continu par pour tout $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*

$$< D^d_{r,h}(T), \varphi >=< T, \check{D^d_{r,h}}(\check{\varphi}) > .$$

## 2.3 Les opérateurs de dérivation fractionnaire, $d \geq 0$.

### 2.3.1 Convergence

**Proposition 2.3.1.1.** *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $d \geq 0$, $D^d_{r,h}(\varphi)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ quand $r$ tend en croissant vers 1 et $h$ tend en décroissant vers 0. $D^d(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ est bien défini comme sa limite. De plus, $\widehat{D^d(\varphi)}(\xi) = (i\xi)^d\hat{\varphi}(\xi)$ avec $(i0)^d = \lim_{\xi\to 0}(i\xi)^d = 0$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, donc $\widehat{D^d(\varphi)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et, $D^d \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$D^d(\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (i\xi)^d \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi t} dt.$$

*Enfin, $D^d : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ est linéaire continu et obtenu comme double limite de suites d'opérateurs linéaires continus.*

**preuve** Soit $r, h \in ]0,1[$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$< D^d_{r,h}(\varphi), \psi >= \frac{1}{2\pi} < \widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}, \check{\hat{\psi}} >= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi)\check{\hat{\psi}}(\xi)d\xi$.
Soit $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi) = h^{-d}F_d(re^{-ih\xi})\widehat{\varphi}(\xi)$,

$$\lim_{r\nearrow 1} \widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi) = h^{-d}F_d(e^{-ih\xi})\widehat{\varphi}(\xi) := \widehat{D^d_h(\varphi)}(\xi).$$

$|\widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi)| \leq \frac{2}{h}^d |\widehat{\varphi}(\xi)|$, donc $\lim_{r\nearrow 1} \widehat{D^d_{r,h}(\varphi)} = \widehat{D^d_h(\varphi)}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ par convergence dominée,

et pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$| < D^d_h(\varphi), \psi > | \leq 2\pi_{2+E(d)}(\varphi)\pi_1(\psi).$$

De plus $\lim_{h\searrow 0} \frac{1-e^{-ih\xi}}{h} = i\xi$, par continuité de $z \mapsto z^d$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_*$
$\lim_{h\searrow 0} h^{-d}F_d(e^{-ih\xi}) = (\frac{1-e^{-ih\xi}}{h})^d = (i\xi)^d$.
Finallement, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h\searrow 0} \widehat{D^d_h(\varphi)}(\xi) = (i\xi)^d\widehat{\varphi}(\xi) := \widehat{D^d(\varphi)}(\xi).$$

Si $h\xi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $(\frac{1-e^{-ih\xi}}{h})^d = (\frac{1-e^{-ih\xi}}{ih\xi})^d (i\xi)^d$, donc $|(\frac{1-e^{-ih\xi}}{h})^d| \leq |\xi|^d$.
Sinon $|(\frac{1-e^{-ih\xi}}{h})^d| = 0 \leq |\xi|^d$.
Ainsi $|\widehat{D_h^d(\varphi)}(\xi)| \leq |\xi|^d |\widehat{\varphi}(\xi)|$ et $\widehat{D_h^d(\varphi)}$ converge vers $\widehat{D^d(\varphi)}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ quand $h$ décroit vers 0 par convergence dominée et pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$| < D^d(\varphi), \psi > | \leq 2\pi_{2+E(d)}(\varphi)\pi_1(\psi).$$

Enfin, $\widehat{D^d(\varphi)}(\xi) = (i\xi)^d \widehat{\varphi}(\xi)$ donc $\widehat{D^d(\varphi)} \in \mathcal{C}_{-2}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $D^d(\varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$D^d(\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \check{\widehat{\widehat{D^d(\varphi)}}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^d \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\xi t} dt.$$

**Remarque 2.3.1.1.** *On retrouve ici la singularité en 0 qui provient du passage à la limite sur $r$. De plus $\widehat{D_h^d(\varphi)}$ a des singularités en chaque point de la forme $\frac{2k\pi}{h}, k \in \mathbb{Z}$ ce qui nous interdit d'espérer une convergence dans $\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$.*

**Remarque 2.3.1.2.** *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\widehat{D^d(\varphi')}(\xi) = (i\xi)^d \widehat{\varphi'}(\xi) = (i\xi)^{d+1}\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{D^{d+1}(\varphi)}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Donc $D^d(\varphi') = D^{d+1}(\varphi)$ et même,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^d(\varphi^{(n)}) = D^{d+n}(\varphi).$$

*Ceci explique le nom de dérivée fractionnaire.*

### 2.3.2 Les opérateurs de dérivation fractionnaire sur $\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$

**Proposition 2.3.2.1.** *$D^d : \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire continu.*
*De plus pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$< D^d(\varphi), \psi >= \lim_{h \to 0} \lim_{r \to 1} < D_{r,h}^d(\varphi), \psi >=< \varphi, \check{D^d}(\check{\psi}) > . \tag{2.2}$$

**preuve** Soit $\varphi \in \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$, $N, j \in \mathbb{N}$
$\pi_{N,j}(D^d\varphi) \leq \frac{1}{2\pi} C_{N,j} \pi_{2+j,N}((i\xi)^d \widehat{\varphi})$.
Par la formule de leibnitz pour tout $l \leq N$

$$((i\xi)^d \widehat{\varphi})^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} C_k^l ((i\xi)^d)^{(k)} \widehat{\varphi}^{(l-k)}.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$, d'après l'inégalité de Taylor Lagrange, pour tout $|\xi| \leq 1$

$$|\widehat{\varphi}^{(l-k)}(\xi)| \leq \pi_{0,2N}(\widehat{\varphi}) \frac{|\xi|^N}{N!}.$$

On en déduit que $\pi_{2+j,N}((i\xi)^d \widehat{\varphi}) \leq C'_{N,j,d} \pi_{3+j+E(d),2N}(\widehat{\varphi})$, puis,
$\pi_{N,j}(D^d\varphi) \leq \pi_{2(N+1),3+j+E(d)}(\varphi)$ donc $D^d : \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est continu.
Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, par construction,

$$< D^d(\varphi), \psi >= \lim_{h \to 0} \lim_{r \to 1} < D_{r,h}^d(\varphi), \psi >=< \varphi, \check{D^d}(\check{\psi}) >$$

et

$$| < D^d(\varphi), \psi > | \leq C_d \pi_{2,3+E(d)}(\varphi)\pi_2(\psi).$$

La formule (2.2) va nous permettre de définir $D^d$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$, mais alors

$$D^d \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{\neq} \lim_{h\to 0}\lim_{r\to 1} D^d_{r,h}.$$

### 2.3.3 Les opérateurs de dérivation fractionnaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$

**Définition 2.3.3.1.** *On définit l'opérateur de dérivation fractionnaire $D^d : \mathcal{S}(\mathbb{R})' \to \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})'$ par,*

$$< D^d T, \varphi > = < T, D^{\check{d}}(\check{\varphi}) >$$

*pour tout $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et $\varphi \in \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$.*

**Proposition 2.3.3.1.** *$D^d : \mathcal{S}(\mathbb{R})' \to \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})'$ est un opérateur linéaire continu.*

**Remarque 2.3.3.1.** *$D^d$ étant définit sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sous certaines conditions portant sur $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ on peut prolonger $D^d(T)$ en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. C'est le cas par exemple si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou si $T \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.*

## 2.4 Les opérateurs d'intégration fractionnaire, $d \leq 0$.

Nous allons nous limiter dans cette étude à la définition de $D^d$ pour $-\frac{1}{2} < d \leq 0$.
**Rappel :** soit $-\frac{1}{2} < d \leq 0$, $r \in ]0,1[$, $h \in ]0,1[$, $D^d_{r,h} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ linéaire continu, de plus, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi) = (\frac{1 - re^{-ih\xi}}{h})^d \widehat{\varphi}(\xi).$$

### 2.4.1 Convergence

**Etude lorsque $r$ tend vers 1**

**Proposition 2.4.1.1.** *$(D^d_{r,h})_{0<r<1}$ converge simplement quand $r$ tend en croissant vers 1 vers $D^d_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ linéaire tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\widehat{D^d_h(\varphi)}(\xi) = (\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d \widehat{\varphi}(\xi).$$

**preuve**
Soit $\xi \in \mathbb{R}$, si $\xi \neq \frac{2k\pi}{h}, k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{r\nearrow 1}(\frac{1 - re^{-ih\xi}}{h})^d = (\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d,$$

donc pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{r\nearrow 1} \widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi) = (\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d \widehat{\varphi}(\xi) := \widehat{D^d_h(\varphi)}(\xi).$$

$$|\widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi)| \leq |(\frac{1-re^{-ih\xi}}{h})^d|\widehat{\varphi}(\xi)|,$$

et $|(\frac{1-re^{-ih\xi}}{h})^d| \leq 2^{-d}|\frac{1-e^{-ih\xi}}{h}|^d$ car $|\frac{1-e^{-ih\xi}}{1-re^{-ih\xi}}| \leq 1+(1-r)|\frac{1}{1-re^{-ih\xi}}| \leq 2.$

Ainsi, pour tout $r \in ]0,1[$ $|\widehat{D^d_{r,h}(\varphi)}(\xi)| \leq 2^{-d}|\frac{1-e^{-ih\xi}}{h}|^d\widehat{\varphi}(\xi)|$.

Comme $-\frac{1}{2} < d \leq 0$, $\xi \mapsto |\frac{1-e^{-ih\xi}}{h}|^d|\widehat{\varphi}(\xi)||\psi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$ si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ; par le théorème de convergence dominée, $(D^d_{r,h})_{0<r<1}$ converge simplement dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ quand r tend en croissant vers 1 vers $D^d_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ avec $\widehat{D^d_h(\varphi)}(\xi) = (\frac{1-e^{-ih\xi}}{h})^d\widehat{\varphi}(\xi)$ presque partout.

**Proposition 2.4.1.2.** *Pour $-\frac{1}{2} < d < 0$, $h \in ]0, \frac{1}{4}[$,*
*$D^d_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ est un opérateur linéaire continu.*

**Lemme 2.4.1.1.** $\forall j \in \mathbb{Z}$ $j\pi \leq u \leq (j+1)\pi \Rightarrow |1-e^{-iu}| \geq \frac{2}{\pi}|u-j\pi|$

**Lemme 2.4.1.2.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $-\frac{1}{2} < d < 0$, $h \in ]0, \frac{1}{4}[$, $k \in \mathbb{Z}$,*
*pour tout $N > 0$*

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\frac{1-e^{-ih\xi}}{h}|^{2d} |\varphi(\xi)|^2 d\xi \leq C_{N,d}\pi^2_N(\varphi)(1+2|k|\pi)^{-2N}$$

*avec*

$$C_{N,d} = \frac{2}{2d+1}(2\pi)^{2d+1}(\frac{2}{\pi})^d(1+2\pi)^{2N}.$$

**preuve** On pose $I_k(\varphi,h,d) = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\frac{1-e^{-ih\xi}}{h}|^{2d}|\varphi(\xi)|^2 d\xi \geq 0$.
$I_k(\varphi,h,d) \overset{CDV}{=} \int_0^{2\pi} |\frac{1-e^{-ih(\xi+2k\pi)}}{h}|^{2d}|\varphi(\xi+2k\pi)|^2 d\xi$.
Soit $j = E(2h(k+1)) \in \mathbb{Z}$, $j \leq 2h(k+1) < j+1$.

Si $j \leq 2hk$, pour tout $\xi \in [0,2\pi]$, $h(\xi+2k\pi) \in [j\pi,(j+1)\pi]$, et,
$|1-e^{-ih(\xi+2k\pi)}| \geq \frac{2}{\pi}|h(\xi+2k\pi)-j\pi|$ d'après le lemme 2.4.1.1.
Or $|h(\xi+2k\pi)-j\pi| = h\xi+(2hk-j)\pi \geq h\xi = |h\xi| \Rightarrow |1-e^{-ih(\xi+2k\pi)}| \geq \frac{2}{\pi}|h\xi|$.
Alors,

$$\begin{aligned}
I_k(\varphi,h,d) &\leq \int_0^{2\pi} (\frac{2}{\pi})^{2d}|\xi|^{2d}|\varphi(\xi+2k\pi)|^2 d\xi \\
&\leq (\frac{2}{\pi})^{2d}\int_0^{2\pi} |\xi|^{2d}(1+|\xi+2k\pi|)^{-2N}\pi^2_N(\varphi)d\xi \\
&\leq (\frac{2}{\pi})^{2d}\pi^2_N(\varphi)\int_0^{2\pi} |\xi|^{2d}(1+|\xi+2k\pi|)^{-2N}d\xi \\
&\leq (\frac{2}{\pi})^{2d}\pi^2_N(\varphi)\int_0^{2\pi} |\xi|^{2d}(1+2\pi)^{2N}(1+2|k|\pi)^{-2N}d\xi \\
&= (\frac{2}{\pi})^{2d}\pi^2_N(\varphi)(1+2\pi)^{2N}\frac{1}{2d+1}(2\pi)^{2d+1}(1+2|k|\pi)^{-2N} \\
&\leq C_{N,d}\pi^2_N(\varphi)(1+2|k|\pi)^{-2N}
\end{aligned}$$

Si $j \geq 2hk$, pour tout $\xi \in [0,2\pi]$, $h(\xi+2k\pi) \in [(j-1)\pi,(j+1)\pi]$, et,
$h(\xi+2k\pi) \in [j\pi,(j+1)\pi] \Rightarrow |1-e^{-ih(\xi+2k\pi)}| \geq \frac{2}{\pi}|h\xi|$, de même que précédent, et

$h(\xi+2k\pi)\in[(j-1)\pi,j\pi]\Rightarrow|1-e^{-ih(\xi+2k\pi)}|\geq\frac{2}{\pi}|h(\xi+2k\pi)-(j-1)\pi|$ d'après le lemme 2.4.1.1.
$|h(\xi+2k\pi)-(j-1)\pi|=h(\xi+2k\pi)-(j-1)\pi=h\xi+(2hk-(j-1))\pi\geq h\xi+(1-2h)\pi$ car $j\leq 2h(k+1)$.
$0\leq h\leq\frac{1}{4}$ donc $2h\leq 1-2h$ et ainsi,

$$\begin{aligned}
h(2\pi-\xi) &= 2h(\pi-\xi)+h\xi\\
&\leq 2h\pi+h\xi\\
&\leq (1-2h)\pi+h\xi\\
&\leq |h(\xi+2k\pi)-(j-1)\pi|
\end{aligned}$$

Finallement, $h(\xi+2k\pi)\in[(j-1)\pi,j\pi]\Rightarrow|1-e^{-ih(\xi+2k\pi)}|\geq\frac{2}{\pi}|h(2\pi-\xi)|$ et, pour tout $\xi\in[0,2\pi]$ $|1-e^{-ih(\xi+2k\pi)}|\geq\frac{2}{\pi}h\min(\xi,2\pi-\xi)$ Alors,

$$\begin{aligned}
I_k(\varphi,h,s,d) &\leq \int_0^{2\pi}(\frac{2}{\pi})^{2d}\min(|\xi|^{2d},|2\pi-\xi|^{2d})|\varphi(\xi+2k\pi)|^2d\xi\\
&\leq (\frac{2}{\pi})^{2d}\pi_N^2(\varphi)(1+2\pi)^{2N}(1+2|k|\pi)^{-2N}\int_0^{2\pi}\min(|\xi|^{2d},|2\pi-\xi|^{2d})d\xi\\
&= (\frac{2}{\pi})^{2d}\pi_N^2(\varphi)(1+2\pi)^{2N}\frac{2}{2d+1}(\pi)^{2d+1}(1+2|k|\pi)^{-2N}\\
&\leq C_{N,d}\pi_N^2(\varphi)(1+2|k|\pi)^{-2N}
\end{aligned}$$

**preuve de la proposition 2.4.1.2**
Soit $-\frac{1}{2}<d<0$, $h\in]0,\frac{1}{4}[$, $s\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
<D_h^d(\varphi),\psi> &= \frac{1}{2\pi}<\widehat{D_h^d(\varphi)},\check{\widehat{\psi}}>=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(\frac{1-e^{-ih\xi}}{h})^d\widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}(\frac{1-e^{-ih\xi}}{h})^d\widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
|<D_h^d(\varphi),\psi>| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|\varphi\|_2(I_k(\widehat{\check{\psi}},h,d))^{1/2}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{C_{2,d}}\|\varphi\|_2\pi_2(\widehat{\check{\psi}})\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+2|k|\pi)^{-2}\\
&\leq C'_d\pi_1(\varphi)\pi_2(\widehat{\check{\psi}})
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition.

**Etude lorsque $h$ tend vers 0**

**Proposition 2.4.1.3.** *$(D_h^d)_{0<h<\frac{1}{4}}$ converge simplement quand $h$ tend en décroissant vers 0 vers $D^d:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ linéaire tel que pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour presque tout $\xi\in\mathbb{R}$*

$$\widehat{D^d(\varphi)}(\xi)=(i\xi)^d\widehat{\varphi}(\xi).$$

**preuve** Soit $-\frac{1}{2} < d < 0$, $h \in ]0, \frac{1}{4}[$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
on pose $T_d(\varphi) : \xi \mapsto (i\xi)^d \widehat{\varphi}(\xi)$ si $\xi \neq 0$, $T_d(\varphi)(0) := 0$, $T_d(\varphi) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

$$\lim_{u \to 0} (\frac{1 - e^{-iu}}{iu})^d = 1;$$

soit $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $|u| \leq \alpha$

$$|(1 - e^{-iu})^d - (iu)^d| \leq \epsilon |u|^d.$$

Soit donc $K \in \mathbb{N}$ tel que $2K\pi \leq \frac{\alpha}{h}$, et $N > 1$,

$$\begin{aligned} | < \widehat{D_h^d(\varphi)} - T_d(\varphi), \psi > | &= | \int_{\mathbb{R}} [(\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d - (i\xi)^d] \widehat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) d\xi | \\ &\leq \int_{|\xi| \leq \frac{\alpha}{h}} |(\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d - (i\xi)^d| |\widehat{\varphi}(\xi)| |\psi(\xi)| d\xi \\ &+ \int_{|\xi| \geq \frac{\alpha}{h}} |(\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d - (i\xi)^d| |\widehat{\varphi}(\xi) \psi(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq \frac{\alpha}{h}} |(\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d - (i\xi)^d| |\widehat{\varphi}(\xi)| |\psi(\xi)| d\xi &\leq \sqrt{2\pi} \epsilon (\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2d} |\psi(\xi)|^2 d\xi)^{1/2} \|\varphi\|_2 \\ &\leq \sqrt{4\pi} \epsilon \pi_1(\psi) \pi_1(\varphi) (\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2d} (1 + |\xi|)^{-2} d\xi) \\ &\leq \epsilon 2 \sqrt{\frac{2\pi(d+1)}{2d+1}} \pi_1(\varphi) \pi_1(\psi). \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \geq \frac{\alpha}{h}} |(\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d - (i\xi)^d| |\widehat{\varphi}(\xi) \psi(\xi)| d\xi &\leq \int_{|\xi| \geq 2K\pi} |(\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})^d - (i\xi)^d| |\widehat{\varphi}(\xi) \psi(\xi)| d\xi \\ &\leq \sum_{|k| \geq K} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (|\frac{1 - e^{-ih\xi}}{h})|^d + |\xi|^d) |\widehat{\varphi}(\xi) \psi(\xi)| d\xi \\ &\leq 2\sqrt{2\pi} \pi_1(\varphi) \sum_{|k| \geq K} (I_k(\psi, h, s, d) + \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\xi|^{2d} \psi(\xi)| d\xi)^{1/2} \\ &\leq 4\sqrt{\pi C_{N,d}} \pi_1(\varphi) \pi_N(\psi) \sum_{|k| \geq K} (1 + 2|k|\pi)^{-N}. \end{aligned}$$

$-N < -1$ donc il existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $K \geq K_0$

$$\sum_{|k| \geq K} (1 + 2|k|\pi)^{-N} \leq \epsilon.$$

Pour tout $0 < h \leq \frac{\alpha}{2\pi(K_0+1)}$,

$$| < \widehat{D_h^d(\varphi)} - T_d(\varphi), \psi > | \leq \epsilon C'_{N,d} \pi_1(\varphi) \pi_N(\psi)$$

et $(\widehat{D_h^d\varphi})_{0<h<\frac{1}{4}}$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ quand h tend en décroissant vers 0 vers $T_d(\varphi)$.
Ainsi, $(D_h^d(\varphi))_{0<h<\frac{1}{4}}$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ quand h tend en décroissant vers 0 vers $\frac{1}{2\pi}\widehat{T_d(\check{\varphi})} := D^d(\varphi)$.

### 2.4.2 Les opérateurs d'intégration fractionnaire sur $\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$

**Proposition 2.4.2.1.** *$D^d : \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire continu.*
*De plus pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} < D^d(\varphi), \psi > &= \lim_{h\to 0}\lim_{r\to 1} < D^d_{r,h}(\varphi), \psi > = < \varphi, D^{\check{d}}(\check{\psi}) > \\ \text{et } \widehat{D^d(\varphi)} &= (i\xi)^d\widehat{\varphi}. \end{aligned}$$

**Définition 2.4.2.1.** *On définit l'opérateur d'intégration fractionnaire $D^d : \mathcal{S}(\mathbb{R})' \to \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})'$ par transposition :*

$$< D^d(T), \varphi > = < T, D^{\check{d}}(\check{\varphi}) >$$

*pour tout $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et $\varphi \in \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$.*

**Proposition 2.4.2.2.** *$D^d : \mathcal{S}(\mathbb{R})' \to \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})'$ est un opérateur linéaire continu. De plus pour tout $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ $\widehat{D^d(T)} = (i\xi)^d\widehat{T}$.*

## 2.5 Conclusion

**Théorème 2.5.0.1.** *Pour tout $d \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$,*

$$D^d : \mathcal{S}(\mathbb{R})' \to \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})',$$

*défini par $\widehat{D^dT} = (i\xi)^d\widehat{T}$ pour tout $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ est un opérateur linéaire continu.*
*De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$,*

$$< D^dT, \varphi > = < T, D^{\check{d}}(\check{\varphi}) >,$$

*avec $D^d(\varphi) = \lim_{h\to 0}\lim_{r\to 1} D^d_{r,h}(\varphi)$ presque partout et dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.*
*Enfin, $D^d : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ est linéaire et continu.*

**Remarque 2.5.0.1.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*
*1 ) Si $\varphi$ est à valeurs réelles $D^d\varphi$ est à valeurs réelles.*
*2 ) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tau_t D^d\varphi = D^d\tau_t\varphi$.*

En effet, comme $d > -\frac{1}{2}$, $\widehat{D^d\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ donc $D^d\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(i\xi)^d\widehat{\varphi}(\xi)e^{i\xi}x$.
Si $\varphi$ est à valeurs réelles, $\overline{D^d\varphi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-i\xi)^d\widehat{\varphi}(-\xi)e^{-i\xi x}d\xi = D^d\varphi(x)$.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\tau_t D^d\varphi}(\xi) = e^{-it\xi}(i\xi)^d\widehat{\varphi}(\xi) = (i\xi)^d\widehat{\tau_t\varphi}(\xi) = \widehat{D^d\tau_t\varphi}(\xi)$.

Nous allons à présent introduire la famille d'ondelettes qui servira à la décomposition du mouvement Brownien Fractionnaire.

# Chapitre 3

# Une base d'ondelettes

## 3.1 Fonctions de base

### 3.1.1 Les fonctions $\varphi$ et $\psi$

**Proposition 3.1.1.1.** *Il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
*1) $\widehat{\varphi}(\mathbb{R}) \subset [0,1]$*
*2) $\widehat{\varphi}(-\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$*
*3) $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$, $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq \frac{4\pi}{3}$, et $\widehat{\varphi}$ est décroissante sur $[0,+\infty]$*
*4) $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2j\pi)^2 = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.*

**exemple de construction** On pose $f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ si $|x| < 1$, $f(x) = 0$ sinon.
$f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $f$ paire, $supp(f) \subset [-1,1]$ et $\int_{\mathbb{R}} f = C > 0$.
On pose ensuite $g(x) = \frac{3}{2C} f(\frac{3}{\pi}x)$ de sorte que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $g$ paire, $supp(g) \subset [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ et $\int_{\mathbb{R}} g = \frac{\pi}{2}$.
Soit, à présent, la fonction $\theta$ définie par $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Alors $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \theta(x) = 0$ si $x \leq -\frac{\pi}{3}$, $\theta(x) = \frac{\pi}{2}$ si $x \geq \frac{\pi}{3}$, $\theta$ est croissante et $\theta(x) + \theta(-x) = \int_{\mathbb{R}} g = \frac{\pi}{2}$ par parité de $g$ .
Montrons que la fonction $\widehat{\varphi} : x \mapsto \sin\theta(x+\pi)\cos\theta(x-\pi)$ convient.

1) $\theta(\mathbb{R}) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\widehat{\varphi}(\mathbb{R}) \subset [0,1]$.

2) $\widehat{\varphi}(-x) = \sin\theta(-x+\pi)\cos\theta(-x-\pi)$ .
$\theta(-x-\pi) = \frac{\pi}{2} - \theta(x+\pi)$ donc $\cos\theta(-x-\pi) = \sin\theta(x+\pi)$.
$\theta(-x+\pi) = \frac{\pi}{2} - \theta(x-\pi)$ donc $\sin\theta(-x+\pi) = \cos\theta(x-\pi)$.
Ainsi $\widehat{\varphi}(-x) = \widehat{\varphi}(x)$

3)Si $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, $x - \pi \leq -\frac{\pi}{3}$ donc $\theta(x-\pi) = 0$ et $x + \pi \geq \frac{\pi}{3}$ donc $\theta(x+\pi) = \frac{\pi}{2}$, alors $\widehat{\varphi}(x) = 1$.
Si $x \geq \frac{4\pi}{3}$, $x - \pi \geq \frac{\pi}{3}$ donc $\theta(x-\pi) = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{\varphi}(x) = 0$.
Par parité $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$ et $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq \frac{4\pi}{3}$.
De plus pour $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$, $x + \pi \geq \frac{\pi}{3}$ donc $\theta(x+\pi) = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{\varphi}(x) = \cos\theta(x-\pi)$ .
Or $-\frac{\pi}{3} \leq x - \pi \leq \frac{\pi}{3}$ donc $x \mapsto \theta(x-\pi)$ est croissante sur $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Ainsi $x \mapsto \cos\theta(x-\pi)$ est décroissante sur $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.
Donc $\widehat{\varphi}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$.

4) $supp(\widehat{\varphi}) \subset [-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.
Soit $\xi \in \mathbb{R}$ il existe un unique $j_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\xi - 2j_0\pi \in [-\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$ et alors

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2j\pi)^2 = \widehat{\varphi}(\xi + 2j_0\pi)^2 + \widehat{\varphi}(\xi + 2(j_0+1)\pi)^2.$$

Or $\widehat{\varphi}(\xi + 2j_0\pi) = \sin\theta(\xi + 2j_0\pi + \pi)\cos\theta(\xi + 2j_0\pi - \pi)$,
$\xi + 2j_0\pi - \pi \leq -\frac{\pi}{3}$, donc $\theta(\xi + 2j_0\pi - \pi) = 0$ et $\widehat{\varphi}(\xi + 2j_0\pi) = \sin\theta(\xi + 2j_0\pi + \pi)$.
De plus, $\widehat{\varphi}(\xi + 2(j_0+1)\pi) = \sin\theta(\xi + 2j_0\pi + 3\pi)\cos\theta(\xi + 2j_0\pi + \pi)$,
$\xi + 2j_0\pi + 3\pi \geq \frac{\pi}{3}$, donc $\theta(\xi + 2j_0\pi + 3\pi) = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{\varphi}(\xi + 2j_0\pi) = \cos\theta(\xi + 2j_0\pi + \pi)$.
Ainsi

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2j\pi)^2 = \sin\theta(\xi + 2j_0\pi + \pi)^2 + \cos\theta(\xi + 2j_0\pi + \pi)^2 = 1.$$

Enfin, d'après ce qui précède $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ donc $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

**Définition 3.1.1.1.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une telle fonction on pose :*
*$\omega(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2)^2 - \widehat{\varphi}(\xi)^2$ pour $\xi \in \mathbb{R}$ qui est positive d'après 1) et 3), et,*
*$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\omega(\xi)^{1/2}$.*

**Proposition 3.1.1.2.** *$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\psi$ est une fonction à valeurs réelles telle que :*
*1)$\widehat{\psi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\widehat{\psi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$ ou $|\xi| \geq \frac{8\pi}{3}$*
*2)$\int_{\mathbb{R}} t^k\psi(t)dt = i^k\widehat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$*
*3)$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2j\pi)|^2 = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.*
**preuve**
1) $\omega$ est paire par parité de $\widehat{\varphi}$.
Si $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$, $|\xi/2| \leq \frac{2\pi}{3}$, et $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2) = 1$ donc $\omega(\xi) = 0$ et $\widehat{\psi}(\xi) = 0$.
De même, si $|\xi| \geq \frac{8\pi}{3}$, $|\xi/2| \geq \frac{4\pi}{3}$, et $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2) = 0$ donc $\widehat{\psi}(\xi) = 0$.
Si $\frac{2\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{4\pi}{3}$, $\widehat{\varphi}(\xi/2) = 1$ et $\widehat{\varphi}(\xi)^2 + \widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)^2 = 1$ donc $\omega(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)^2 = \widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)^2\widehat{\varphi}(\xi/2)^2$.
Si $\frac{4\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{8\pi}{3}$, $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ et $\widehat{\varphi}(\xi - 2\pi) = 1$ donc $\omega(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2)^2 = \widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)^2\widehat{\varphi}(\xi/2)^2$.
Ainsi pour tout $\xi \geq 0$

$$\omega^{1/2}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)\widehat{\varphi}(\xi/2).$$

Par parité, pour tout $\xi < 0$

$$\omega^{1/2}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi)\widehat{\varphi}(\xi/2).$$

Alors $\omega^{1/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi)e^{ix\xi}$ donc, $\overline{\psi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{\psi}}(\xi)e^{-ix\xi} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(-\xi)e^{-ix\xi} = \psi(x)$ et $\psi$ est une fonction à valeurs réelles.

2) $\int_{\mathbb{R}} t^k\psi(t)e^{-it\xi}dt = i^k\widehat{\psi}^{(k)}(\xi)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ ; comme $\widehat{\psi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$ $\int_{\mathbb{R}} t^k\psi(t)dt = 0$.

3) Soit $\xi \in [0, 2\pi]$,
Si $0 \leq \xi \leq \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \leq \xi + 2\pi \leq \frac{8\pi}{3}$ et $-\frac{8\pi}{3} \leq \xi - 2\pi \leq -\frac{4\pi}{3}$, donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = |\widehat{\psi}(\xi - 2\pi)|^2 + |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 + |\widehat{\psi}(\xi + 2\pi)|^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(\xi+2k\pi)|^2 &= |\widehat{\varphi}(\xi/2-\pi)|^2+|\widehat{\varphi}(\xi/2+\pi)|^2\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi/2-\pi+2k\pi)|^2=1\end{aligned}$$

Si $\frac{2\pi}{3}\leq\xi\leq\pi\leq\frac{4\pi}{3}$, $\xi+2\pi\geq\frac{8\pi}{3}$ et $-\frac{4\pi}{3}\leq\xi-2\pi\leq-\frac{2\pi}{3}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(\xi+2k\pi)|^2 &= |\widehat{\psi}(\xi-2\pi)|^2+|\widehat{\psi}(\xi)|^2\\ &= |\widehat{\varphi}(\xi)|^2+|\widehat{\varphi}(\xi-2\pi)|^2\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2=1\end{aligned}$$

Par parité et $2\pi$ périodicité on en déduit que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(\xi+2k\pi)|^2=1.$$

**Notations** On pose pour $k\in\mathbb{Z}$ et $j\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\varphi_k:&\quad x\mapsto\quad\varphi(x-k)\\ \psi_{j,k}:&\quad x\mapsto\quad 2^{j/2}\psi(2^jx-k).\end{aligned}$$

**Proposition 3.1.1.3.** *La famille $\{\varphi_k,\psi_{j,k},k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{N}\}$ est orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$.*
**peuve** Soit $k,k'\in\mathbb{Z}$, $j,j'\in\mathbb{N}$, $j\leq j'$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\varphi_k(x)\overline{\varphi_{k'}}(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2e^{-i(k-k')\xi}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2e^{-i(k-k')\xi}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(k-k')\xi}d\xi=\delta_{kk'}\end{aligned}$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}}\psi_{j,k}(x)\overline{\psi_{j',k'}}(x)dx=\frac{1}{2\pi}2^{-(j+j')/2}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)\overline{\widehat{\psi}(2^{-j'}\xi)}e^{-i(2^{-j}k-2^{-j'}k')\xi}d\xi.$$

Si $j'>j+1$, $supp(\partial_{2^{-j}}\widehat{\psi})\cap supp(\partial_{2^{-j'}}\widehat{\psi})=\varnothing$, et,

$$\int_{\mathbb{R}}\psi_{j,k}(x)\overline{\psi_{j',k'}}(x)dx=0.$$

Si $j'=j$

$$\int_{\mathbb{R}}\psi_{j,k}(x)\overline{\psi_{j',k'}}(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi}(\xi)|^2e^{-i(k-k')\xi}d\xi=\delta_{kk'}\quad\text{car}\quad\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(\xi+2k\pi)|^2=1.$$

Si $j' = j+1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x)\overline{\psi_{j',k'}}(x)dx &= 2^{1/2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(2\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}e^{-i(2k-k)\xi}d\xi \\ &= 2^{1/2}\frac{1}{2\pi}(\int_0^{2\pi} \widehat{\psi}(2\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}e^{-i(2k-k)\xi}d\xi + \int_0^{2\pi} \widehat{\psi}(2\xi-4\pi)\overline{\widehat{\psi}(\xi-2\pi)}e^{-i(2k-k)\xi}d\xi).\end{aligned}$$

Or, pour tout $\xi \in [0, 2\pi]$,

$$\widehat{\psi}(2\xi-4\pi)\overline{\widehat{\psi}(\xi-2\pi)} = -\widehat{\psi}(2\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x)\overline{\psi_{j',k'}}(x)dx = 0.$$

Enfin, pour des raisons de supports disjoints, si $j \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x)\overline{\psi_{j,k'}}(x)dx = \frac{1}{2\pi}2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)}e^{-i(k-2^{-j}k')\xi}d\xi = 0.$$

Et, $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x)\overline{\psi_{0,k'}}(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}e^{-i(k-k')\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}(\int_0^{2\pi} \widehat{\varphi}(\xi-2\pi)\overline{\widehat{\psi}(\xi-2\pi)}e^{-i(k-k')\xi}d\xi + \int_0^{2\pi} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}e^{-i(k-k')\xi}d\xi)\end{aligned}$$

Pour tout $\xi \in [0, 2\pi]$, $\widehat{\varphi}(\xi-2\pi)\overline{\widehat{\psi}(\xi-2\pi)} = -\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)} = -e^{-i\xi/2}\widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi-2\pi)$. Donc,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x)\overline{\psi_{0,k'}}(x)dx = 0.$$

### 3.1.2 Les fonctions $\varphi^d$ et $\psi^d$, $d \in \mathbb{R}$

**Définition 3.1.2.1.** *Soit $d \in \mathbb{R}$, rappelons que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $z^d = |z|^d e^{idArg(z)}$, où $Arg(z) \in [-\pi, \pi]$ désigne l'argument principal de $z$.*
*On définit alors, pour $z \in D(0, 2\pi)$, $a_d(z) = (\frac{1-e^{-iz}}{iz})^d$ .*

**Proposition 3.1.2.1.** *Soit $d \in \mathbb{R}$*
*1) $a_d$ est holomorphe sur $D(0, 2\pi)$ et ne s'y annule pas .*

*2) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles et telle que $\widehat{f}$ s'annule pour $|\xi| \geq 2\pi$, la fonction $f_{d,\Delta}$ définie par $\widehat{f}_{d,\Delta}(\xi) = (1/a_d(\xi))\widehat{f}(\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles.*
*De plus, pour $d > -\frac{1}{2}$,*

$$D^d f(t) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k^{(d)} f_{d,\Delta}(t-k).$$

*3) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles et telle que $\widehat{f}$ s'annule dans un voisinage 0 alors la fonction $f_d$ définie par $\widehat{f}_d(\xi) = (i\xi)^d\widehat{f}(\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles.*
*De plus, pour $d > -\frac{1}{2}$*

$$D^d f(t) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} f_d.$$

**preuve**
1) Soit $z \in D(0,2\pi)$, $\frac{1-e^{-iz}}{iz} = \int_0^1 e^{-itz}dt$.
On écrit $z = x+iy$, $x \in [-2\pi, 2\pi], y \in [-2\pi, 2\pi]$.
Si $x \in ]0, 2\pi[$, $Im(\frac{1-e^{-iz}}{iz}) \leq -e^{2\pi}\int_0^1 \sin(tx)dt$, donc $Im(\frac{1-e^{-iz}}{iz}) \leq -e^{2\pi}\frac{1-\cos(x)}{x} < 0$.
Si $x \in ]-2\pi, 0[$, $Im(\frac{1-e^{-iz}}{iz}) \geq -e^{-2\pi}\int_0^1 \sin(tx)dt$, donc $Im(\frac{1-e^{-iz}}{iz}) \geq -e^{2\pi}\frac{1-\cos(x)}{x} > 0$.
Si $x = 0$, $Re(\frac{1-e^{-iz}}{iz}) = \int_0^1 e^{ty}dt > 0$.
Ainsi pour tout $z \in D(0,2\pi)$, $\frac{1-e^{-iz}}{iz} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ donc $a_d$ est holomorphe sur $D(0,2\pi)$ et ne s'y annule pas .

2) $a_d$ est holomorphe sur $D(0,2\pi)$ et ne s'y annule pas, d'après 1),comme $\widehat{f}$ s'annule pour $|\xi| \geq 2\pi$, la fonction $\widehat{f_{d,\Delta}} = \frac{1}{a_d}\widehat{f} \in \mathcal{C}_{\mathcal{C}}^{\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $f_{d,\Delta} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
Soit $t \in \mathbb{R}$ $f_{d,\Delta}(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f_{d,\Delta}}}(-t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{(\frac{1}{a_d}\widehat{f})}(-t)$, et $\overline{f_{d,\Delta}}(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{(\frac{1}{\overline{a_d}}\overline{\widehat{f}})}(t)$.
Or, pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\overline{a_d}(\xi) = a_d(-\xi)$ et $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ car f est à valeurs réelles.
Donc $\overline{f_{d,\Delta}}(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f_{d,\Delta}}}(-t) = f_{d,\Delta}(t)$ et $f_{d,\Delta}$ est à valeurs réelles.
Enfin, pour $d > -\frac{1}{2}$, et $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{D^d f}(\xi) = (i\xi)^d\widehat{f}(\xi) = (i\xi)^d a_d(\xi)\widehat{f_{d,\Delta}}$.
-$Arg(i\xi) \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$.
-$Arg(\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si $\xi \in ]-2\pi, 2\pi[\setminus\{-\pi, \pi\}$.
Donc $(i\xi)^d a_d(\xi) = (i\xi\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi})^d = (1-e^{-i\xi})^d$ si $\xi \in ]-2\pi, 2\pi[\setminus\{-\pi, \pi\}$.
De plus $(i\pi)^d a_d(\pi) = \pi^d e^{id\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{\pi})^d e^{-id\frac{\pi}{2}} = 2^d = (1-e^{-i\pi})^d$ et,
$(-i\pi)^d a_d(-\pi) = \pi^d e^{-id\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{\pi})^d e^{id\frac{\pi}{2}} = 2^d = (1-e^{i\pi})^d$ .
Ainsi $(i\xi)^d a_d(\xi) = (1-e^{-i\xi})^d$ pour tout $\xi \in ]-2\pi, 2\pi[$ et, $\widehat{D^d f}(\xi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} (1-e^{-i\xi})^d\widehat{f_{d,\Delta}}$.

3) Comme $\widehat{f}$ s'annule dans un voisinage 0 la fonction $f_d$ définie par $\widehat{f_d}(\xi) = (i\xi)^d\widehat{f}(\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
Soit $t \in \mathbb{R}$, $f_d(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f_d}}(-t)$, et alors,
$\overline{f_d}(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\overline{\widehat{f_d}}}(t) = \frac{1}{2\pi}\overline{\widehat{(i\xi)^d\widehat{f}(\xi)}}(t)$.
$f$ est à valeurs réelles, donc $\overline{f_d}(t) = f_d(t)$ et $f_d$ est elle aussi à valeurs réelles.
Enfin, pour $d > -\frac{1}{2}$, et $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{D^d f}(\xi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} (i\xi)^d\widehat{f}(\xi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \widehat{f_d}(\xi)$,
c'est à dire $D^d f(t) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} f_d$.

**Définition 3.1.2.2.** *Soit $\varphi$ une fonction vérifiant les conditions de la proposition 3.1.1.1 p.18 et $\psi$ la fonction associée.*
*1) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles et $\widehat{\varphi}$ s'annule pour $|\xi| \geq 2\pi$ donc on pose pour $d \in \mathbb{R}$, $\varphi^d := \varphi_{d,\Delta}$. D'après la proposition 3.1.2.1 p.21, $\varphi^d$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, et, pour $d > -\frac{1}{2}$*

$$D^d\varphi(t) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k^{(d)}\varphi^d(t-k).$$

*2) $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles et $\widehat{\psi}$ s'annule dans un voisinage 0 donc, d'après la*

*proposition 3.1.2.1, pour $d \in \mathbb{R}$, $\psi^d := \psi_d$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, et, pour $d > -\frac{1}{2}$*

$$D^d\psi(t) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \psi^d.$$

**Remarque 3.1.2.1.** *On dispose ainsi d'une famille de fonctions pour $d \in \mathbb{R}$ vérifiant :*
*i) $\varphi^d$, $\widehat{\varphi^d}$, $\psi^d$ et $\widehat{\psi^d}$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
*ii) $\varphi^d$ et $\psi^d$ sont à valeurs réelles.*
*iii) $\widehat{\varphi^d}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq \frac{4\pi}{3}$ et $\widehat{\varphi^d}(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$.*
*iv) $\widehat{\psi^d}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq \frac{8\pi}{3}$ ou $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$.*
*v) $\varphi^0 = \varphi$ et $\psi^0 = \psi$*

**Remarque 3.1.2.2.** *Pour tout $d \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \varphi^{d-1}(x) &= \int_{x-1}^{x} \varphi^d(t)dt \\ \psi^{d-1}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \psi^d(t)dt. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \widehat{\int_{x-1}^{x} \varphi^d(t)dt}(\xi) &= (\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi})\widehat{\varphi^d}(\xi) = \widehat{\varphi^{d-1}}(\xi) \text{ si } \xi \neq 0, \widehat{\int_{x-1}^{x} \varphi^d(t)dt}(0) = 1 = \widehat{\varphi^{d-1}}(0), \\ \widehat{\int_{-\infty}^{x} \psi^d(t)dt}(\xi) &= (i\xi)^{-1}\widehat{\psi^d}(\xi) = \widehat{\psi^{d-1}}(\xi) \text{ si } \xi \neq 0, \widehat{\int_{-\infty}^{x} \psi^d(t)dt}(0) = 0 = \widehat{\psi^{d-1}}(0). \end{aligned}$$

## 3.2 Base de Riesz

### 3.2.1 Définition

**Définition 3.2.1.1.** *Soit $(\mathcal{H}, \|.\|)$ un espace de Hilbert et $\{e_l\}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{H}$, on dit que $\{e_l\}$ est une base de Riesz de $\mathcal{H}$ si :*
*i) l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{e_l\}$ est dense dans $\mathcal{H}$*
*ii) il existe 2 constantes $C_2 \geq C_1 > 0$ telle que pour toute famille de complexe $\{a_l\}$ de carré sommable*

$$C_1(\sum_l |a_l|^2)^{1/2} \leq \|\sum_l a_l e_l\| \leq C_2(\sum_l |a_l|^2)^{1/2}.$$

### 3.2.2 Caractérisation

**Proposition 3.2.2.1.** *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $V_0$ l'adhérence du sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par $\{\tau_k g, k \in \mathbb{Z}\}$.*
*On suppose qu'il existe deux constantes $C_2 \geq C_1 > 0$ telles que*

$$C_1 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq C_2.$$

*Alors $\{\tau_k g, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz pour $V_0$.*

**preuve** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, $K \in \mathbb{N}$,
on pose $m_K : \xi \mapsto \sum_{|k|\leq K} a_k e^{ik\xi}$

$$\begin{aligned}
\|\sum_{|k|\leq K} a_k\tau_k g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\widehat{\sum_{|k|\leq K} a_k\tau_k g}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
\|\sum_{|k|\leq K} a_k\tau_k g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|m_K\widehat{g}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi} |m_K(\xi)\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{0}^{2\pi} |m_K(\xi)\widehat{g}(\xi+2j\pi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $C_1 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(\xi+2k\pi)|^2 \leq C_2$ donc $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |m_K(\xi)\widehat{g}(\xi+2j\pi)|^2 d\xi = \int_0^{2\pi} |m_K(\xi)|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(\xi+2j\pi)|^2 d\xi$ et

$$C_1 2\pi \sum_{|k|\leq K} |a_k|^2 \leq \|\sum_{|k|\leq K} a_k\tau_k g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_2 2\pi \sum_{|k|\leq K} |a_k|^2.$$

Ainsi $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\tau_k g \in L^2(\mathbb{R})$ et en faisant tendre $K$ vers l'infini,

$$\sqrt{C_1 2\pi}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2)^{1/2} \leq \|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\tau_k g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{C_2 2\pi}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2)^{1/2}.$$

### 3.2.3 Application

**Théorème 3.2.3.1.** *Soit $d \in \mathbb{R}$, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ on pose*

$$\varphi^d_k : x \mapsto \varphi^d(x-k)$$
$$\psi^d_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\psi^d(2^j x - k).$$

*La famille $\{\varphi^d_k, \psi^d_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$.*

**Lemme 3.2.3.1.** *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites de $l^2(\mathbb{Z})$.Alors il existe une unique suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ telle que*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varphi^d_k(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\psi^d_{0,k}(t) \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2c_k\varphi^d_k(2t).$$

*De plus l'application induite est un isomorphisme de $l^2(\mathbb{Z}) \times l^2(\mathbb{Z})$ sur $l^2(\mathbb{Z})$.*

**preuve** Supposons qu'une telle suite existe, par isomorphisme de la transformée de Fourier

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}\widehat{\varphi^d}(\xi) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{-ik\xi}\widehat{\psi^d}(\xi) \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi/2}\widehat{\varphi^d}(\xi/2).$$

Les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ appartiennent à $l^2(\mathbb{Z})$ donc on peut définir les fonctions $A$, respectivement $B$ et $C$, $2\pi$ périodique qui sont dans
$L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f\ 2\pi$ périodique telle que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty\}$ par

$$A : \xi \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi} \quad \text{(de même pour } B \text{ et } C\text{)}.$$

L'égalité précédente s'écrit alors :

$$A(\xi)\widehat{\varphi^d}(\xi) + B(\xi)\widehat{\psi^d}(\xi) \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} C(\xi/2)\widehat{\varphi^d}(\xi/2).$$

$\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq \frac{4\pi}{3}$ on peut donc prolonger $\xi \mapsto \widehat{\varphi}(2\xi)$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ par $2\pi$ périodicité et on appelle $m_0$ la fonction obtenue. On définit alors la fonction $m_1$, continue, $2\pi$ périodique par $m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)} = e^{-i\xi}m_0(\xi+\pi)$.
Comme $m_{0/[-\pi,-\frac{2\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\pi]} = 0$, et $m_{1/[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]} = 0$

$$U_d : \xi \mapsto (\frac{1+e^{-i\xi}}{2})^{-d}m_0(\xi) \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$$

$$V_d : \xi \mapsto 2^d(1-e^{-i\xi})^d m_1(\xi) \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

De plus,

$$\begin{aligned} U_d(\xi)\widehat{\varphi^d}(\xi) &= U_d(\xi)(\frac{i\xi}{1-e^{-i\xi}})^d\widehat{\varphi}(\xi) \\ &= (\frac{2i\xi}{1-e^{-i2\xi}})^d\widehat{\varphi}(\xi)m_0(\xi) \\ &= \widehat{\varphi^d}(2\xi) \quad \text{si} \quad |\xi| \leq \pi. \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} V_d(\xi)\widehat{\varphi^d}(\xi) &= V_d(\xi)(\frac{i\xi}{1-e^{-i\xi}})^d\widehat{\varphi}(\xi) \\ &= (2i\xi)^d\widehat{\varphi}(\xi)m_1(\xi) \end{aligned}$$

Or, $m_1(\xi) = e^{-i\xi}m_0(\xi+\pi)$. Si $0 \leq \xi \leq \pi$, $m_0(\xi+\pi) = m_0(\xi-\pi) = \widehat{\varphi}(2\xi-2\pi)$ et $V_d(\xi)\widehat{\varphi^d}(\xi) = (2i\xi)^d e^{-i\xi}\omega^{1/2}(2\xi) = \widehat{\psi^d}(2\xi)$.
Si $-\pi \leq \xi \leq 0$, $m_0(\xi+\pi) = \widehat{\varphi}(2\xi+2\pi)$ et $V_d(\xi)\widehat{\varphi^d}(\xi) = (2i\xi)^d e^{-i\xi}\omega^{1/2}(2\xi) = \widehat{\psi^d}(2\xi)$.
Finallement, pour $|\xi| \leq \pi$

$$V_d(\xi)\widehat{\varphi^d}(\xi) = \widehat{\psi^d}(2\xi).$$

Alors

$$A(\xi)U_d(\xi/2)\widehat{\varphi^d}(\xi/2) + B(\xi)V_d(\xi/2)\widehat{\varphi^d}(\xi/2) \overset{L^2([-2\pi,2\pi])}{=} C(\xi/2)\widehat{\varphi^d}(\xi/2).$$

Ie

$$\widehat{\varphi^d}(\xi)(A(2\xi)U_d(\xi) + B(2\xi)V_d(\xi) - C(\xi)) \overset{L^2([-\pi,\pi])}{=} 0.$$

On sait déjà que $\widehat{\varphi^d}(\xi) \neq 0$ si$|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$, supposons qu'il existe $\xi_0 \in [-\pi, -\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3},\pi]$ tel que $\widehat{\varphi^d}(\xi_0) = 0$ alors $\widehat{\varphi}(\xi_0) = 0$ et par parité de $\widehat{\varphi}$ on peut supposer $\frac{2\pi}{3} < \xi_0 < \pi$. Mais alors $\widehat{\varphi}(\xi_0 - 2\pi) = 1 = \widehat{\varphi}(-\xi_0 + 2\pi)$ et $-\xi_0 + 2\pi > \xi_0 > 0$ contredit la décroissance de $\widehat{\varphi}$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi $\widehat{\varphi^d}(\xi) \neq 0$ pour tout $|\xi| \leq \pi$, et,

$$C(\xi) \overset{L^2([-\pi,\pi])}{=} A(2\xi)U_d(\xi) + B(2\xi)V_d(\xi).$$

Par $2\pi$ périodicité,

$$C(\xi) \overset{L^2_{2\pi}}{=} A(2\xi)U_d(\xi) + B(2\xi)V_d(\xi).$$

On utilise alors l'isomorphisme de $L^2_{2\pi}$ sur $l^2(\mathbb{Z})$ donné par la représentation en série de Fourier pour conclure à l'existence et à l'unicité de la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

**preuve du Théorème 3.2.3.1 p.24** On pose :

$$\begin{aligned} V_0^d &= \overline{Vect(\varphi_k^d, k\in\mathbb{Z})}^{L^2(\mathbb{R})} \\ V_j^d &= \overline{Vect(2^{j/2}\varphi^d(2^jx-k), k\in\mathbb{Z})}^{L^2(\mathbb{R})} \text{ pour } j\in\mathbb{N} \\ W_j^d &= \overline{Vect(\psi_{j,k}, k\in\mathbb{Z})}^{L^2(\mathbb{R})} \text{ pour } j\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

$\widehat{\varphi^d}(\xi) = (1/a_d(\xi))\widehat{\varphi}(\xi)$, $supp(\widehat{\varphi}) \subset [-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, $a_d$ est continue et ne s'annule pas sur $[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ donc il existe $C_2^d \geq C_1^d > 0$ telles que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$

$$C_1^d|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \leq |\widehat{\varphi^d}(\xi)|^2 \leq C_2^d|\widehat{\varphi}(\xi)|^2.$$

Ainsi pour tout $\xi\in\mathbb{R}$

$$C_1^d \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi^d}(\xi+2j\pi)|^2 \leq C_2^d.$$

D'après la Proposition 3.2.2.1 p.23, $\{\varphi_k^d, k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $V_0^d$ .
De même, $\widehat{\psi^d}(\xi) = (i\xi)^d\widehat{\psi}(\xi)$, $supp(\widehat{\psi}) \subset [-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$, donc pour tout $\xi\in\mathbb{R}$

$$C_1^d|\widehat{\psi}(\xi)|^2 \leq |\widehat{\psi^d}(\xi)|^2 \leq C_2^d|\widehat{\psi}(\xi)|^2,$$

avec $C_1^d = \min((\frac{2\pi}{3})^d, (\frac{8\pi}{3})^d)$ et $C_2^d = \max((\frac{2\pi}{3})^d, (\frac{8\pi}{3})^d)$ . Pour tout $\xi\in\mathbb{R}$,

$$C_1^d \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi^d}(\xi+2j\pi)|^2 \leq C_2^d.$$

et d'après la proposition 3.2.2.1 p.23, $\{\psi_{0,k}^d, k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $V_0^d$ .
Enfin, d'après le lemme 3.2.3.1 p.24 $V_0^d \oplus W_0^d = V_1^d$.

**Lemme 3.2.3.2.** *pour tout $j\in\mathbb{N}$*
*i)$\{2^{j/2}\varphi^d(2^jx-k), k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $V_j^d$.*
*ii)$\{\psi_{j,k}^d, k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $W_j^d$.*
*iii)$V_j^d \oplus W_j^d = V_{j+1}^d$.*
**preuve**
i)Soit $j\in\mathbb{N}$ , $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ et $K\in\mathbb{N}$
$\|\sum_{|k|\leq L} a_k 2^{j/2}\varphi^d(2^jx-k)\|_2^2 = \|\sum_{|k|\leq L} a_k\varphi_k^d\|_2^2$ après changement de variable. Comme $\{\varphi_k^d, k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $V_0^d$, $\{2^{j/2}\varphi^d(2^jx-k), k\in\mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $V_j^d$.
ii)La proposition 3.2.2.1 p.23 s'applique et par le même raisonnement qu'au i) on obtient le résultat.
iii)Un raisonnement par récurrence à l'aide du lemme 3.2.3.1 p.24 nous donne l'égalité.

On pose pour $j\in\mathbb{N}$

$$E_j = \{f\in L^2(\mathbb{R}); supp\widehat{f} \subset [-\frac{2\pi}{3}2^j, \frac{2\pi}{3}2^j]\}.$$

Alors $E_j \subset V_j^d \subset E_{j+1}$. En effet, si $f \in E_0$, comme $\widehat{\varphi^d}(\xi) \neq 0$ si $|\xi| < \pi$, $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi^d}^{-1}(\xi)$ se prolonge par $2\pi$ périodicité en une fonction de $L^2_{2\pi}$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier, alors $f \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varphi_k^d$ et $f \in V_0^d$. De même, si $f \in V_0^d$ il existe $A \in L^2_{2\pi}$ telle que $\widehat{f} \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} A\widehat{\varphi^d}$ ; $supp(\widehat{\varphi^d}) \subset [-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ donc $f \in E_1$.
Le cas $j \in \mathbb{N}$ s'en déduit.

$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ donc l'epace vectoriel engendré par les sommes finies d'éléments de $\{\varphi_k^d, \psi_{j,k}^d, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Il nous reste à montrer la deuxième partie de la définition 3.2.1.1 p.23. On sait déjà que $\{\varphi_k^d, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $V_0^d$ d'après le lemme 3.2.3.2 donc il suffit de vérifier que $\{\psi_{j,k}^d, j \in \mathbb{N} k \in \mathbb{Z}\}$ vérifie ii) dans la définition.

Soit $(a_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$, $J \in \mathbb{N}$ et $K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\| \sum_{0\leq j\leq J} \sum_{|k|\leq K} a_{j,k}\psi_{j,k}^d \|_2^2 &= \sum_{0\leq j\leq J} \sum_{0\leq j'\leq J} \sum_{|k|\leq K} \sum_{|k'|\leq K} a_{j,k}\overline{a_{j',k'}} \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}^d(x)\overline{\psi_{j',k'}^d}(x)dx \\
&\leq \sum_{0\leq j\leq J} \sum_{0\leq j'\leq J} \sum_{|k|\leq K} \sum_{|k'|\leq K} |a_{j,k}||a_{j',k'}|| \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}^d(x)\overline{\psi_{j',k'}^d}(x)dx|.
\end{aligned}$$

Or, pour $k, k' \in \mathbb{Z}$, $j, j' \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}^d(x)\overline{\psi_{j',k'}^d}(x)dx = \frac{1}{2\pi}2^{-(j+j')/2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi^d}(2^{-j}\xi)\overline{\widehat{\psi^d}(2^{-j'}\xi)}e^{-i(2^{-j}k-2^{-j'}k')\xi}d\xi.$$

Si $|j'-j| > 1$, $supp(\partial_{2^{-j}}\widehat{\psi^d}) \cap supp(\partial_{2^{-j'}}\widehat{\psi^d}) = \varnothing$, et,

$$\int_{\mathbb{R}} {\psi^d}_{j,k}(x)\overline{{\psi^d}_{j',k'}}(x)dx = 0,$$

donc $\| \sum_{0\leq j\leq J} \sum_{|k|\leq K} a_{j,k}\psi_{j,k}^d \|_2^2 \leq \sum_{0\leq j\leq J} \sum_{0\leq j'\leq J, |j'-j|\leq 1} \sum_{|k|\leq K} \sum_{|k'|\leq K} |a_{j,k}||a_{j',k'}|| \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}^d(x)\overline{\psi_{j',k'}^d}(x)dx|$.

Si $j' = j$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} {\psi^d}_{j,k}(x)\overline{{\psi^d}_{j',k'}}(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi^d}(\xi)|^2 e^{-i(k-k')\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-3\pi}^{3\pi} |\widehat{\psi^d}(\xi)|^2 e^{-i(k-k')\xi}d\xi \\
&= C_{k-k'}.
\end{aligned}$$

$\xi \mapsto |\widehat{\psi^d}(\xi)|^2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |C_k| < +\infty$.
Si $j' = j+1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}^d(x)\overline{\psi_{j',k'}^d}(x)dx &= 2^{1/2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi^d}(2\xi)\overline{\widehat{\psi^d}(\xi)}e^{-i(2k-k')\xi}d\xi \\
&= 2^{1/2}\frac{1}{2\pi}(\int_{-3\pi}^{3\pi} \widehat{\psi^d}(2\xi)\overline{\widehat{\psi^d}(\xi)}e^{-i(2k-k')\xi}d\xi \\
&= D_{2k-k'}
\end{aligned}$$

$\xi \mapsto \widehat{\psi^d}(2\xi)\overline{\widehat{\psi^d}(\xi)} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |D_k| < +\infty$.
Si $j' = j-1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j,k}(x)\overline{\psi^d_{j',k'}}(x)dx &= \overline{\int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j',k}(x)\overline{\psi^d_{j,k'}}(x)dx} \\ &= \overline{D_{2k-k'}}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\sum_{0\le j\le J}\sum_{|k|\le K}\sum_{|k'|\le K} |a_{j,k}||a_{j,k'}||\int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j,k}(x)\overline{\psi^d_{j,k'}}(x)dx| = \sum_{0\le j\le J}\sum_{|k|\le K}\sum_{|k'|\le K} a_{j,k}|C_{k-k'}|.$$

Or,

$$\begin{aligned}|\sum_{0\le j\le J}\sum_{|k|\le K}\sum_{|k'|\le K} |a_{j,k}||a_{j,k'}||C_{k-k'}| &\le \sum_{0\le j\le J}\sum_{|k|\le K}\sum_{|l|\le 2K} |a_{j,k}||a_{j,k-l}||C_l|. \\ \text{et, } \sum_{0\le j\le J} |a_{j,k}||a_{j,k-l}||C_l| &\le |C_l|(\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{j,k}|^2)^{1/2}(\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{j,k-l}|^2)^{1/2} \text{ par Cauchy-Schwartz.} \\ \text{puis, } \sum_{|k|\le K}\sum_{0\le j\le J} |a_{j,k}||a_{j,k-l}||C_l| &\le |C_l|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{j,k}|^2 \text{ par Cauchy-Schwartz.}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{0\le j\le J}\sum_{|k|\le K}\sum_{|k'|\le K} |a_{j,k}||a_{j,k'}|C_{k-k'}| \le (\sum_{l\in\mathbb{Z}} |C_l|)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{j,k}|^2.$$

De la même façon on montre que pour $|j'-j| = 1$

$$|\sum_{0\le j\le J}\sum_{|k|\le K}\sum_{|k'|\le K} a_{j,k}\overline{a_{j',k'}}\int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j,k}(x)\overline{\psi^d_{j',k'}}(x)dx| \le (\sum_{l\in\mathbb{Z}} |D_l|)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{j,k}|^2.$$

Finallement,

$$\|\sum_{0\le j\le J}\sum_{|k|\le K} a_{j,k}\psi^d_{j,k}\|_2 \le C^d_2(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{j,k}|^2)^{1/2}$$

avec $C^d_2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} |C_l| + 2\sum_{l\in\mathbb{Z}} |D_l| > 0$.
Comme $(a_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$, on en déduit que $\sum\sum a_{j,k}\psi_{j,k}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ et,

$$\|\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,k}\psi^d_{j,k}\|_2 \le C^d_2(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{j,k}|^2)^{1/2}$$

Voilà qui démontre un sens de l'inégalité. Pour l'autre sens nous utiliserons la propriété de biorthogonalité suivante.

**Proposition 3.2.3.1.** *Pour tout $d \in \mathbb{R}$, $k, k' \in \mathbb{Z}$, $j, j' \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j,k}(x)\overline{\psi^{-d}_{j',k'}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j,k}(x)\psi^{-d}_{j',k'}(x)dx = \delta_{jj',kk'}.$$

**Remarque 3.2.3.1.** *On a aussi pour tout $d \in \mathbb{R}$, $k, k' \in \mathbb{Z}$, et $j \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^d_k(x)\overline{\varphi^{-d}_{k'}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi^d_k(x)\varphi^{-d}_{k'}(x)dx = \delta_{kk'}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j,k}(x)\overline{\varphi^{-d}_{k'}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j,k}(x)\varphi^{-d}_{k'}(x)dx = 0.$$

**preuve** Soit $d \in \mathbb{R}$, $k, k' \in \mathbb{Z}$, $j, j' \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi^d_{j,k}(x)\overline{\psi^{-d}_{j',k'}(x)} &= \frac{1}{2\pi}2^{-(j+j')/2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi^d}(2^{-j}\xi)\overline{\widehat{\psi^{-d}}(2^{-j'}\xi)}e^{-i(2^{-j}k-2^{-j'}k')\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}2^{-(j+j')/2}2^{d(j'-j)}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(2^{-j}\xi)\overline{\widehat{\psi}(2^{-j'}\xi)}e^{-i(2^{-j}k-2^{-j'}k')\xi}d\xi \\
&= 2^{d(j'-j)}\delta_{jj',kk'} \\
&= \delta_{jj',kk'}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_{j,k}|^2 &= \int_{\mathbb{R}}[\sum_{|k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}a_{j,k}\psi^d_{j,k}(x)\overline{\sum_{k'\in\mathbb{Z}}\sum_{j'\in\mathbb{N}}a_{j',k'}|\psi^{-d}_{j',k'}(x)}]dx \\
&\leq \|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}a_{j,k}\psi^d_{j,k}\|_2\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}a_{j,k}|\psi^{-d}_{j,k}\|_2 \quad \text{par Cauchy-Schwartz} \\
&\leq \|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}a_{j,k}\psi^d_{j,k}\|_2 C_2^{-d}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_{j,k}|^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$C_1^d(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_{j,k}|^2)^{1/2} \leq \|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}a_{j,k}\psi^d_{j,k}\|_2 \leq C_2^d(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_{j,k}|^2)^{1/2}$$

avec $C_1^d = \frac{1}{C_2^{-d}}$.

On en conclut que pour tout $d \in \mathbb{R}$, $\{\varphi^d_k, \psi^d_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$ et donc une base d'ondelettes formée de fonctions de l'espace de Schwartz avec $\varphi^d$ la fonction père des ondelettes et $\psi^d$ la fonction mère.
De plus, la condition de biorthogonalité (proposition 3.2.3.1) donne l'unicité de la décomposition en ondelettes de toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ : pour tout $d \in \mathbb{R}$, toute fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$g \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} < g, \varphi^{-d}_k > \varphi^d_k + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} < g, \psi^{-d}_{j,k} > \psi^d_{j,k}.$$

Nous allons à présent utiliser ces familles de fonctions pour décrire des espaces fonctionnels de distributions tempérés qui nous serviront pour décomposer en ondelettes le bruit gaussien Fractionnaire et "l'intégrer".

# Chapitre 4

# Les espaces $C^s_\alpha$

## 4.1 Les espaces $C^s_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 \leq s \leq 1$.

**Définition 4.1.0.1.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 \leq s \leq 1$, $f \in C^s_\alpha$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :*
$|f(x)| \leq C_0(1+|x|)^\alpha$ *et,*
$|f(x+h) - f(x)| \leq C_0|h|^s(1+|x|)^\alpha$ *pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq 1$.*

**Proposition 4.1.0.2.** *Soit $0 \leq s \leq 1$, si $f \in C^s_\alpha$, pour tout $d \in \mathbb{R}$*

$$f(x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2} \psi^d(2^j x - k),$$

*avec*

$$\begin{aligned} |c_k^{(d)}| = & \quad | < f, \varphi_k^{-d} > | \quad \leq C(1+|k|)^\alpha \\ |d_{j,k}^{(d)}| = & \quad | < f, \psi_{j,k}^{-d} > | \quad \leq C 2^{-j(s+1/2)}(1+2^{-j}|k|)^\alpha. \end{aligned}$$

**Notations** Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ on note
$g_k : x \mapsto g(x-k)$ et $g_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2} g(2^j x - k)$.

**Lemme 4.1.0.3.** *Soit $0 \leq s \leq 1$ et $f \in C^s_\alpha$, alors pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*

$$| < f, g_k > | \leq C(f,g)(1+|k|)^\alpha \quad \textit{et,}$$

$$| < f, g_{j,k} > | \leq C(f,g) 2^{-j(1/2+s)}(1+|2^{-j}k|)^\alpha \quad \textit{si } g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}).$$

**preuve**

$$\begin{aligned} | < f, g_k > | &= | \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x-k) dx| = | \int_{\mathbb{R}} f(x+k) g(x) dx| \\ \text{donc } | < f, g_k > | &\leq \int_{\mathbb{R}} C_0(1+|x+k|)^\alpha |g(x)| dx \quad \text{car} \quad f \in C^s_\alpha \\ \text{ie } | < f, g_k > | &\leq C_0(1+|k|)^\alpha \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{|\alpha|} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

Alors $C(f,g) = C_0 \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{|\alpha|} |g(x)| dx$ ($< +\infty$ car $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), convient.

$$\text{De plus, } | < f, g_{j,k} > | = | \int_{\mathbb{R}} f(x) 2^{j/2} g(2^j x - k) dx| = 2^{-j/2} | \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j}x + 2^{-j}k) g(x) dx|$$

$$\begin{aligned}
\text{donc, } |<f,g_{j,k}>| &= 2^{-j/2}|\int_{\mathbb{R}}(f(2^{-j}x+2^{-j}k)-f(2^{-j}k))g(x)dx| \quad \text{car} \quad \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \widehat{g}(0)=0.\\
\text{Ainsi,} \quad |<f,g_{j,k}>| &\leq 2^{-j/2}\int_{|x|\leq 2^j}|(f(2^{-j}x+2^{-j}k)-f(2^{-j}k))g(x)|dx\\
&+ 2^{-j/2}\int_{|x|\geq 2^j}|(f(2^{-j}x+2^{-j}k)-f(2^{-j}k))g(x)|dx.
\end{aligned}$$

Or, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\int_{|x|\leq 2^j}|(f(2^{-j}x+2^{-j}k)-f(2^{-j}k))g(x)|dx \leq C_0(1+2^{-j}|k|)^{\alpha}\int_{|x|\leq 2^j}2^{-js}|x|^s|g(x)|dx,$$

et comme $f\in\mathcal{C}^s_\alpha$,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2^j}|(f(2^{-j}x+2^{-j}k)-f(2^{-j}k))g(x)|dx &\leq 2C_0(1+2^{-j}|k|)^{\alpha}\int_{|x|\geq 2^j}(1+|2^jx|)^{|\alpha|}|g(x)|dx.\\
&\leq C_0\pi_{|\alpha|+3}(g)2^{-js}(1+2^{-j}|k|)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc $|<f,g_{j,k}>|\leq C(f,g)2^{-j(1/2+s)}(1+|2^{-j}k|)^{\alpha}$ avec $C(f,g)=3C_0\pi_{|\alpha|+3}(g)$ .

On en déduit les majorations des coefficients d'ondelettes dans la proposition 4.1.0.2 .
Voici une variante du lemme 4.1.0.3 :

**Lemme 4.1.0.4.** *Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors pour tout $g\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $n\geq 1$, pour tout $N\in\mathbb{N}$,*

$$|<f,g_{j,k}>|\leq C(f,g,N,n)2^{-j(n+3/2)}(1+|2^{-j}k|)^{-N}.$$

**preuve** Par la formule de Taylor et comme $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et $h$ tel que $|h|\leq 1$ :

$$|f(x+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)|\leq 2^N\pi_N(f^{(n+1)})|h|^{n+1}(1+|x|)^{-N} \tag{4.1}$$

Ainsi

$$<f,g_{j,k}>=2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}}(f(2^{-j}x+2^{-j}k)-\sum_{l=0}^{n}\frac{(2^{-j}x)^l}{l!}f^{(l)}(2^{-j}k))g(x)dx \text{ car } g\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Or, d'après l'inégalité 4.1

$$\begin{aligned}
&|\int_{|x|\leq 2^j}(f(2^{-j}x+2^{-j}k)-\sum_{l=0}^{n}\frac{2^{-j}x^l}{l!}f^{(l)}(2^{-j}k))g(x)dx|\\
&\leq 2^N\pi_N(f^{(n+1)})(1+|2^{-j}k|)^{-N}\int_{|x|\leq 2^j}|2^{-j}x|^{n+1}|g(x)|dx.
\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$|\int_{|x|\geq 2^j}(f(2^{-j}x+2^{-j}k)-\sum_{l=0}^{n}\frac{2^{-j}x^l}{l!}f^{(l)}(2^{-j}k))g(x)dx|$$

$$\leq (n+2)\pi_{N,n}(f)(1+|2^{-j}k|)^{-N}\int_{|x|\geq 2^j}(1+|x|)^{\max(N,n)}|g(x)|dx.$$

Donc

$$|<f,g_{j,k}>|\leq C(f,g,N,n)2^{-j(n+3/2)}(1+|2^{-j}k|)^{-N},$$

avec $C(f,g,N,n)=2^{N+2}\pi_{N,n+1}(f)\pi_{N+2(n+1)}(g)$ .

**Corollaire 4.1.0.1.** *Pour tout $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $d\in\mathbb{R}$,*
$\sum <g,\varphi_k^{-d}>\varphi_k^d+\sum\sum <g,\psi_{j,k}^{-d}>\psi_{j,k}^d$ *converge vers $g$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*
**preuve** On sait déjà que

$$g\overset{L^2(\mathbb{R})}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}<g,\varphi_k^{-d}>\varphi_k^d+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}<g,\psi_{j,k}^{-d}>\psi_{j,k}^d.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$ et $l\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|<g,\varphi_k^{-d}>|(1+|x|)^N|(\varphi_k^d)^{(l)}(x)|<C_{N,l}$$

et

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}}|<g,\psi_{j,k}^{-d}>|(1+|x|)^N|(\psi_{j,k}^d)^{(l)}(x)|<C_{N,l},$$

ce qui prouvera que $\sum <g,\varphi_k^{-d}>\varphi_k^d+\sum\sum <g,\psi_{j,k}^{-d}>\psi_{j,k}^d$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Or

$$|<g,\varphi_k^{-d}>|(1+|x|)^N|(\varphi_k^d)^{(l)}(x)|\leq |<g,\varphi_k^{-d}>|(1+|k|)^N|(1+|x-k|)^N(\varphi_k^d)^{(l)}(x)|.$$

D'après le lemme 4.1.0.3 p.30, comme $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\subset C^1_{-N-2}$

$$|<g,\varphi_k^{-d})>|\leq C(\varphi^{-d},g)(1+|k|)^{-N-2}$$

$$\text{et } |<g,\varphi_k^{-d}>|(1+|x|)^N|(\varphi_k^d)^{(l)}(x)|\leq C(\varphi^{-d},g)|(1+|k|)^{-2}\pi_{N,l}(\varphi^d).$$

Donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|<g,\varphi_k^{-d}>|(1+|x|)^N|(\varphi_k^d)^{(l)}(x)|<C(\varphi^d,\varphi^{-d},g,l,N)$.
De plus,

$$|<g,\psi_{j,k}^{-d}>|(1+|x|)^N|(\psi_{j,k}^{-d})^{(l)}(x)|\leq |<g,\psi_{j,k}^{-d}>|(1+|2^{-j}k|)^N(1+|2^jx-k|)^N|(\psi_{j,k}^d)^{(l)}(x)|$$

D'après le lemme 4.1.0.4 p.31 comme $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\psi^{-d}\in\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$

$$|<g,\psi_{j,k}^{-d}>|\leq C(\psi^{-d},g,N,n)2^{-j(n+2)}(1+|2^{-j}k|)^{-N}\quad\text{pour tout } N\in\mathbb{N} \text{ et } n\in\mathbb{N}^*.$$

Alors $|<g,\psi_{j,k}^{-d}>|(1+|x|)^N|{\psi_{j,k}^d}^{(l)}(x)|\leq C(\psi^{-d},g,N+2,2)2^{-3j}(1+|2^{-j}k|)^{-2}\pi_{N,l}(\psi^d)\leq C(\psi^{-d},g,N+2,2)\pi_{N,l}(\psi^d)2^{-j}(1+|k|)^{-2}$.

Ainsi $C_{N,l} = C(\varphi^d, \varphi^{-d}, g, l, N) + 2\frac{\pi^2}{3} C(\psi^{-d}, g, N+2, 2)\pi_{N,l}(\psi^d)$ convient.
Et

$$g \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \sum_{k\in Z} < g, \varphi_k^{-d} > \varphi_k^d + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} < g, \psi_{j,k} - d > \psi_{j,k}^d.$$

**preuve de la proposition 4.1.0.2**
Soit $K \in \mathbb{N}$ et $J \in \mathbb{N}$ on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_{K,J}(x) = \sum_{|k|\leq K} < f, \varphi_k^{-d} > \varphi^d(x-k) + \sum_{0\leq j\leq J} \sum_{|k|\leq K} < f, \psi_{j,k}^{-d} > 2^{j/2}\psi^d(2^j x - k).$$

Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose

$$g_{K,J}(x) = \sum_{|k|\leq K} < g, \varphi_k^d > \varphi^{-d}(x-k) + \sum_{0\leq j\leq J} \sum_{|k|\leq K} < g, \psi_{j,k}^d > 2^{j/2}\psi^{-d}(2^j x - k).$$

D'après le corollaire 4.1.0.1 $(g_{K,J})_{K\in\mathbb{Z},J\in\mathbb{N}}$ tend vers $g$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Or $< f, g_{K,J} >=< f_{K,J}, g >$ donc $(f_{K,J})_{K\in\mathbb{Z},J\in\mathbb{N}}$ tend vers $f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.
De plus d'après le lemme 4.1.0.3

$$\begin{aligned} | < f, \varphi_k^{-d} > | &\leq C(f, \varphi^{-d})(1+|k|)^\alpha \text{ car } \varphi^{-d} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ | < f, \psi_{j,k}^{-d} > | &\leq C(f, \psi^{-d}) 2^{-j(1/2+s)}(1+|2^{-j}k|)^\alpha \text{ car } \psi^{-d} \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2}\psi^d(2^j x - k).$$

avec

$$\begin{aligned} |c_k^{(d)}| &= | < f, \varphi_k^{-d} > | \leq C(1+|k|)^\alpha \\ |d_{j,k}^{(d)}| &= | < f, \psi_{j,k}^{-d} > | \leq C 2^{-j(s+1/2)}(1+2^{-j}|k|)^\alpha. \end{aligned}$$

**Proposition 4.1.0.3.** *Soit $0 < s < 1$, $d \in \mathbb{R}$ et $(c_k^{(d)})_{k\in\mathbb{Z}}$, $(d_{j,k}^{(d)})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ tels que :*

$$\begin{aligned} |c_k^{(d)}| &\leq C(1+|k|)^\alpha \\ |d_{j,k}^{(d)}| &\leq C 2^{-j(s+1/2)}(1+2^{-j}|k|)^\alpha \end{aligned}$$

*Alors $\sum c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) + \sum\sum d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2}\psi^d(2^j x - k)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Notant $f$ sa limite, $f \in C_\alpha^s$.*

**Remarque 4.1.0.2.** *Par monotonie intégrale on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $N > |\alpha| + 1$*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|x-k|)^{|\alpha|-N} \leq \frac{N+1-|\alpha|}{N-1-|\alpha|}.$$

**preuve de la proposition 4.1.0.3** Pour tout $d \in \mathbb{R}$, $\varphi^d \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\psi^d \in \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ $|c_k^{(d)}\varphi^d(x-k)| \leq C(1+|x-k|)^{|\alpha|-N}\pi_N(\varphi^d)(1+|x|)^\alpha$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ donc $\sum c_k^{(d)}\varphi_k^d$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

De plus $|d_{j,k}^{(d)}2^{j/2}\psi^d(2^jx-k)| \leq C2^{-js}(1+2^{-j}|k-2^jx|)^{|\alpha|}\psi^d(2^jx-k))(1+|x|)^\alpha$ donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $|d_{j,k}^{(d)}2^{j/2}\psi^d(2^jx-k)| \leq C2^{-js}\pi_N(\psi^d)(1+|k-2^jx|)^{|\alpha|-N}(1+|x|)^\alpha$ et, $\sum\sum d_{j,k}^{(d)}\psi_{j,k}^d$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)}\varphi^d(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}^{(d)}2^{j/2}\psi^d(2^jx-k)| \\ &\leq C_0(1+|x|)^\alpha \end{aligned}$$

avec $C_0 \leq 5C(\pi_{E(|\alpha|)+3}(\varphi^d) + \frac{1}{1-2^{-s}}\pi_{E(|\alpha|)+3}(\psi^d))$.

De plus, $\varphi^d$ et $\psi^d \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^1_{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ .
Soit $x, h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$,
$|\varphi^d(x+h-k) - \varphi^d(x-k)| \leq 2^N\pi_{N,1}(\varphi^d)|h|(1+|x-k|)^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ si $|h| \leq 1$.
Ainsi,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^{(d)}(\varphi^d(x+h-k) - \varphi^d(x-k))| \leq 4C\pi_{E(|\alpha|)+3,1}(\varphi^d)|h|^s(1+|x|)^\alpha.$$

Et pour j tel que $2^j \leq 1/|h|$
$|\psi^d(2^j(x+h)-k) - \psi^d(2^jx-k)| \leq 2^N\pi_{N,1}(\psi^d)|2^jh|(1+|2^jx-k|)^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$,
alors pour $0 < |h| \leq 2^{-j}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_{j,k}^{(d)}2^{j/2}(\psi^d(2^j(x+h)-k) - \psi^d(2^jx-k))| \leq 4C\pi_{E(|\alpha|)+3,1}(\psi^d)2^{j(1-s)}|h|(1+|x|)^\alpha.$$

$|\psi^d(2^j(x+h)-k)| \leq \pi_N(\psi^d)(1+|2^j(x+h)-k|)^{-N}$ et,
$|\psi^d(2^jx-k)| \leq \pi_N(\psi^d)(1+|2^jx-k|)^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$,
donc pour $|h| \geq 2^{-j}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |2^{j/2}d_{j,k}^{(d)}(\psi^d(2^j(x+h)-k) - \psi^d(2^jx-k))| \leq 8C\pi_{E(|\alpha|)+3}(\psi^d)2^{-js}(1+|x|)^\alpha.$$

Comme $0 < s < 1$

$$\sum_{j/2^j\leq 1/|h|} 2^{j(1-s)} \leq 2^{(1-s)}\frac{|h|^{(s-1)}}{2^{(1-s)}-1} \quad \text{et} \quad \sum_{j/2^j>1/|h|} 2^{-js} \leq \frac{|h|^s}{1-2^{-s}}.$$

Alors,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |2^{j/2}d_{j,k}^{(d)}(\psi^d(2^j(x+h)-k) - \psi^d(2^jx-k))| \leq C(s,\psi^d)(1+|x|)^\alpha|h|^s,$$

avec $C(s,\psi^d) = 4C\pi_{E(|\alpha|)+3,1}(\psi^d)(\frac{2^{(1-s)}}{2^{(1-s)}-1} + \frac{2}{1-2^{-s}})$.
Finallement

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C(\varphi^d, \psi^d, C, s)|h|^s(1+|x|)^\alpha \text{ pour } |h| \leq 1,$$

et $f \in C^s_\alpha$ .

**Corollaire 4.1.0.2.** *Soit* $0 < s < 1$, $d \in \mathbb{R}$ $f \in C^s_\alpha$ *si et seulement si*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2} \psi^d(2^j x - k)$$

*dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ *et uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}$, *avec,*

$$\begin{aligned} |c_k^{(d)}| &= |<f, \varphi_k^{-d}>| &\leq C(1+|k|)^\alpha \\ |d_{j,k}^{(d)}| &= |<f, \psi_{j,k}^{-d}> &\leq C2^{-j(s+1/2)}(1+2^{-j}|k|)^\alpha. \end{aligned}$$

## 4.2 Les espaces $C^s_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $-1 < s < 0$.

**Définition 4.2.0.2.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $-1 < s < 0$, $f \in C^s_\alpha$ *si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ *et* $f = u + v'$ *avec* $u \in C^{s+1}_\alpha$ *et* $v \in C^{s+1}_\alpha$.

**Proposition 4.2.0.4.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $-1 < s < 0$, $d \in \mathbb{R}$, $f \in C^s_\alpha$ *si et seulement si*

$$f(x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2} \psi^d(2^j x - k),$$

*où,*

$$\begin{aligned} |c_k^{(d)}| &\leq C(1+|k|)^\alpha \\ |d_{j,k}^{(d)}| &\leq C2^{-j(s+1/2)}(1+2^{-j}|k|)^\alpha. \end{aligned}$$

**preuve** On suppose $f \in C^s_\alpha$, alors $f = u + v'$ avec $u \in C^{s+1}_\alpha$ et $v \in C^{s+1}_\alpha$.
Soit $d \in \mathbb{R}$, u $\in C^{s+1}_\alpha$, $\varphi^{-d} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et $\psi^{-d} \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, donc d'après le lemme 4.1.0.3 :
$|<u, \varphi_k^{-d}>| \leq C(u, \varphi^{-d})(1+|k|)^\alpha$ et, $|<u, \psi_{j,k}^{-d}>| \leq C(u, \psi^{-d})2^{-j(1/2+s+1)}(1+|2^{-j}k|)^\alpha$.

De plus, $<v', \varphi_k^{-d}> = <v, (\varphi^{-d})'_k>$, et $<v', \psi_{j,k}^{-d}> = 2^j <v, (\psi^{-d})'_{j,k}>$ donc toujours d'après le lemme 4.1.0.3, comme v $\in C^{s+1}_\alpha$, $(\varphi^{-d})' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et $(\psi^{-d})' \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$,
$|<v', \varphi_k^{-d}>| \leq C(v, \varphi^{-d})(1+|k|)^\alpha$ et, $|<v', \psi_{j,k}-d>| \leq C(v, \psi^{-d})2^{-j(1/2+s)}(1+|2^{-j}k|)^\alpha$.
Ainsi,

$$|<f, \varphi_k^{-d}>| \leq C(f, \varphi^{-d})(1+|k|)^\alpha,$$
$$\text{et} \quad |<f, \psi_{j,k}^{-d}>| \leq C(f, \psi^{-d})2^{-j(1/2+s)}(1+|2^{-j}k|)^\alpha.$$

Soit $K \in \mathbb{N}$ et $J \in \mathbb{N}$, en reprenant les notations de la proposition 4.1.0.2, pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite $(< f_{K,J}, g >)_{K\in\mathbb{N},J\in\mathbb{N}} (= (< f, g_{K,J} >)_{K\in\mathbb{N},J\in\mathbb{N}})$ converge vers $< f, g >$ car $g_{K,J}$ converge vers $g$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Et,

$$f(x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2} \psi^d(2^j x - k)$$

où,

$$\begin{aligned} |c_k^{(d)}| &= | < f, \varphi_k^{-d} > | \leq C(1+|k|)^\alpha \\ |d_{j,k}^{(d)}| &= | < f, \psi_{j,k}^{-d} > | \leq C 2^{-j(s+1/2)} (1+2^{-j}|k|)^\alpha. \end{aligned}$$

Réciproquement soit $(c_k^{(d)})_{k\in\mathbb{Z}}$, $(d_{j,k}^{(d)})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ tels que :

$$\begin{aligned} |c_k^{(d)}| &\leq C(1+|k|)^\alpha \\ |d_{j,k}^{(d)}| &\leq C 2^{-j(s+1/2)} (1+2^{-j}|k|)^\alpha \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^x \psi^d(t)dt = \psi^{d-1}(x)$, donc on pose

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k)$$

$$\text{et} \quad v(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2} \psi^{d-1}(2^j x - k).$$

$u, v \in C_\alpha^{s+1}$ d'après la proposition 4.1.0.3 et

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2} \psi^d(2^j x - k) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} u(x) + v'(x).$$

## 4.3 Primitives des distributions de $C_\alpha^s$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $-1 < s < 0$.

**Proposition 4.3.0.5.** *Pour tout $f \in C_\alpha^s(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $-1 < s < 0$, il existe un unique $I_f \in C_{\alpha+1}^{s+1}(\mathbb{R})$ telle que $I_f(0) = 0$ et $I_f' \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} f$.*

**preuve** Soit $-1 < s < 0$,
$f \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} u + v'$, $u, v \in C_\alpha^{s+1}(\mathbb{R})$ montrons que $I_f : x \mapsto \int_0^x u(t)dt + v(x) - v(0)$ convient.
Comme $u, v \in C_\alpha^{s+1}$, $I_f \in C_{\alpha+1}^{s+1}$ et $I_f(0) = 0$. De plus pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$< I_f, g' > = - < u, g > - < v', g > + v(0) \int_{\mathbb{R}} g'(t)dt = - < f, g >$ donc $I_f' \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} f$.
L'unicité vient de la condition $I_f(0) = 0$.

**Proposition 4.3.0.6.** *Soit* $-1 < s < 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, *et*

$$f \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2} \psi^d(2^j x - k)$$

*telle que* $|c_k^{(d)}| \leq C(1+|k|)^\alpha$ *et* $|d_{j,k}^{(d)}| \leq C 2^{-j(s+1/2)}(1+2^{-j}|k|)^\alpha$. *Alors,*

$$I_f(x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} F(x) - F(0)$$

*avec,*

$$F \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k^{(d)} \varphi_k^{d-1} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_{j,k}^{(d)} \psi_{j,k}^{d-1} \in \mathcal{C}_{\alpha+1}^{s+1}$$

*où* $C_0^{(d)} = 0$, $C_k^{(d)} = \sum_{j=1}^k c_j^{(d)}$ *si* $k \geq 1$, $C_k^{(d)} = -\sum_{j=0}^{|k|} c_{-j}^{(d)}$ *si* $k \leq -1$, $D_{j,k}^{(d)} = 2^{-j} d_{j,k}^{(d)}$.

**Lemme 4.3.0.5.** *soit* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *une suite à croissance lente. On pose*

$$A_0 = 0, \quad A_k = \sum_{j=1}^k a_j \quad si \ k \geq 1, \quad A_k = -\sum_{j=0}^{|k|} a_{-j} \quad si \ k \leq -1,$$

$$et \quad g_1 : x \mapsto \int_{x-1}^x g(t)dt.$$

*Alors,* $g_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite à croissance lente et*

$$\int_0^x \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k g(t-k)\}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k g_1(x-k) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k g_1(-k).$$

**preuve** $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $g_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, soit $N \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$
$(1+|x|)^N |g_1(x)| \leq 2^N \int_{x-1}^x (1+|t|)^N |g(t)|dt$ donc $\pi_N(g_1) \leq 2^N \pi_N(g)$.
$(1+|x|)^N |g_1^{(l)}(x)| = (1+|x|)^N |g^{(l-1)}(x) - g^{(l-1)}(x-1)| \leq 2^{N+1}\pi_{N,l-1}(g)$.
donc $g_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $N, l \in \mathbb{N}$, $\pi_{N,l}(g_1) \leq 2^{N+1}\pi_{N,l}(g)$.
$(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite à croissance lente donc il existe $\alpha \geq 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $|a_k| \leq C(1+|k|)^\alpha$ alors $|A_k| \leq C(1+|k|)^{\alpha+1}$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite à croissance lente.
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k g_k$ converge uniformément sur tout compact donc

$$\begin{aligned}
\int_0^x \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k g(t-k)\}dt &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^x a_k g(t-k)dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^x A_k g(t-k)dt - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^x A_{k-1} g(t-k)dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k \int_0^x g(t-k) - g(t-k-1)dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k g_1(x-k) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k g_1(-k)
\end{aligned}$$

**preuve de la proposition 4.3.0.6**

Si $-1 < s < 0$, On pose $u(x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(d)} \varphi^d(x-k) \in \mathcal{C}_\alpha^{s+1}$ et $v(x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j} d_{j,k}^{(d)} 2^{j/2} \psi^{d-1}(2^j x - k) \in \mathcal{C}_\alpha^{s+1}$ de sorte que $f \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} u + v'$. Avec les notation du lemme $\varphi_1^d = \varphi^{d-1}$, et on pose

$$C_0^{(d)} = 0 \;\; C_k^{(d)} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{(d)} \;\text{ si }\; k \geq 1 \;\; C_k^{(d)} = -\sum_{j=0}^{|k|} c_{-j}^{(d)} \;\text{ si }\; k \leq -1, \;\; D_{j,k}^{(d)} = 2^{-j} d_{j,k}^{(d)}.$$

Alors $|C_k^{(d)}| \leq C(1+|k|)^{\alpha+1}$, $|D_{j,k}^{(d)}| \leq C 2^{-j(s+1+1/2)}(1+2^{-j}|k|)^\alpha$. Donc,

$$F \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{:=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k^{(d)} \varphi_k^{d-1} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_{j,k}^{(d)} \psi_{j,k}^{d-1} \in \mathcal{C}_{\alpha+1}^{s+1} \;\text{ et},$$

$$I_f \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} F - F(0).$$

On peut enfin s'intéresser à la décomposition en ondelettes du bruit gaussien Fractionnaire.

# Chapitre 5

# La décomposition du mouvement Brownien Fractionnaire en ondelettes

## 5.1 La décomposition du bruit blanc gaussien en ondelettes

**Théorème 5.1.0.2.** *Presque sûrement le bruit blanc gaussien admet la décomposition suivante :*

$$Z(\omega) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k \epsilon_k(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_{j,k} \epsilon_{j,k}(\omega),$$

*avec,* $\{\epsilon_{j,k}, \epsilon_{k'}, k' \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ *des variables aléatoires i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$.

**Lemme 5.1.0.6.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace de probabilité. Soit* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite de variables aléatoires réelles centrées identiquement distribuées de moment d'ordre* $p$, $p \geq 1$, *fini.*
*Alors il existe une variable aléatoire rélle finie presque sûrement telle que pout tout* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $\omega \in \Omega$

$$|\epsilon_n(\omega)| \leq C(\omega)(1+|n|)^{1/p}.$$

*De plus, si* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de variables aléatoires réelles de loi normale centrée réduite, il existe une variable aléatoire rélle finie presque sûrement telle que pout tout* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $\omega \in \Omega$

$$|\epsilon_n(\omega)| \leq C(\omega)\sqrt{\ln(2+|n|)}.$$

**preuve** Par hypothèse $\mathbf{E}(|\epsilon_1|^p) < +\infty$ donc $\sum \mathbf{P}(|\epsilon_1|^p > |n|)$ converge. Les variables $\{\epsilon_n; n \in \mathbb{Z}\}$ sont identiquement distribuées donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{P}(|\epsilon_1|^p > |n|) = \mathbf{P}(|\epsilon_n|^p > |n|).$$

Par le lemme de Borel-Cantelli

$$\mathbf{P}(\cap_k \cup_{n\geq k} \{|\epsilon_n|^p > |n|\}) = 0.$$

Soit $\omega \in \Omega$, on pose

$$C(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{|\epsilon_n|}{(1+|n|)^{1/p}}\right)$$

Si $\omega \notin \cap_k \cup_{n\geq k} \{|\epsilon_n|^p) > |n|\}$, $C(\omega) < +\infty$ et $C$ convient.

**Lemme 5.1.0.7.** *Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi normale centrée réduite, pour tout $t \geq 0$ $\mathbf{P}(X \geq t) \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$.*

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geq t)e^{\frac{t^2}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+t)^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} dx \quad \text{après changement de variable} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - xt} dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Et enfin, $\mathbf{P}(|X| \geq t) = 2\mathbf{P}(X \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$.
Ainsi si $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles de loi normale centrée réduite, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et $a > 0$

$$\mathbf{P}(|\epsilon_n| > a\sqrt{\ln|n|}) \leq e^{-\frac{a^2 \ln|n|}{2}} = |n|^{-\frac{a^2}{2}}$$

Si $a > \sqrt{2}$, $\sum \mathbf{P}(|\epsilon_n| > a\sqrt{\ln|n|})$ converge et par le même raisonnement que précedemment,

$$|\epsilon_n(\omega)| \leq C(\omega)\sqrt{\ln(2+|n|)}$$

avec

$$C(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{|\epsilon_n|}{\sqrt{\ln(2+|n|)}}\right) < +\infty \text{ presque sûrement.}$$

**Remarque 5.1.0.3.** *On démontre de la même façon que si $(\epsilon_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles centrées identiquement distribuées de moment d'ordre $p$, $p \geq 1$, fini il existe une variable aléatoire rélle finie presque sûrement telle que pout tout $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \Omega$*

$$|\epsilon_{j,k}(\omega)| \leq C(\omega)(1+j)^{1/p}(1+|k|)^{1/p}$$

*et*

$$|\epsilon_{j,k}(\omega)| \leq C(\omega)\sqrt{\ln(2+j)}\sqrt{\ln(2+|k|)}$$

*si $\epsilon_{j,k}$ suit une loi normale centrée réduite, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.*

**preuve du théorème 5.1.0.2** D'après le lemme il existe une variable aléatoire rélle finie presque sûrement telle que pout tout $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \Omega$

$$|\epsilon_k(\omega)| \leq C(\omega)\sqrt{\ln(2+|k|)} \quad \text{et} \quad |\epsilon_{j,k}(\omega)| \leq C(\omega)\sqrt{\ln(2+j)}\sqrt{\ln(2+|k|)}$$

donc $\sum \varphi_k\epsilon_k(\omega) + \sum \psi_{j,k}\epsilon_{j,k}(\omega)$ converge presque sûrement dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.
De plus $\varphi$ et $\psi$ sont à valeurs réelles donc $X := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k\epsilon_k + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_{j,k}\epsilon_{j,k}$ définit un processus généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui se restreint en un processus généralisé sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.
Comme $\{\epsilon_{j,k}, \epsilon_{k'}, k' \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ sont des variables aléatoires i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, $X$ est

limite presque sûre d'un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ et $X$ définit un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Enfin, pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_X(u,v) &= \mathbf{E}(< X, u > \overline{< X, v >}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} < \varphi_k, u > \overline{< \varphi_k, v >} + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} < \psi_{j,k}, u > \overline{< \psi_{j,k}, v >} \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(t)}dt \quad \text{car} \quad \{\varphi_k, \psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\} \quad \text{est une base orthonormée de } L^2(\mathbb{R}) \\
&= \Gamma_Z(u,v).
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le théorème.

**Corollaire 5.1.0.3.** *Presque sûrement $Z \in \mathcal{C}_\alpha^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.*

## 5.2 La décomposition du bruit blanc gaussien Fractionnaire en ondelettes

**Théorème 5.2.0.3.** *Soit $H \in ]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$, $d = -H + \frac{1}{2} \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\setminus\{0\}$, presque sûrement, le bruit blanc gaussien fractionnaire se décompose sous la forme suivante :*

$$Z_H(\omega) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} C_H(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k^d \epsilon_k^d(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{jd}\psi_{j,k}^d \epsilon_{j,k}(\omega)).$$

*Avec, $C_H = (-\frac{\pi H(2H-1)}{\cos(\pi H)\Gamma(-2H+2)})^{1/2}$,*
*$\{\epsilon_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ des variables aléatoires i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$,*

$$\epsilon_k^d = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l^d \epsilon_{k-l}$$

*où $\{\epsilon_k, k \in \mathbb{Z}\}$ sont des variables aléatoires i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes des $\{\epsilon_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ .*

**preuve** On sait déjà, d'après le théorème 5.1.0.2, que presque sûrement

$$Z \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k \epsilon_k + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_{j,k}\epsilon_{j,k}$$

avec, $\{\epsilon_k, \epsilon_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ .
$d \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ donc $D^d : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})'$ est linéaire continu .
Alors presque sûrement

$$D^d Z \overset{\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} D^d\varphi_k \epsilon_k + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} D^d\psi_{j,k}\epsilon_{j,k}.$$

On cherche un processus généralisé sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$, or pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$, $D^d\varphi_k$ et $D^d\psi_{j,k}$ sont à valeurs réelles donc, si $\sum D^d\varphi_k\epsilon_k + \sum\sum D^d\psi_{j,k}\epsilon_{j,k}$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$, le processus correspondant se restreindra à $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

On pose pour $N, J \in \mathbb{N}$, $X_N^d := \sum_{|k|\leq N} D^d\varphi_k\epsilon_k$, $Y_{N,J}^d := \sum_{|k|\leq N}\sum_{0\leq j\leq J} D^d\psi_{j,k}\epsilon_{j,k}$ et $Z_{N,J}^d := X_N^d + Y_{N,J}^d$.
$Z_{N,J}^d$ est un processus généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.
De plus pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$D^d\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \tau_k(D^d\varphi) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} \sum_{l\in\mathbb{N}} \gamma_l^{(d)}\varphi_{l+k}^d$$

$$et\ \ D^d\psi_{j,k} \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} 2^{jd}\psi_{j,k}^d.$$

**Lemme 5.2.0.8.** *Pour $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\epsilon_k^N = \epsilon_k$ si $|k| \leq N$, $\epsilon_k^N = 0$ si $|k| > N$, $\epsilon_k^{(d,N)} = \sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l^d\epsilon_{k-l}^N = \sum_{l=max(k-N,0)}^{k+N}\gamma_l^d\epsilon_{k-l}$.*
*Presque sûrement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la suite $(\epsilon_k^{(d,N)})_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\epsilon_k^d = \sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l^d\epsilon_{k-l}$ quand $N$ tend vers $+\infty$.*
*De plus, les variables aléatoires $\epsilon_k^d$ sont identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, {\sigma_d}^2)$ avec $\sigma_d = (\sum_{l=0}^{\infty}(\gamma_l^d)^2)^{\frac{1}{2}}$ et pour tout $p \geq 2$, il existe une variable aléatoire $C_p$ finie presque sûrement telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$*

$$|\epsilon_k^{(d,N)}(\omega)| \leq C_p(\omega)(1+|k|)^{1/p}.$$

*( En particulier $|\epsilon_k^{(d)}(\omega)| \leq C_p(\omega)(1+|k|)^{1/p}$).*
**preuve** Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$, la suite $(\epsilon_{k-l}\gamma_l^d)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
$\mathbf{E}((\epsilon_k^{(d,N)})^2) = \sum_{l=max(k-N,0)}^{k+N}(\gamma_l^d)^2$, $\sum(\gamma_l^d)^2$ converge car $d \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $\gamma_l^d = O_{l\to+\infty}(l^{-1-d})$, donc $(\epsilon_k^{(d,N)})_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ie $\sum\gamma_l^d\epsilon_{k-l}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et par le théorème de Paul Levy $\sum\gamma_l^d\epsilon_{k-l}$ converge presque sûrement.
Comme $\mathbb{Z}$ est dénombrable, presque sûrement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la suite $(\epsilon_k^{(d,N)})_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\epsilon_k^d = \sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l^d\epsilon_{k-l}$ quand $N$ tend vers $+\infty$ et $\epsilon_k^d$ suit une loi $\mathcal{N}(0, {\sigma_d}^2)$.
On montre de même que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sum|\gamma_l^d\epsilon_{k-l}|$ converge presque sûrement. Les variables $(\sum_0^{\infty}|\gamma_l^d\epsilon_{k-l}|)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont identiquements distribués et de moments d'ordre $p$ finis pour tout $p \geq 2$ donc d'après le lemme 5.1.0.6 p.39, pour tout $p \geq 2$ il existe une variable aléatoire $C_p$ finie presque sûrement telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$

$$|\epsilon_k^{(d,N)}(\omega)| \leq C_p(\omega)(1+|k|)^{1/p}.$$

**retour à la démonstration du Théorème 5.2.0.3**
Soit $\omega \in \Omega$ tel que $|\epsilon_k(\omega)| \leq C_1(\omega)\sqrt{\ln(1+|k|)}$ et $|\epsilon_{j,k}(\omega)| \leq C_1(\omega)\sqrt{\ln(1+|k|)}\sqrt{\ln(1+j)}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, avec $C_1(\omega) < \infty$ ;
$(\epsilon_k^{(d,N)}(\omega))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\epsilon_k^d(\omega)$ et,
$|\epsilon_k^{(d,N)}(\omega)| \leq C_p(\omega)(1+|k|)^{1/p}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$, avec $C_p(\omega) < \infty$ pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ( leur ensemble est de probabilité égale à 1 ). Alors, pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} < X_N^d(\omega), g > &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} < D^d\varphi_k, g > \epsilon_k^N(\omega) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \gamma_l^{(d)} < \varphi_{l+k}^d, g > \epsilon_k^N(\omega) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} < \varphi_k^d, g > \epsilon_k^{(d,N)}(\omega) \end{aligned}$$

Comme $(\epsilon_k^{(d,N)}(\omega))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\epsilon_k^d(\omega)$ et, $|\epsilon_k^{(d,N)}(\omega)| \leq C_p(\omega)(1+|k|)^{1/p}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$

$$< X_N^d(\omega), g > \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} < \varphi_k^d, g > \epsilon_k^d(\omega) =< \sum_{k\in\mathbb{Z}} \epsilon_k^d(\omega)\varphi_k^d, g > .$$

De plus,

$$\begin{aligned} < Y_{N,J}^d(\omega), g > &= \sum_{|k|\leq N} \sum_{0\leq j\leq J} < D^d\psi_{j,k}, g > \epsilon_{j,k}(\omega) \\ &= \sum_{|k|\leq N} \sum_{0\leq j\leq J} < \psi_{j,k}^d, g > 2^{jd}\epsilon_{j,k}(\omega) \end{aligned}$$

Comme $d < \frac{1}{2}$ et$|\epsilon_{j,k}(\omega)| \leq C_1(\omega)\sqrt{\ln(1+|k|)}\sqrt{\ln(1+j)}$

$$< Y_{N,J}^d(\omega), g > \overset{N,J\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} < \psi_{j,k}^d, g > 2^{jd}\epsilon_{j,k}(\omega) =< \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jd}\epsilon_{j,k}(\omega)\psi_{j,k}^d, g > .$$

Donc presque sûrement

$$Z_{N,J}^d \overset{N,J\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \epsilon_k^d\varphi_k^d + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jd}\epsilon_{j,k}\psi_{j,k}^d := Z^d \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R})'.$$

Presque sûrement pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - d$, $Z^d \in \mathcal{C}_\alpha^{-d-\alpha-1/2} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et $Z^d(\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}) \subset \mathbb{R}$ donc $Z^d$ définit un processus généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui se restreint sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. De plus, pour tout $N, J \in \mathbb{N}$, $Z_{N,J}^d$ est un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ et $(Z_{N,J}^d)_{N,J\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $Z^d$ donc $Z^d$ est gaussien centré. Enfin, pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(< Z_{N,J}^d, u > \overline{< Z_{N,J}^d, v >}) &= \sum_{|k|\leq N} < D^d\varphi_k, u > \overline{< D^d\varphi_k, v >} \\ &+ \sum_{|k|\leq N}\sum_{0\leq j\leq J} < D^d\psi_{j,k}, u > \overline{< D^d\psi_{j,k}, v >} \\ &= \sum_{|k|\leq N} < \varphi_k, \check{D^d}\check{u} > \overline{< \varphi_k, \check{D^d}\check{v} >} \\ &+ \sum_{|k|\leq N}\sum_{0\leq j\leq J} < \psi_{j,k}, \check{D^d}\check{u} > \overline{< \psi_{j,k}, \check{D^d}\check{v} >}. \end{aligned}$$

Or, $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ donc $\check{D^d}\check{g} \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et comme $\{\varphi_k, \psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que $(< Z_{N,J}^d, g >)_{N,J\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par unicité de la limite, pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite $(< Z_{N,J}^d, g >)_{N,J\in\mathbb{N}}$ converge vers $< Z^d, g >$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\Gamma_{Z^d}(u, v) = \lim_{N,J\to+\infty} \mathbf{E}(< Z_{N,J}^d, u > \overline{< Z_{N,J}^d, v >}) = \int_{\mathbb{R}} \check{D^d}\check{u}(x)\overline{\check{D^d}\check{v}(x)}dx.$$

$$\begin{aligned}
\text{Alors, } \Gamma_{Z^d}(u,v) &= \int_{\mathbb{R}} \check{D^d}\check{u}(x)\overline{\check{D^d}\check{v}(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\check{D^d}\check{u}}(\xi)\overline{\widehat{\check{D^d}\check{v}}}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (-i\xi)^d\widehat{u}(\xi)\overline{(-i\xi)^d\widehat{v}}(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2d}\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} < \widehat{|\xi|^{2d}}, u * \check{\overline{v}} >
\end{aligned}$$

**Lemme 5.2.0.9.** *Pour* $d \in ]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\setminus\{0\}$, $\quad \widehat{|\xi|^{2d}}(t) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} -2\sin d\pi\Gamma(2d+1)pf|t|^{-1-2d}$.

On en déduit que $\Gamma_{Z^d}(u,v) = -\frac{1}{\pi}\sin d\pi\Gamma(2d+1) < pf|t|^{-1-2d}, u * \check{\overline{v}} >$, et $\gamma_{Z^d}(t) = -\frac{1}{\pi}\sin d\pi\Gamma(2d+1)pf|t|^{-1-2d}$.
Or $d = -H + \frac{1}{2}$ et $H \neq \frac{1}{2}$ donc $\gamma_{Z^d}(t) = -\frac{1}{\pi}\cos H\pi\Gamma(-2H+2)pf|t|^{2H-2}$.
Finallement, $\gamma_{C_H Z^d}(t) = C_H^2\gamma_{Z^d}(t) = H(2H-1)pf|t|^{2H-2} = \gamma_{Z_H}(t)$ et ainsi

$$C_H Z^d \overset{\mathcal{L}}{=} Z_H,$$

ce qui prouve le théorème.

Presque sûrement, $Z_H(\omega) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} C_H(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_k^d\epsilon_k^d(\omega)+\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{jd}\psi_{j,k}^d\epsilon_{j,k}(\omega))$, donc presque sûrement, pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - d$, $Z_H \in \mathcal{C}_\alpha^{-d-\alpha-1/2}$, et on peut "intégrer" ce processus.

## 5.3 La décomposition du Mouvement Brownien Fractionnaire en ondelettes

**Théorème 5.3.0.4.** *Soit* $H \in ]0,1[$, *presque sûrement, le mouvement brownien fractionnaire se décompose sous la forme suivante :*

$$B_H(t,\omega) = C_H(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Phi_H(t-k)S_k^{(H)}(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-j(H+1/2)}2^{j/2}\Psi_H(2^jt-k)\epsilon_{j,k}(\omega) - b_0(\omega)).$$

*Avec,* $C_H = (-\frac{\pi H(2H-1)}{\cos(\pi H)\Gamma(-2H+2)})^{1/2}$, $C_{1/2} := 1$,

$$b_0(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Phi_H(-k)S_k^{(H)}(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-j(H+1/2)}2^{j/2}\Psi_H(-k)\epsilon_{j,k}(\omega),$$

$\{\epsilon_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ *sont des variables aléatoires i.i.d.* $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\begin{aligned}
S_k^{(H)} &= \sum_{j=1}^{k}\epsilon_j^{(1/2-H)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l^{(1/2-H)}\epsilon_{j-l}\ ,\ k \geq 1, \\
S_0^{(H)} &= 0, \\
S_k^{(H)} &= -\sum_{j=k-1}^{1}\epsilon_j^{(1/2-H)} = -\sum_{j=k-1}^{0}\sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l^{(1/2-H)}\epsilon_{j-l}\ ,\ k \leq -1,
\end{aligned}$$

*où $\{\epsilon_k, k \in \mathbb{Z}\}$ sont des variables aléatoires i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes des $\{\epsilon_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$,*

$$\begin{aligned}\Phi_H &= \varphi^{-(1/2+H)},\\ \Psi_H &= \psi^{-(1/2+H)}.\end{aligned}$$

*Ceci est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$ et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.*

**preuve**

Soit $H \in ]0,1[$, $\omega \in \Omega$ tel que $Z_H(\omega) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} C_H(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k^d \epsilon_k^d(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{jd} \psi_{j,k}^d \epsilon_{j,k}(\omega))$, avec $d = -H + \frac{1}{2}$, $\epsilon_k^0 = \epsilon_k$, d'après le théorème 5.2.0.3 p.41.
En fait, $\omega$ est tel que $|\epsilon_k(\omega)| \leq C_1(\omega)\sqrt{\ln(1+|k|)}$, $|\epsilon_{j,k}(\omega)| \leq C_1(\omega)\sqrt{\ln(1+|k|)}\sqrt{\ln(1+j)}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, avec $C_1(\omega) < \infty$, et $|\epsilon_k^d(\omega)| \leq C_p(\omega)(1+|k|)^{1/p}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, avec $C_p(\omega) < \infty$ pour tout $p \geq 2$.
Pour $0 < \alpha < H$, $Z_H \in \mathcal{C}_\alpha^{H-\alpha-1}$ et avec les notations de la proposition 4.3.0.6 et du théorème 5.3.0.4

$$I_{Z_H}(\omega) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{=} C_H(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_H(t-k) S_k^{(H)}(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j(H+1/2)} 2^{j/2} \Psi_H(2^j t - k)\epsilon_{j,k}(\omega) - b_0(\omega))$$

donc presque sûrement $I_{Z_H} \in \mathcal{C}_{\alpha+1}^{H-\alpha}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})' \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ainsi $I_{Z_H}$ définit non seulement un processus généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui se restreint sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ mais aussi un processus réel.

On pose $F_H(t,\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_H(t-k) S_k^{(H)}(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j(H+1/2)} 2^{j/2} \Psi_H(2^j t - k)\epsilon_{j,k}(\omega)$, de sorte que $I_{Z_H}(t,\omega) = C_H(F_H(t,\omega) - F_H(0,\omega))$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{E}((\epsilon_k^{1/2-H})^2) = \sum_{l\geq 0} (\gamma_l^{1/2-H})^2 := (\sigma_H)^2$ donc $S_k^H \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\mathbf{E}((S_k^H)^2) \leq (\sigma_H k)^2$.
Comme $H > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ $F_H(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, $\mathbf{E}(F_H(t)) = 0$ et

$$\mathbf{E}(F_H(t)^2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Phi_H(t-k)\Phi_H(t-l)\mathbf{E}(S_k^H S_l^H) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-2j(H+1/2)} (2^{j/2}(\Psi_H(2^j t - k))^2.$$

Donc $t \mapsto \mathbf{E}(F_H(t)^2) \in \mathcal{C}_2^H$ et ainsi $I_{Z_H}$ est un processus du second ordre centré tel que $t \mapsto \mathbf{E}(I_{Z_H}(t)^2) \in \mathcal{C}_2^H$ .

De plus pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $< I_{Z_H}(\omega), u >= C_H(\sum_{k\in\mathbb{Z}} < \Phi_H(t-k), u > S_k^{(H)}(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j(H+1/2)} < 2^{j/2}\Psi_H(2^j t - k), u > \epsilon_{j,k}(\omega) - \widehat{u}(0) b_0(\omega))$ donc $I_{Z_H}$ est un processus généralisé du second ordre centré ; et, pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, par Fubini, $\Gamma_{I_{Z_H}}(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(s)}\mathbf{E}(I_{Z_H}(t) I_{Z_H}(s)) dt ds$.

Soit $u \in \widetilde{\mathcal{S}_0(\mathbb{R})}$ il existe $U \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ telles que $u = U'$ et $< I_{Z_H}, u >= - < Z_H, U >$ donc $I_{Z_H}$ est un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}_0(\mathbb{R})}$.
Soit $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})}$ telle que $\theta \geq 0$, $supp(\theta) \subset [-1,1]$ et $\widehat{\theta}(0) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\theta_n(x) = n\theta(nx)$ alors $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une unité approchée. Soit $u \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$, on pose, $u_n = u - \widehat{u}(0)\theta_n$ alors $u_n \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ et $\widehat{u_n}(0) = \widehat{u}(0) - \widehat{u}(0)\widehat{\theta}(0) = 0$ donc $u_n$ est dans $\widetilde{\mathcal{S}_0(\mathbb{R})}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $< I_{Z_H}, u_n >$ est une variable aléatoire gaussienne.

$$\begin{aligned}\text{Or } < I_{Z_H}, u_n > &= < I_{Z_H}, u > - \widehat{u}(0) < I_{Z_H}, \theta_n >=< I_{Z_H}, u > - \widehat{u}(0)(I_{Z_H} * \theta_n(0))\\ &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < I_{Z_H}, u > \text{ p.s. car } I_{Z_H} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \text{ p.s. et } I_{Z_H}(0) = 0.\end{aligned}$$

Finallement, $< I_{Z_H}, u >$ est aussi une variable aléatoire gaussienne donc $I_{Z_H}$ est un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ en tant que limite presque sûre d'un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Il est entièrement caractérisé par $\Gamma_{I_{Z_h}}$.
Soit $u, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ il existe $U, V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que $u = U'$ et $v = V'$, alors,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{I_{Z_h}}(u,v) &= \mathbf{E}(< I_{Z_H}, u > \overline{< I_{Z_H}, v >}) = \mathbf{E}(< Z_H, U > \overline{< Z_H, V >}) = \Gamma_{Z_H}(U,V) \\
&= < H(2H-1)pf|t|^{2H-2}, U * \check{\overline{V}} >= - < H|t|^{2H-1}, u * \check{\overline{V}} > \\
&= -\frac{1}{2} < |t|^{2H}, u * \check{\overline{v}} >
\end{aligned}$$

**Proposition 5.3.0.7.** *Pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\Gamma_{I_{Z_H}}(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(s)} \frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\} dtds.$$

**preuve** On sait déjà que pour tout $u, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$,
$\Gamma_{I_{Z_H}}(u,v) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |t|^{2H} u * \overline{\check{v}(t)} dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(s)}\frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\} dtds.$
car $\int_{\mathbb{R}} u(t)dt = \int_{\mathbb{R}} v(s)ds = 0$.
Soit $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, de même que précedemment, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u - \widehat{u}(0)\theta_n$ et $v_n = v - \widehat{v}(0)\theta_n$, de sorte que $(u_n, v_n) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \times \widetilde{\mathcal{S}_0(\mathbb{R})}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_{I_{Z_H}}(u_n, v_n) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |t|^{2H} u_n * \overline{\check{v_n(t)}} dt = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u_n(t)\overline{v_n(s)}|t-s|^{2H} dtds.$$

Or, $\int_{\mathbb{R}} u_n(t)|t-s|^{2H} dt = u_n * \gamma_H(s) = u * \gamma_H(s) - \widehat{u}(0)\theta_n * \gamma_H(s)$, où $\gamma_H : t \mapsto |t|^{2H}$.
Ainsi, $\Gamma_{I_{Z_H}}(u_n, v_n) = -\frac{1}{2}(\int_{\mathbb{R}} u * \gamma_H(s)\overline{v_n(s)}ds - \widehat{u}(0)\int_{\mathbb{R}} \theta_n * \gamma_H(s)\overline{v_n(s)}ds)$.

**Lemme 5.3.0.10.** *Si $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une unité approchée, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\theta_n * u \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*

**preuve** Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(\theta_n * u)^{(j)} = \theta_n * u^{(j)}$ donc il suffit de montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\pi_N(\theta_n * u - u) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, $(\theta_n * u - u)(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)(u(x-t) - u(x))dt = \int_{|t|\leq 1} \theta_n(t)(u(x-t) - u(x))dt$.
Donc, $|(\theta_n * u - u)(x)| \leq 2^N \pi_{N,1}(u)(1+|x|)^{-N}\int_{\mathbb{R}} |t|\theta_n(t)dt$, par l'inégalité des accroissements finis, et $|(\theta_n * u - u)(x)| \leq 2^N \pi_{N,1}(u)(1+|x|)^{-N}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |t|\theta(t)dt$. Finallement, $\pi_N(\theta_n * u - u) \leq \frac{C'_N}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u * \gamma_H(s)\overline{v_n(s)}ds &= \int_{\mathbb{R}} u * \gamma_H(s)\overline{v(s)}ds - \overline{\widehat{v}(0)}\int_{\mathbb{R}} u * \gamma_H(s)\theta_n(s)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} u * \gamma_H(s)\overline{v(s)}ds - \overline{\widehat{v}(0)}\int_{\mathbb{R}} \gamma_H(s)\theta_n * \check{u}(s)ds \\
&\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} u * \gamma_H(s)\overline{v(s)}ds - \overline{\widehat{v}(0)}\int_{\mathbb{R}} \gamma_H(s)\check{u}(s)ds \quad \text{car} \quad \gamma_H \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'
\end{aligned}$$

Et,

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_n * \gamma_H(s)\overline{v_n(s)}ds = \int_{\mathbb{R}} \theta_n * \gamma_H(s)\overline{v(s)}ds - \overline{\widehat{v}(0)}\int_{\mathbb{R}} \theta_n * \gamma_H(s)\theta_n(s)ds$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \theta_n * \gamma_H(s)\overline{v_n(s)}ds &= \int_{\mathbb{R}} \gamma_H(s)\check{\theta}_n * \overline{v(s)}ds - \overline{\widehat{v}(0)} \int_{\mathbb{R}} \theta_n * \gamma_H(\frac{s}{n})\theta(s)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \gamma_H(s)\check{\theta}_n * \overline{v(s)}ds - \overline{\widehat{v}(0)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \theta(t)\gamma_H(\frac{s-t}{n})\theta(s)ds \\
&\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \gamma_H(s)\overline{v(s)}ds.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{I_{Z_H}}(u_n, v_n) &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}(\int_{\mathbb{R}} u * \gamma_H(s)\overline{v(s)}ds - \overline{\widehat{v}(0)} \int_{\mathbb{R}} \gamma_H(s)\check{u}(s)ds - \widehat{u}(0) \int_{\mathbb{R}} \gamma_H(s)\overline{v(s)}ds) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(s)}\frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\}dtds.
\end{aligned}$$

De plus, $\Gamma_{I_{Z_H}}(u_n, v_n) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_n(t)\overline{v_n(s)}\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds$, donc

$$\Gamma_{I_{Z_H}}(u_n, v_n) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(s)}\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds - \widehat{u}(0) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)\overline{v(s)}\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds$$
$$-\overline{\widehat{v}(0)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\theta_n(s)\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds + \widehat{u}(0)\overline{\widehat{v}(0)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)\theta_n(s)\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds.$$

Or,

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)\overline{v(s)}\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds| &= |\int_{\mathbb{R}} \int_{|t|\leq 1} \theta(t)\overline{v(s)}\mathbf{E}(I_{Z_H}(\frac{t}{n})I_{Z_H}(s))dtds| \\
&\leq \frac{1}{n^{H/2}} C(I_{Z_H}) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\theta(t)\overline{v(s)}||t|^{H/2}\mathbf{E}(I_{Z_H}(s)^2)^{1/2}dtds \\
&\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue on montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\theta_n(s)\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)\theta_n(s)\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds = 0.$$

Ainsi $\Gamma_{I_{Z_H}}(u_n, v_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(s)}\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds = \Gamma_{I_{Z_H}}(u, v)$ et par unicité de la limite

$$\Gamma_{I_{Z_H}}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v}(s)\frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\}dtds.$$

**Proposition 5.3.0.8.** *Pour $0 < H < 1$, le processus $\{I_{Z_H}(t), t \in \mathbb{R}\}$ est le mouvement Brownien Fractionnaire.*

**preuve** D'après ce qui précède $I_{Z_H}$ définit un processus généralisé gaussien centré sur $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ tel que pour tout $u, v \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$,
$\Gamma_{I_{Z_H}}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)v(s)\frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\}dtds = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)v(s)\mathbf{E}(I_{Z_H}(t)I_{Z_H}(s))dtds.$

Soit $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts pour $i = 1, \ldots, n$ et $k \in \mathbb{N}$ on pose
$\theta_k^i : x \mapsto \theta_k(t_i - x) \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ ; presque sûrement, $t \mapsto I_{Z_H}(t) \in \mathcal{C}_\alpha^{H-\alpha}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc
$< I_{Z_H}, \theta_k^i >= I_{Z_H} * \theta_k(t_i) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I_{Z_H}(t_i)$ presque sûrement.

Ainsi $(I_{Z_H}(t_1), \ldots, I_{Z_H}(t_n))$ est un vecteur gaussien centré et on en déduit que $\{I_{Z_H}(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus gaussien centré.

$I_{Z_H}(0) = 0$ par définition de $I_{Z_H}$.

$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(s)} \left( \mathbf{E}(I_{Z_H}(t) I_{Z_H}(s)) - \frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\} \right) dtds = 0,$
pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Or, $t \mapsto \mathbf{E}(I_{Z_H}^2) \in \mathcal{C}_2^H(\mathbb{R})$ donc $(t,s) \mapsto \mathbf{E}(I_{Z_H}(t) I_{Z_H}(s)) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ et $(t,s) \mapsto \mathbf{E}(I_{Z_H}(t) I_{Z_H}(s)) - \frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ . On en déduit que

$$\mathbf{E}(I_{Z_H}(t) I_{Z_H}(s)) = \frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\}.$$

Enfin, presque sûrement pour tout $0 < \alpha < H$, $t \mapsto I_{Z_H}(t) \in \mathcal{C}_{\alpha+1}^{H-\alpha}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

On en conclut que presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$B_H(t,\omega) = C_H(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_H(t-k) S_k^{(H)}(\omega) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j(H+1/2)} 2^{j/2} \Psi_H(2^j t - k) \epsilon_{j,k}(\omega) - b_0(\omega)),$$

avec convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$ d'après la proposition 4.1.0.3 p.33.

On a obtenu une décomposition en ondelettes du mouvement brownien fractionnaire qui présente de nombreux avantages.
Elle isole les termes de basses fréquences qui font intervenir une marche aléatoire de processus FARIMA et ceux de hautes fréquences qui modélisent les fluctuations. Elle est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$, et elle apporte des renseignements sur la régularité du processus. Enfin, elle permet d'obtenir la construction de processus non gaussiens dont les propriétés du second ordre sont les mêmes que celles du mouvement brownien fractionnaire.
Cependant, la spécificité des fonctions d'ondelettes engendre de nouvelles difficultés dans la simulation du mouvement brownien fractionnaire par cette méthode.

# Annexe A

# Rappels et notations concernant les distributions tempérées

## A.1 L'espace de Schwartz

### A.1.1 Définition

**Définition A.1.1.1.** *L'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, est formé des fonctions à décroissance rapide $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telles que pour tout $N, j \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\varphi^{(j)}(x)| < +\infty.$$

*On note $\pi_{N,j}(\varphi) = \sup_{0\leq l\leq j}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\varphi^{(l)}(x)|$ et $\pi_N(\varphi) = \pi_{N,0}(\varphi)$.*
*On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de la topologie induite par cette famille de semi-normes.*

**Remarque A.1.1.1.** $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \cap_{1\leq p\leq\infty} L^p(\mathbb{R})$.

**Définition A.1.1.2.** *L'espace des fonctions tempérées est formé des fonctions à croissance lente $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telles que pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe $c \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$|f^{(j)}(x)| \leq c(1+|x|)^N.$$

**Définition A.1.1.3.** *Voici une liste d'applications linéaires continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même :*
*a ) les translations : $\tau_t\varphi(x) := \varphi(x-t)$, où $t \in \mathbb{R}$ ;*
*b ) les dilatations : $\partial_\lambda\varphi(x) := \varphi(x/\lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;*
*c ) les dérivations : $\partial^j\varphi(x) := \varphi^{(j)}(x)$, où $j \in \mathbb{N}$ ;*
*d ) les multiplications : $f\varphi(x) := f(x)\varphi(x)$, où $f$ est une fonction tempérée ;*
*e ) la transformation de Fourier : $\widehat{\varphi}(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-ixt}dt$ ;*
*f ) les convolutions : $\varphi * \psi(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t)\psi(t)dt$, où $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*

**Théorème A.1.1.1.** *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même.*

**Proposition A.1.1.1.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$,*
*a ) $\widehat{\tau_t\varphi}(\xi) = e^{-it\xi}\widehat{\varphi}(\xi)$ ;*
*b ) $\widehat{\partial_\lambda\varphi}(\xi) = |\lambda|\partial_{1/\lambda}\widehat{\varphi}(\xi)$ ;*
*c ) $\widehat{\varphi^{(j)}}(\xi) = (i\xi)^j\widehat{\varphi}(\xi)$ ;*
*d ) $\widehat{(-ix)^j\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}^{(j)}(\xi)$ ;*

*e )* $\widehat{\widehat{\varphi}}(\xi) = 2\pi\check{\varphi}(\xi) = 2\pi\partial_{-1}\varphi(\xi)$ *;*
*f )* $\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)$ *;*
*g )* $\widehat{\psi\varphi}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}(\xi)$ *;*
*h )* $(\varphi * \psi)^{(j)}(\xi) = \varphi^{(j)} * \psi(\xi) = \varphi * \psi^{(j)}(\xi)$.

**Remarque A.1.1.2.** *Soit* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
*1 )* $\forall N, j \in \mathbb{N}$ $\pi_{N,j}(\widehat{\varphi}) \leq C_{N,j}\pi_{2+j,N}(\varphi)$
*2 )* $\forall N, j \in \mathbb{N}$ $\pi_{N,j}(\varphi) \leq \frac{1}{2\pi}C_{N,j}\pi_{2+j,N}(\widehat{\varphi})$.

**preuve**
1 ) Soit $\xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq l \leq j$,
si $|\xi| \leq 1$, $(1+|\xi|)^N|\widehat{\varphi}^{(l)}(\xi)| \leq 2^N|\widehat{(-ix)^l\varphi}(\xi)| \leq 2^{N+1}\pi_{2+l}(\varphi) \leq 2^{N+1}\pi_{2+j,N}(\varphi)$.
Si $|\xi| \geq 1$, $(1+|\xi|)^N|\widehat{\varphi}^{(l)}(\xi)| \leq 2^N|(\widehat{(-ix)^l\varphi})^{(N)}(\xi)| \leq C_{N,l}\pi_{2+l,N}(\varphi) \leq C_{N,l}\pi_{2+j,N}(\varphi)$.
Ainsi $\pi_{N,j}(\widehat{\varphi}) \leq C_{N,j}\pi_{2+j,N}(\varphi)$.
2 )$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi}\check{\widehat{\widehat{\varphi}}}(\xi)$.

### A.1.2 Les espaces $\mathcal{S}_j(\mathbb{R}), j \in \mathbb{N}$

**Définition A.1.2.1.** *Soit* $j \in \mathbb{N}$ *on définit les epaces*

$$\mathcal{S}_j(\mathbb{R}) := \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}} x^k\varphi(x)dx = 0, \ \ 0 \leq k \leq j\},$$

$\mathcal{S}_{(0)}(\mathbb{R}) := \cap_j \mathcal{S}_j(\mathbb{R})$.

**Remarque A.1.2.1.**

$$\mathcal{S}_j(\mathbb{R}) := \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); \widehat{\varphi}^{(j)}(0) = 0, \ \ 0 \leq k \leq j\}.$$

**Proposition A.1.2.1.** *Pour tout* $j \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{S}_j(\mathbb{R}) := \{\varphi^{(j+1)}; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\}.$$

**preuve** Comme $\widehat{\varphi^{(j+1)}}(\xi) = (i\xi)^{j+1}\widehat{\varphi}(\xi)$

$$\{\varphi^{(j+1)}; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{S}_j(\mathbb{R}).$$

On raisonne par récurrence pour montrer l'autre inclusion.
Soit $\varphi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ on pose $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$.
Soit $N \in \mathbb{N}$, $(1+x)^N\Phi(x) = -\int_x^{+\infty}(1+x)^N\varphi(t)dt$ si $x \geq 0$
donc, $(1+|x|)^N|\Phi(x)| \leq \pi_{N+2}(\varphi)$ si $x \geq 0$.
$(1-x)^N\Phi(x) = -\int_{-\infty}^{x}(1-x)^N\varphi(t)dt$ si $x \leq 0$
donc, $(1+|x|)^N|\Phi(x)| \leq \pi_{N+2}(\varphi)$ si $x \leq 0$.
Ainsi

$$\pi_N(\Phi) \leq \pi_{N+2}(\varphi).$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$\pi_{N,j}(\Phi) \leq \pi_{N+2,j}(\varphi)$$

donc $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi = \Phi'$.
Supposons avoir démontré que $\mathcal{S}_j(\mathbb{R}) := \{\varphi^{(j+1)}; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\}$ pour $j \in \mathbb{N}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}_{j+1}(\mathbb{R})$ il existe $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \widetilde{\varphi}^{(j+1)}$.
Comme $\varphi \in \mathcal{S}_{j+1}(\mathbb{R})$, $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, et d'après le premier cas

$$\varphi = \Phi^{(j+2)} \quad \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La propriété est ainsi démontrée par récurrence.

## A.2 L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$

**Définition A.2.0.2.** *L'espace des distibutions tempérées est défini par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R})' := \{T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}; T \text{ est linéaire et continue } \}.$$

*L'espace des distibutions tempérées est donc le dual de l'espace de Schwartz.*

**Remarque A.2.0.2.** $\mathcal{S}(\mathbb{R})' \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})'$ *et* $\mathcal{S}(\mathbb{R})' \subset \mathcal{S}_j(\mathbb{R})'$ *pour tout* $j \in \mathbb{N}$.

**Définition A.2.0.3.** *On définit les applications linéaires continues suivantes sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ *par transposition d'applications linéaires continues sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *:*
*a ) les translations :* $< \tau_t T, \varphi >:=< T, \tau_{-t}\varphi >$, *où* $t \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *;*
*b ) les dilatations :* $< \partial_\lambda T, \varphi >:= |\lambda| < T, \partial_{1/\lambda}\varphi >$, *où* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *;*
*c ) les dérivations :* $< T^{(j)}, \varphi >:= (-1)^j < T, \varphi^{(j)} >$, *où* $j \in \mathbb{N}$ *;*
*d ) les multiplications :* $< fT, \varphi >:=< T, f\varphi >$, *où* $f$ *est une fonction tempérée ;*
*e ) la transformation de Fourier :* $< \widehat{T}, \varphi >:=< T, \widehat{\varphi} >$ *;*
*f ) les convolutions :* $< T * \psi, \varphi >:=< T, \check{\psi} * \varphi >$, *où* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

**Proposition A.2.0.2.** *Soit* $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$,
*a )* $\widehat{\tau_t T}(\xi) = e^{-it\xi}\widehat{T}(\xi)$ *;*
*b )* $\widehat{\partial_\lambda T} = |\lambda|\partial_{1/\lambda}\widehat{T}$ *;*
*c )* $\widehat{T^{(j)}} = (i\xi)^j\widehat{T}$ *;*
*d )* $\widehat{(-ix)^j T} = \widehat{T}^{(j)}$ *;*
*e )* $\widehat{\widehat{T}} = 2\pi\check{T}$ *;*
*f )* $\widehat{T * \psi}(\xi) = \widehat{T}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)$ *;*
*g )* $\widehat{\psi T} = \frac{1}{2\pi}\widehat{T} * \widehat{\psi}$ *;*
*h )* $(T * \psi)^{(j)} = T^{(j)} * \psi = T * \psi^{(j)}$.

# Bibliographie


[1] Meyer Y., Sellan F., Taqqu M.S. (1999). Wavelets, Generalised White Noise and Fractional Integration : The Synthesis of Fractional Brownian Motion, Vol.5, Issue 5, The Journal of Fourier Analysis and Applications.

[2] Guelfand I.M., Chilov G.E. (1962). Les Distributions, Tome 1, Dunod, Paris.

[3] Guelfand I.M., Vilenkin N.Y. (1967). Les Distributions : Applications de l'Analyse Harmonique, Tome 4, Dunod, Paris.

[4] Hernandez E., Weiss G.(1996). A First Course on Wavelets, CRC Press, Boca Raton, FL.

[5] Hörmander L. (1983). The Analysis of Linear Partial Di erntial Operators 1 : Distribution Theory and Fourier Analysis , Springer-Verlag, Berlin Heidelberg NewYork Tokyo.

[6] Lifshits M.A. (1995). Gaussian Random Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

[7] Rudin W. (1998). Analyse réelle et complexe, Dunod, Paris.

[8] Revuz D. (1997). Probabilités , Hermann, Paris.

[9] Willem M. (1995). Analyse harmonique réelle, Hermann, Paris.