<u>*DOCUMENT DE SYNTHÈSE*</u>

UNIVERSITÉ DE POITIERS

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Olivier FRÉCON

Soutenue le 19 juin 2008

SEMI-SIMPLICITÉ ET UNIPOTENCE

DANS LES

GROUPES DE RANG DE MORLEY FINI

Rapporteurs : A. V. Borovik (Université de Manchester)
A. Pillay (Université de Leeds)
J. S. Wilson (Université d'Oxford)

Jury : T. Altinel (Université de Lyon)
B. Poizat (Université de Lyon)
P. Tauvel (Université de Poitiers)
M. Van Leeuwen (Université de Poitiers)
F. O. Wagner (Université de Lyon)
J. S. Wilson (Université d'Oxford)

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce *document de synthèse* est un résumé de mes travaux de recherches. Ceux-ci concernent, presque exclusivement, les *groupes de rang de Morley fini*. Ces groupes forment une généralisation modèle-théorique des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos. En effet, le *rang de Morley* est une dimension abstraite en théorie des modèles, et ses propriétés sont très proches de celles de la dimension de Zariski, lorsque le corps de base est algébriquement clos. Ainsi, les groupes de rang de Morley fini permettent une approche modèle-théorique de la géométrie algébrique [38]. Ceci se traduit par le fait que l'ensemble des études portant sur les groupes de rang de Morley fini concernent, de près ou de loin, leurs similitudes et différences par rapport aux groupes algébriques. Plus précisément, la question centrale du sujet est la *conjecture de Cherlin-Zil'ber* (dite aussi *conjecture d'algébricité*), qui dit que tout groupe simple et infini de rang de Morley fini est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

L'analyse des groupes de rang de Morley fini a commencé dans les années soixante-dix avec, notamment, des travaux de A. Macintyre sur la théorie des corps [33]. Les années suivantes, la théorie s'est développée sous l'influence de G. Cherlin, B. Zil'ber, B. Poizat, A.V. Borovik, A. Nesin.... Cependant, après plus de trente ans de recherches et de nombreuses publications sur le sujet, ces groupes restent toujours aussi mystérieux. En effet, non seulement la conjecture centrale semble autant, sinon plus, hors de portée, mais on ne sait toujours pas si le premier contre-exemple potentiel à cette conjecture, qui a été décrit par G. Cherlin [25] et est de rang de Morley trois, existe ou non.

Les travaux présentés ici ne concernent pas exclusivement la conjecture de Cherlin-Zil'ber. Plus généralement, on essaye de comprendre les analogies entre les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques sur un corps algébriquement clos. Ainsi, certains théorèmes sont effectivement des contributions à l'étude de la conjecture centrale, notamment le théorème 5.5.1. Par contre, des résultats présentés dans d'autres parties n'ont pas pour objectif premier de faire progresser la conjecture d'algébricité. C'est par exemple le cas de la section 6 dans laquelle, d'une part on cherche à comprendre ce qu'impliquerait la conjecture de Cherlin-Zil'ber, si elle s'avérait exacte, sur l'éventuelle linéarité de groupes non simples de rang de Morley fini. D'autre part on étudie l'éventuelle linéarité de certains groupes résolubles.

Concernant les travaux en lien, direct ou indirect, avec la conjecture centrale, ils ont tous la particularité de ne pas considérer l'existence d'involution dans les groupes étudiés. Ainsi, leur objet est essentiellement de comprendre la structure des *groupes simples connexes minimaux*, c'est-à-dire des groupes simples et connexes, dont les sous-groupes propres définissables et connexes sont résolubles. Le but ultime, certes hors de porté, étant de prouver que tout groupe simple de rang de Morley fini a une involution. Sinon, il s'agit de comprendre quelle pourrait être la structure d'un contre-exemple minimal à la conjecture de Cherlin-Zil'ber.

Pour plus de lisibilité, la bibliographie est séparée en deux parties. La première est la liste des publications dont je suis l'un des auteurs. La seconde est la bibliographie générale constituée de la liste des publications référencées dans ce mémoire, et auxquelles je n'ai pas contribué.

Chapitre 2

Généralités

Dans cette partie, nous rappelons brièvement ce que sont les groupes de rang de Morley fini, ainsi que leurs propriétés les plus remarquables. Rappelons d'abord que le *rang de Morley* est une dimension abstraite en théorie des modèles. Elle est apparue pour la première fois en 1965 [35]. Cependant, ce n'est que vers le milieu des années 70 que la théorie des *groupes* de rang de Morley fini a réellement démarré avec, notamment, l'énoncé de la conjecture de Cherlin-Zil'ber, qu'on rappelle ici.

Conjecture de Cherlin-Zil'ber. – *Tout groupe simple et infini de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.*

2.1 Définitions

Le rang de Morley est défini dans [34, p.215-218]. Ici nous rappelons juste une caractérisation simple des groupes de rang de Morley fini.

On fixe une structure $\mathcal{M}$, et on associe, à chaque ensemble interprétable non vide A, un rang noté $rk(A)$, appartenant à $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et défini par :

R1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $rk(A) \geq n+1$ si et seulement s'il existe une infinité de sous-ensembles interprétables non vides de A, deux à deux disjoints et de rang supèrieurs ou égaux à n.

Si $\mathcal{M}$ est ω-saturée, alors elle est de *rang de Morley fini* si et seulement si le rang de son ensemble de base est fini [34, p.218]. Aussi, une structure quelconque est de *rang de Morley fini* si et seulement si elle a une extension élémentaire ω-saturée de rang de Morley fini [34, Definition 6.2.5 p.218]. Dans ce cas, le rang de Morley de chaque ensemble non vide A interprétable dans $\mathcal{M}$ est $rk(A)$.

Cependant, le traitement axiomatique de [38, Introduction] donne une caractérisation des *groupes* de rang de Morley fini par un système d'axiomes de nature purement combinatoire. Outre le fait que cette caractérisation soit élémentaire, son principal avantage est de permettre de dire si un groupe est de rang de Morley fini sans avoir à regarder ses extensions élémentaires. Notons qu'ici, un groupe est une structure $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \cdots)$, où $(G, \cdot)$ est un groupe. Autrement dit, les groupes peuvent comporter une structure additionnelle.

Fait 2.1.1. – [38, p.49, 54 et 55] *Un groupe G est de rang de Morley fini si et seulement si l'application rk est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et satisfait les deux axiomes ci-dessous, pour toute fonction interprétable f entre deux ensembles interprétables A et B :*

R2. $\{b \in B : rk(f^{-1}(b)) = n\}$ *est interprétable pour chaque $n \in \mathbb{N}$;*

R3. *il existe un entier m tel que, pour tout $b \in B$, $f^{-1}(b)$ est infini dès qu'il contient m éléments distincts.*

Les groupes algébriques sur un corps algébriquement clos constituent la principale classe d'exemples de groupes de rang de Morley fini. Dans ce cas, les groupes définissables sont les groupes constructibles [38, p.117], et le rang de Morley est la dimension de Zariski. Parmi les autres exemples, on peut citer les produits directs de deux groupes algébriques sur des corps algébriquement clos distincts, le groupe $(\mathbb{Q}, +)$, ou encore le *groupe de Baudisch* [16], qui est connexe, non abélien et n'interprète aucun corps infini. D'un autre coté, les corps infinis de rang de Morley fini sont algébriquement clos, par l'un des théorèmes "fondateurs" de la théorie [33].

2.2 Programme de Borovik

Pour étudier la conjecture de Cherlin-Zil'ber, A.V. Borovik a établi un programme basé sur celui de la classification des groupes simples fini. Il s'agit d'analiser un contre-exemple potentiel minimal à la conjecture de Cherlin-Zil'ber à partir de ses involutions. Concrètement, on appelle *K^*-groupe* simple, tout groupe simple et infini de rang de Morley fini, dans lequel toutes les sections définissables, simples et propres sont isomorphes à des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos. Ensuite on regarde la structure des 2-sous-groupes de Sylow. D'après [20], les 2-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini sont conjugués et, si S est l'un d'eux, alors S a un unique sous-groupe d'indice fini S° qui est le produit central d'un 2-sous-groupe définissable U, connexe et d'exposant borné, et d'un 2-sous-groupe abélien divisible T sans sous-groupe infini d'exposant borné. De plus, cette décomposition de S° est unique, donc les groupes de rang de Morley fini se classent en quatre catégories distinctes :

- les groupes, dits *de type mixte*, dans lesquels U et T sont non triviaux ;
- les groupes, dits *de type pair*, dans lesquels on a $U \neq 1$ et $T = 1$;
- les groupes, dits *de type impair*, dans lesquels on a $U = 1$ et $T \neq 1$;

– les groupes, dits *de type dégénéré*, dans lesquels U et T sont triviaux. Il s'agit alors de montrer que les K^*-groupes simples de type pair ou impair vérifient la conjecture de Cherlin-Zil'ber, et qu'il n'en existe pas de type mixte ou dégénéré.

Les groupes simples de type pair ont été classifiés complètement, et la conjecture de Cherlin-Zil'ber a été vérifiées dans ce cas. C'est un travail auquel ont pris part plusieurs mathématiciens dont T. Altınel, A. Berkman, A.V. Borovik, G. Cherlin, L.-J. Corredor, E. Jaligot et A. Nesin. La vérification de la conjecture de Cherlin-Zil'ber pour les groupes simples de type mixte, autrement dit l'élimination des groupes simples de type mixte, découle de la classification des groupes simples de type pair en suivant les raisonnements d'un ancien théorème de E. Jaligot [31]. Ces résultats ont été exposés dans [13].

Concernant les groupes de type impair, il y a de nombreux travaux de A. Berkman, A.V. Borovik, J. Burdges, G. Cherlin, A. Deloro, E. Jaligot, A. Nesin ..., et le problème est désormais réduit à des "petits" groupes.

En revanche, nos connaissances sur les groupes de types dégénérés sont très minces. En fait, A.V. Borovik, J. Burdges et G. Cherlin ont prouvé qu'un tel groupe n'a pas d'involution [18]. Une fois que le groupe n'a plus d'involution, on sait dire très peu de chose sur le groupe. L'un des objectifs de mon travail est d'étudier les groupes de rang de Morley fini sans involution, ou plus généralement, d'énoncer des résultats indépendemment de la présence d'involution dans le groupe. S'il s'avère que certains résultats peuvent être utile pour l'étude des groupes avec involution, notre but sera essentiellement l'analyse des K^*-groupes simples de type dégénéré. En fait, ces groupes sont des *groupes simples connexes minimaux*, c'est-à-dire des groupes simples et infinis, dans lesquels tous les sous-groupes définissables, connexes et propres sont résolubles. En particulier, ceci justifie l'intérêt porté aux groupes résolubles dans l'ensemble de mes travaux.

2.3 Groupes simples connexes minimaux

Les applications des résultats présentés dans ce mémoire à la conjecture de Cherlin-Zil'ber concernent essentiellement les groupes simples, connexes et minimaux. Dans l'idéal, il s'agit de trouver une involution dans un tel groupe, ce qui revient à prouver que les groupes de rang de Morley fini sans involution sont résolubles. Autrement dit, on veut démontrer un analogue au théorème de Feit-Thompson pour les groupes de rang de Morley fini. Ceci est clairement la partie la plus difficile de la conjecture de Cherlin-Zil'ber et, à l'heure actuelle, elle apparaît inattaquable. En fait, le principal problème vient de l'existence possible de groupes de rang de Morley fini simples et sans torsion. D'autant plus que l'existence d'un groupe connexe non nilpotent et sans torsion est désormais établie dans [17] (cf. introduction de la section 3).

Pour cette raison, dans ce travail on essaye au maximum de ne pas supposer l'existence de torsion dans les groupes.

2.4 Linéarité des groupes non simples

Pour interpréter un corps algébriquement clos dans un groupe de rang de Morley fini, il suffit de considérer une section définissable connexe résoluble et non nilpotente, puis d'appliquer le théorème de Zil'ber sur les corps [19, Theorem 9.1]. Bien que l'on sâche trouver des corps algébriquement clos par d'autres méthodes (cf. [19, Section 6.3] ou [32]), cela reste la technique la plus utilisée. Ainsi, il est remarquable que ce soit des propriétés de linéarité de groupes *résolubles* qui amorcent (presque) tout raisonnement de linéarité pour les groupes simples. Il semble donc légitime de s'interroger sur l'éventuelle linéarité des groupes de rang de Morley fini résolubles ou, plus généralement, non nécéssairement simples. Le principal théorème de [5] apporte une réponse positive pour les groupes sans centre, résolubles et connexes, dont le sous-groupe dérivé est sans torsion.

Théorème 2.4.1. – [5, Theorem 2.1] *Soit G un groupe sans centre, résoluble et connexe de rang de Morley fini. Si G' est sans torsion, alors il y a une représentation linéaire fidèle interprétable de G sur l'anneau $K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$, où $K_1, \cdots, K_n$ sont des corps interprétables.*

Pour donner une forme générale à l'ensemble de ces questions, il est proposé, dans la section 6, une conjecture de linéarité concernant les groupes non nécessairement simples.

Chapitre 3

Tores

G. Cherlin a introduit une première notion approchant celle des tores algébriques. En effet, il définit un *bon tore* comme un groupe abélien divisible de rang de Morley fini, dont tout sous-groupe définissable est la *clôture définissable* de sa torsion [24]. On rappelle que la *clôture définissable* d'un sous-ensemble X d'un groupe de rang de Morley fini est le plus petit sous-groupe définissable contenant X. Il existe par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables, et il est noté $d(X)$. La notion de bon tore est motivée par le fait que F.O. Wagner a montré que le groupe multiplicatif d'un corps de rang de Morley fini de caractéristique non nulle est un bon tore [40]. Les principaux résultats de [24] se résument ainsi :

Fait 3.0.2. – [24] *Soient G un groupe de rang de Morley fini, et T un bon tore de G. Alors,*

- (Rigidity I) *tout sous-groupe définissable et connexe qui normalise T centralise T ;*
- (Nongenericity) *si T est central dans G° et si $\mathscr{F}$ est une famille uniformément définissable de sous-groupes de G° ne contenant pas T, l'union $\cup\mathscr{F}$ n'est pas générique dans G ;*
- (Covering Theorem) *le sous-groupe $C_G(T)^\circ$ est* généreux *dans G ;*
- *les bons tores maximaux de G sont conjugués.*

Notons qu'un sous-ensemble définissable X d'un groupe G de rang de Morley fini est dit *généreux* dans G si l'union de ses conjugués est un sous-ensemble générique de G, autrement dit si $rk(\cup_{g\in G}X^g) = rk(G)$. Cette notion, introduite dans [30], imite les ensembles constructibles qui *contiennent un ouvert dense*.

Plus généralement, A.V. Borovik a introduit les *tores décents*, comme étant les groupes abéliens et divisibles T de rang de Morley fini pour lesquels $T/\Phi(T)$ est un bon tore. On rappelle que, pour tout groupe G de rang de Morley fini, le *sous-groupes de Frattini (connexe)* $\Phi(G)$ est l'intersection des sous-groupes propres définissables et connexes maximaux. Comme il est écrit à la fin de [24], la preuve du fait 3.0.2 se généralise aux tores décents.

Ma contribution à l'étude des tores décents est la suivante.

Proposition 3.0.3. – [2] *Soient G un groupe de rang de Morley fini et T un tore décent maximal de G. Alors,*

- *si G^* est une extension élémentaire de G, l'extension canonique T^* de T dans G^* est un tore décent maximal de G^* ;*
- *si N est un sous-groupe normal et définissable de G, les tores décents maximaux de G/N sont les images homomorphiques des tores décents maximaux de G.*

Les notions de bon tore et de tore décent sont très efficaces et élégantes pour plusieurs études concernant les groupes de rang de Morley fini. Cependant, il est désormais connu que de tels tores n'ont pas certaines propriétés élémentaires des tores algébriques. En effet, le principal résultat de [17] donne l'existence d'un *mauvais corps*, c'est-à-dire d'une structure $(K, +, \cdot\ , T)$ de rang de Morley fini où $(K, +, \cdot)$ est un corps et T un sous-groupe propre et infini de $K^\times$. De plus, le mauvais corps K construit dans [17] est de caractéristique zéro, avec T sans torsion. Ainsi le groupe $G = K_+ \rtimes T$, où T agit par multiplication sur K_+, est un groupe de rang de Morley fini, connexe et non nilpotent, et ses bons tores et tores décents sont tous triviaux puisqu'il est sans torsion. Or un groupe algébrique connexe et non nilpotent sur un corps algébriquement clos a toujours un tore non trivial.

Les *pseudo-tores* sont introduits dans [6] pour tenter de remédier à ce problème. Leur définition semble fournir l'analogue le plus général possible aux tores algébriques.

3.1 Pseudo-tores

Un groupe abélien et divisible de rang de Morley fini est un *pseudo-tore* s'il n'a aucun quotient définissable et définissablement isomorphe à K_+ pour un corps interprétable K. Dans un groupe algébrique, tout comme les bons tores et les tores décents, les pseudo-tores sont des extensions des tores par des variétés abéliennes. Les principaux résultats de [6] concernant les pseudo-tores se résument ainsi.

Théorème 3.1.1. – [6] *Soient G un groupe de rang de Morley fini, et T un pseudo-tore de G. Alors,*

(i) (Rigidity) *tout sous-groupe définissable et connexe de G qui normalise T centralise T ;*

(ii) (Nongenericity) *si T est central dans G et si $\mathscr{F}$ est une famille uniformément définissable de sous-groupes de G ne contenant pas T, l'union $\cup\mathscr{F}$ n'est pas générique dans G ;*

(iii) (Covering Theorem) *le sous-groupe* $C_G(T)^\circ$ *est généreux dans* G *;*
(iν) *si* G *est connexe,* $C_G(T)$ *est connexe ;*
(ν) *les pseudo-tores maximaux de* G *sont conjugués.*
(νi) *si* N *est un sous-groupe normal et définissable de* G*, les pseudo-tores maximaux de* G/N *sont les images homomorphiques des pseudo-tores maximaux de* G*.*

La preuve de (i) est très différente de celle du fait 3.0.2 (Rigidity I), puisqu'un pseudo-tore n'a pas nécessairement de la torsion. La preuve de (ii) est une adaptation de celle de fait 3.0.2 (Nongenericity) au contexte des pseudo-tores. Il est remarquable que cette adaptation ait été l'occasion de remarquer que l'hypothèse de connexité sur le groupe ambient n'est pas réellement nécessaire. Le résultat ainsi énoncé a alors permis de prouver (iν). Notons que, lorsque ce dernier résultat a été établi, il était déjà connu pour les tores décents par une preuve différente de T. Altınel et J. Burdges [14].

D'autre part, une fois ces résultats prouvés, la conjugaison des pseudo-tores maximaux (ν), et aussi (νi), sont obtenus sans difficulté, par une simple adaptation des preuves de ces résultats pour les bons tores et les tores décents.

L'analyse des pseudo-tores s'est poursuivie dans [10], et le résultat suivant y est prouvé.

Théorème 3.1.2. – [10, Theorem 3.1] *Soit* G *un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini. Alors* $T \cap F(G)$ *est central dans* G *pour tout pseudo-tore* T *de* G*.*

Ce théorème est non trivial, et il n'avait pas d'analogue pour les bons tores et les tores décents. En fait, il s'agit d'un résultat central pour les décompositions des groupes résolubles de rang de Morley fini, lesquelles sont analysées dans [10] et la section suivante.

3.2 À propos d'une conjecture de Nesin

Tout groupe algébrique affine connexe et résoluble G se décompose sous la forme $G = U \rtimes T$ où U est le radical unipotent de G et T un tore maximal quelconque de G. Étant donnée cette propriété, A. Nesin a conjecturé que tout groupe résoluble et connexe G de rang de Morley fini a un sous-groupe normal, définissable et nilpotent U avec un complément abélien ([37, Conjecture p.687] et [19, Section 9.3]).

Un résultat de F.O. Wagner [41] a fourni un progrès notable pour cette question. En effet, il a montré que tout groupe résoluble et connexe G de rang de Morley fini a un sous-groupe nilpotent définissable et connexe C tel que $G = F(G)^\circ C$, où $F(G)$ désigne le *sous-groupe de Fitting* de G. On rappelle que le *sous-groupe de Fitting* d'un groupe quelconque G est le sous-groupe engendré par ses sous-groupes normaux et nilpotents. Dans un groupe de rang de Morley fini, ce sous-groupe est définissable et nilpotent [19, Theorem 7.3].

D'un autre coté, il s'est avéré qu'on peut facilement construire un contre-exemple à la conjecture de Nesin en considérant un quotient par un sous-groupe fini d'un produit direct de deux groupes algébriques sur des corps algébriquement clos de caractéristiques distinctes. En fait, le résultat suivant est vrai.

Proposition 3.2.1. – [10, Proposition 1.1] *Il existe un groupe connexe et résoluble G de rang de Morley fini, tel qu'aucun de ses sous-groupes nilpotents normaux n'ait un complément nilpotent.*

Cependant, les contre-exemples connus G à la conjecture de Nesin ont tous d'une part un centre non trivial, d'autre part un sous-groupe abélien et divisible T tel que $G = F(G)^\circ T$ et tel que $F(G)^\circ \cap T$ est fini. On peut donc se demander d'une part si la conjecture de Nesin est vraie pour les groupes sans centre, d'autre part si tout groupe résoluble et connexe G de rang de Morley fini a un sous-groupe normal, définissable et nilpotent U et un sous-groupe abélien divisible T tel que $G = UT$ et tel que $U \cap T$ est fini. Dans [10], je montre que la réponse à ces questions dépend entièrement de la conjecture suivante.

Conjecture 3.2.2. – [10, Conjecture 2.3] Pour tout corps K de rang de Morley fini, les sous-groupes définissables et connexes de K^* sont des pseudo-tores.

Une raison de croire à cette conjecture est qu'un théorème de F.O. Wagner montre, en particulier, qu'elle est vraie pour les corps de caractéristique non nulle [40]. Les deux résultats ci-dessous donnent les liens entre la conjecture de Nesin et la conjecture 3.2.2.

Théorème 3.2.3. – [10, Theorem 2.11] *Si la conjecture 3.2.2 n'est pas vraie, alors il existe un groupe résoluble et connexe G de rang de Morley fini avec les propriétés suivantes :*

- *G est sans centre ;*
- *G n'admet aucune décomposition $G = UT$ en un produit d'un sous-groupe normal et nilpotent U par un sous-groupe abélien T ;*
- *G n'admet aucune décomposition $G = UC$ en un produit d'un sous-groupe normal et nilpotent U par un sous-groupe nilpotent C tel que $U \cap C$ soit fini.*

À l'inverse, si la conjecture 3.2.2 est vraie, les groupes résolubles et connexes ont de bonnes propriétés.

Théorème 3.2.4. – [10, Section 4] *Soit G un groupe résoluble et connexe de rang de Morley fini. Si la conjecture 3.2.2 est vraie, alors :*
- *G a un sous-groupe divisible et abélien T tel que $G = F(G)^\circ T$ et tel que $F(G)^\circ \cap T$ est fini ;*
- *si G est sans centre, $G = F(G) \rtimes T$ pour tout pseudo-tore maximal T de G, et les compléments définissables de $F(G)$ dans G sont conjugués.*

La preuve du théorème 3.2.4 est entièrement basée sur l'étude des pseudo-tores et, en premier lieu, sur le théorème 3.1.2.

Une dernière question concerne la définissabilité des compléments[1]. Plus précisément, on se pose les questions suivantes :
- peut-on choisir T définissable dans la première partie du Théorème 3.2.4 ?
- dans la seconde partie, est-ce que tout complément de $F(G)$ dans G est définissable ?

Les réponses aux deux questions sont négatives. En effet, fixons un corps K algébriquement clos et de caractéristique nulle, et considérons les groupes

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in K^*, \, (a,\, b,\, c) \in K \times K \times K \right\} \quad \text{et}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & y & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x,\, y) \in K^* \times K^*, \, a_i \in K \text{ pour } i = 1, \cdots, 6 \right\}.$$

Alors on montre que, si $G = UT$ pour deux sous-groupes nilpotents U et T avec U normal dans G, U est nécessairement le radical unipotent. De plus, si T est définissable, alors il contient le centre de G, donc $U \cap T$ est infini [10, Corollary 5.2].

D'autre part, dans le groupe algébrique connexe, résoluble et sans centre H, les sous-groupes de Cartan ne sont pas des tores, et il est alors facile de trouver un complément non fermé au radical unipotent (qui est égal à $H' = F(H)$ [10, Remark 4.3]).

3.3 Groupes sous-ordinaires

Un *mauvais groupe* est un groupe non résoluble et connexe G de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes propres définissables et connexes sont nilpotents. Un *groupe ordinaire* est un groupe G de rang de Morley fini qui n'interprète pas de mauvais corps, et dont aucune section définissable

[1] Cette question m'a été posée par T. Altınel, et c'est elle qui a motivé l'écriture du théorème 3.1.2, ainsi que la deuxième partie du théorème 3.2.4.

n'est un mauvais groupe. Il a été conjecturé pendant longtemps que tous les groupes de rang de Morley fini étaient ordinaires, avant que cette conjecture ne soit finalement réfutée par la construction d'un mauvais corps [17].

Les groupes ordinaires ont eu un rôle central dans le développement des études portant sur la conjecture de Cherlin-Zil'ber. En effet, la plupart des théorèmes fondamentaux concernant cette conjecture ont d'abord été prouvés pour les groupes ordinaires. En fait, les travaux sur les groupes ordinaires ont souvent permis d'établir une ligne directrice pour les preuves dans le cas général. Cela dit, l'hypothèse d'ordinarité ne peut être intéressante que pour l'étude des groupes non dégénérés, puisqu'un groupe ordinaire connexe et non nilpotent a toujours une involution [19, Theorem B1]. On aimerait donc une hypothèse analogue pour l'analyse des groupes de type dégénéré, et les groupes *sous-ordinaires* vont permettre cela.

Concrètement, il est facile de voir que, dans tout groupe ordinaire, toute section définissable, connexe et non nilpotente a un section définissable U/V qui est définissablement isomorphe à K^* pour un corps interprétable infini K. On affaiblit au maximum cette hypothèse, et on dit qu'un groupe G de rang de Morley fini est *sous-ordinaire* si ses sections définissables, connexes et non nilpotentes ont toutes une section non triviale, définissable et connexe U/V qui n'est définissablement isomorphe à aucun groupe additif K_+ pour un corps interprétable K.

En particulier, tout groupe ordinaire est sous-ordinaire. Par contre, il existe des groupes sous-ordinaires qui ne sont pas ordinaires. En effet, il suffit de considèrer le groupe additif K_+ d'un mauvais corps. Comme K_+ est abélien, il est sous-ordinaire, mais il n'est pas ordinaire puisqu'il y a un mauvais corps interprétable. Il y a bien d'autres exemples de groupes sous-ordinaires :

- les groupes nilpotents-par-finis de rang de Morley fini ;
- les groupes algébriques sur un corps (pas nécessairement pur) de rang de Morley fini et de caractéristique non nulle (cf. [36, Théorème 2.8] et [40]) ;
- les groupes localement finis de rang de Morley fini (cf. [38, Corollaire 3.32] et [19, Theorem 9.21]).

Les deux principaux intérêts de cette notion sont, d'une part qu'il semble difficile de trouver une involution dans tout groupe simple connexe minimal sous-ordinaire, ce qui fait de la sous-ordinarité un très bon analogue à l'ordinarité pour l'étude des groupes de type dégénéré. D'autre part, on ne connait pas de groupe de rang de Morley fini qui n'est pas sous-ordinaire, ce qui motive fortement l'étude de ces groupes.

Conjecture 3.3.1. – Tout groupe de rang de Morley fini est sous-ordinaire.

Il est montré dans [6] que la notion de groupe sous-ordinaire est fortement liée à celle de *corps approximativement exponentiel*, c'est-à-dire aux structures $(K, +, \cdot\ , *, L)$ de rang de Morley fini où $(K, +, \cdot\ , L)$ est un mauvais corps et $(L, \cdot\ , *)$ un corps. En effet, il est montré ceci.

Proposition 3.3.2. – *Tout groupe de rang de Morley fini est sous-ordinaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont vraies :*
– *il n'existe aucun corps approximativement exponentiel ;*
– *tout mauvais groupe a un pseudo-tore non trivial.*

Ainsi, la conjecture suivante est plus faible que la conjecture 3.3.1.

Conjecture 3.3.3. – Il n'existe aucun corps approximativement exponentiel.

L'analyse des groupes sous-ordinaires a été amorcée dans [6]. Il y est notamment montré le résultat suivant.

Théorème 3.3.4. – (Jaligot's Lemma, subtame version, [6, Theorem 4.3]) *Soit G un groupe sous-ordinaire simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts de G. Alors $F(B_1) \cap F(B_2) = 1$.*

Pour le prouver, on montre d'abord que le sous-groupe dérivé de tout groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble est sans pseudo-tore non trivial, puis on suit le même stratégie que dans la preuve originale [26, Proposition 3.11], qui concernait les groupes ordinaires.

3.4 Sous-groupes de Cartan

Par analogie aux sous-groupes de Cartan dans les groupes algébriques, on appelle *sous-groupe de Cartan* d'un groupe de rang de Morley fini, la composante connexe du centralisateur d'un pseudo-tore maximal. On sait qu'un tel sous-groupe C d'un groupe de rang de Morley fini G quelconque a les propriétés suivantes (cf. Théorème 3.1.1 et [6]) :
– C est un sous-groupe généreux de G ;
– si G est connexe, C est le centralisateur d'un pseudo-tore maximal ;
– $N_G(C)^\circ = C$.
De plus, par conjugaison des pseudo-tores, ils sont conjugués. Cependant, cette notion n'a pas été plus étudiée, du moins dans le cas général, pour la simple raison qu'elle n'aura pas de réel intérêt tant qu'on ne saura pas si un sous-groupe de Cartan est nilpotent.

Conjecture 3.4.1. – Tout sous-groupe de Cartan d'un groupe de rang de Morley fini est nilpotent.

Il s'avère que cette conjecture est juste une reformulation de la conjecture 3.3.1. En effet, cela suit d'une part de la définition d'un groupe sous-ordinaire, et du théorème 3.1.1 (νi), d'autre part du fait qu'un sous-groupe de Cartan d'un groupe sous-ordinaire est toujours nilpotent [6, Lemma 3.7].

D'un autre coté, à l'instar de ce qui se passe dans les groupes algébriques, les sous-groupes de Cartan des groupes sous-ordinaires connexes sont des sous-groupes nilpotents maximaux. Cela suit du théorème 3.1.1 (iν) et du fait que tout groupe nilpotent de rang de Morley fini se décompose en un produit central d'un sous-groupe divisible par un sous-groupe d'exposant borné [19, Theorem 6.8].

Finalement, dans les groupes de rang de Morley fini, ce ne sont pas les sous-groupes de Cartan qui seront les plus intéressants, mais les *sous-groupes de Carter*, qui sont présentés à la section 5. Ces deux notions sont équivalentes dans les groupes algébriques, mais nous ne savons pas si elles le sont dans les groupes de rang de Morley fini.

Chapitre 4

Groupes unipotents

La recherche d'un analogue convenable, pour les groupes de rang de Morley fini, à l'unipotence dans les groupes algébriques affines fait, depuis longtemps, l'objet d'études.

Un théorème fondamental, démontré indépendamment par A. Nesin et B. Zil'ber, dit que le sous-groupe dérivé de tout groupe résoluble et connexe de rang de Morley fini est nilpotent [19, Corollary 9.9]. C'est un analogue au théorème de Lie-Kolchin-Mal'cev [29, Sections 17.6 et 21.2] qui implique, en particulier, que le sous-groupe dérivé de tout groupe algébrique connexe et résoluble est unipotent. Cependant, nous avons besoin d'analogies plus fortes que la nilpotence avec l'unipotence algébrique.

Pour un entier premier p fixé, les p-sous-groupes définissables, connexes et d'exposant borné sont dits *p-unipotents*. Grâce au théorème ci-dessous, du à A. Nesin, ils offrent un analogue très convenable aux sous-groupes unipotents en caractéristique p.

Fait 4.0.2. – [19, Theorem 9.21] *Soit G un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini. Alors $G/F(G)^\circ$ est divisible et abélien.*

En conséquence, c'est en caractéristique zéro que nous avons besoin d'obtenir un analogue à l'unipotence. En trois étapes, nous sommes désormais arrivés à une approche relativement convenable de l'unipotence.

4.1 Groupes quasiunipotents

Un groupe G de rang de Morley fini est dit *quasiunipotent* s'il est nilpotent, connexe et sans tore décent non trivial. Le *radical quasiunipotent* d'un groupe G de rang de Morley fini est son sous-groupe engendré par ses sous-groupes définissables quasiunipotents normaux. Il s'agit donc d'un sous-groupe définissable et connexe contenu dans $F(G)^\circ$. Ces notions ont été introduites par A.V. Borovik et analysées par C. Altseimer et A. Berkman.

Il est notamment prouvé dans [15] que le radical quasiunipotent d'un groupe quelconque de rang de Morley fini est quasiunipotent.

Ma contribution à l'étude de ce sous-groupe est le résultat suivant, qui généralise 4.0.2. Sa preuve est en grande partie basée sur les propriétés des *sous-groupes de Carter* (cf. Section 5).

Proposition 4.1.1. – [9, Proposition 3.26] *Soit G un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini. Alors $G/Q(G)$ est divisible et abélien.*

Ce résultat est fondamental pour [9], et la quasiunipotence est ainsi efficace pour l'étude de la structure des groupes résolubles. Cependant, pour obtenir des applications aux contextes non résolubles, il a fallu affiner cette notion, et définir un *U-groupe*.

4.2 U-groupes

Dans un travail concernant les groupes de type impair, J. Burdges a eu besoin de définir les *$U_{0,r}$-groupes* [21]. Il s'agit désormais d'un notion centrale pour toutes les études concernant les groupes de rang de Morley fini. L'idée peut se résumer ainsi : il s'agit de distinguer, suivant leur "taille", certains sous-groupes définissables, sans torsion et, en un certain sens, minimaux. Ceci permet, par exemple, de préciser la structure d'un groupe abélien sans torsion, ce que l'on ne savait pas faire auparavant.

Les $U_{0,r}$-groupes ont aussi permis de définir un analogue plus fin que la quasiunipotence à l'unipotence : les *U-groupes* [1]. La définition nécessite l'introduction des groupes *indécomposables*.

Définition 4.2.1. – *Un groupe connexe et abélien A de rang de Morley fini est* indécomposable *s'il n'est pas la somme de deux sous-groupes définissables propres. Si $A \neq 1$, alors A a un unique sous-groupe propre définissable connexe maximal $J(A)$. Si $A = 1$, on note $J(1) = 1$.*

Pour tout entier $r > 0$ et tout groupe G de rang de Morley fini, on note $U_{0,r}(G)$ le sous-groupe engendré par les sous-groupes indécomposables A tel que $A/J(A)$ est un groupe sans torsion de rang de Morley r. Si $G = U_{0,r}(G)$, on dit que G est un $U_{0,r}$-groupe. *Aussi, on dit qu'un $U_{0,r}$-groupe est* homogène *si ses sous-groupes définissables et connexes sont des $U_{0,r}$-groupes.*

Dans tout groupe G de rang de Morley fini, on note $U(G)$ le sous-groupe engendré par les $U_{0,r}$-sous-groupes homogènes normaux pour r entier strictement positif, et par les sous-groupes normaux, définissables, connexes d'exposant borné. De plus, on dit que G est un U-groupe *si $G = U(G)$.*

Notons qu'un $U_{0,r}$-groupe *homogène* et résoluble est nilpotent et sans torsion [1, Proposition 3.8 et Corollary 3.9], donc un U-groupe résoluble est toujours quasiunipotent.

Les principales propriétés des U-groupes sont résumées dans le résultat ci-dessous.

Proposition 4.2.2. – [1, Theorem 5.4 et Corollary 5.8] *Soit G un U-groupe. Alors,*

– *tout quotient définissable de G est un U-groupe ;*
– *tout sous-groupe définissable et connexe de G est un U-groupe.*

De plus, si G est nilpotent, alors

– *pour tout entier $r > 0$, le $U_{0,r}$-sous-groupe $U_{0,r}(G)$ est homogène ;*
– *si r désigne le rang de Morley de G, il y a un sous-groupe définissable, connexe, d'exposant borné et caractéristique B dans G tel que*

$$G = B \times U_{0,1}(G) \times \cdots \times U_{0,r}(G).$$

Il n'est pas très difficile de montrer que le sous-groupe dérivé d'un groupe nilpotent et connexe de rang de Morley fini est un U-groupe [1, Proposition 4.4]. Ce qui est plus difficile, et bien plus intéressant, est le théorème suivant. En effet, c'est lui qui rend particulièment utile cette notion.

Théorème 4.2.3. – [1, Corollary 6.9] *Soit G un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini. Alors $G/U(G)$ est divisible et abélien.*

Un point délicat de la preuve est de montrer que, si un groupe abélien et connexe G de rang de Morley fini agit définissablement par conjugasion sur un $U_{0,r}$-groupe indécomposable H tel que $H = [G, H]$, alors H est homogène [1, Preuve de 4.11]. C'est une utilisation particulière du théorème de Zil'ber sur les corps [19, Theorem 9.1] qui permet de conclure.

4.3 $\tilde{U}$-groupes

Les U-groupes ont été analysés avant les pseudo-tores. Depuis l'introduction de ces derniers, il est possible d'affiner sensiblement les notions de la section précédente. En effet, dans [3, Section 3.2], on introduit les notions suivantes.

Définition 4.3.1. – *Pour tout corps interprétable K de caractéristique zéro et tout groupe G de rang de Morley fini, on note $U_K(G)$ le sous-groupe engendré par les sous-groupes indécomposables A tel que $A/J(A)$ est isomrophe à K_+ définissablement. Si $G = U_K(G)$, on dit que G est un U_K-*groupe*. Aussi, on dit qu'un U_K-groupe est* homogène *si ses sous-groupes définissables et connexes sont des U_K-groupes.*

*Dans tout groupe G de rang de Morley fini, on note $\tilde{U}(G)$ le sous-groupe engendré par les U_K-sous-groupes homogènes normaux de G pour K corps interprétable de caractéristique zéro, et par les sous-groupes normaux de G, définissables, connexes d'exposant borné. De plus, on dit que G est un $\tilde{U}$-*groupe *si $G = \tilde{U}(G)$.*

Comme cela est dit dans [3, Section 3.2] et dans [5, Section 1], l'analyse de ces notions se fait quasiment entièrement comme celle des U-groupes, la seule différence étant l'usage des pseudo-tores. Ainsi, de façon analogue à [1, Corollary 6.9], on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.3.2. – (cf. [5, Fact 2.10]) *Soit G un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini. Alors $G/\tilde{U}(G)$ est divisible et abélien.*

En résumé, pour tout groupe résoluble et connexe G, on a les inclusions suivantes :

$$G' \leq \tilde{U}(G) \leq U(G) \leq Q(G) \leq F(G)^\circ.$$

Comme aboutissement, nous verrons à la section suivante que, dans certains cas, on obtient de "vrais" groupes unipotents.

4.4 Groupes unipotents

Fixons maintenant un corps algébriquement clos K de caractéristique zéro. Ce qui différencie un U_K-groupe homogène nilpotent d'un groupe unipotent sur K est clarifié par [5, Lemma 2.10] : un U_K-groupe homogène nilpotent est définissablement isomorphe à un groupe algébrique unipotent sur K si et seulement si ses sous-groupes indécomposables non triviaux sont tous définissablement isomorphes à K_+.

La preuve nécessite une analyse des automorphismes définissables d'un groupe unipotent. Il s'avère qu'ils sont tous algébriques et que, de plus, ils forment un groupe algébrique [5, Proposition 1.2 et Corollary 1.3].

L'étude des groupes résolubles de [5] aboutit au théorème suivant. En un certain sens, ce résultat met en évidence un sous-groupe linéaire relativement large dans tout groupe résoluble de rang de Morley fini.

Théorème 4.4.1. – [5, Theorem 3.1] *Soit G un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini. Soient A son plus petit sous-groupe normal tel que G/A est nilpotent, et B le plus grand sous-groupe définissable, connexe et d'exposant borné de A. Alors A est le produit direct de B par un sous-groupe U qui est soit trivial, soit un produit direct de sous-groupes G-normaux $U_1, \cdots, U_n$, définissablement isomorphes à des groupes algébriques unipotents sur des corps interprétables de caractéristiques zéro $K_1, \cdots, K_n$ respectivement.*

Chapitre 5

Sous-groupes de Carter

Avec les bons tores, tores décents et pseudo-tores, il est possible d'approcher relativement bien les tores algébriques (section 3). Ceci est vrai tant au niveau des propriétés structurelles (commutativité, rigidité), qu'au niveau de leur comportement par rapport au groupe ambient (conjugaison). Cela dit, la section 3.4 pointe le problème majeur concernant ces notions de tores : nous ne savons pas si les sous-groupes de Cartan, obtenus à partir de ces concepts, sont nilpotents. En fait, il pourrait exister un groupe de rang de Morley fini, connexe et non nilpotent, sans pseudo-tore non trivial. Ce fait est d'ailleurs une simple reformulation des conjectures 3.3.1 et 3.4.1 (qui sont équivalentes).

Ainsi, nous avons été amené à développer une autre approche des sous-groupes de Cartan, indépendamment des tores. En effet, dans tout groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos, les sous-groupes de Cartan sont précisément les sous-groupes nilpotents, fermés, connexes, et d'indice fini dans leur normalisateur [29, Section 22.5]. C'est d'ailleurs cette propriété qu'avait utilisée R.W. Carter pour approcher les sous-groupes de Cartan dans les groupes finis [23]. Les sous-groupes qu'il a introduits sont désormais connus sous le nom de *sous-groupe de Carter*, et définis comme étant les sous-groupes nilpotents et autonormalisants. Ils constituent une notion fondamentale pour les études concernant les groupes résolubles finis [28], ainsi que celles des groupes localement résolubles et localement finis [27].

Par analogie, on appelle *sous-groupe de Carter* d'un groupe de rang de Morley fini, tout sous-groupe définissable, connexe, nilpotent et d'indice fini dans son normalisateur. Ainsi, dans un groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos, lorsque le langage est celui des corps, les sous-groupes de Carter sont présicément les sous-groupes de Cartan. Nous allons voir dans la première section que cela est vrai dans un contexte plus général.

5.1 Dans les groupes ordinaires et sous-ordinaires

Les sous-groupes de Carter des groupes ordinaires ont été étudiés dans [2], et le principal résultat concernait leur conjugaison. Dans [6], ce résultat a été étendu aux groupes sous-ordinaires, et des précisions ont été données sur les sous-groupes de Carter. On peut résumer ainsi les principaux résultats.

Théorème 5.1.1. – [6, Lemma 3.7, Theorem 3.8 et Corollary 3.9] *Soit G un groupe sous-ordinaire de rang de Morley fini. Alors ses sous-groupes de Carter sont ses sous-groupes de Cartan.*

En particulier, ils sont conjugués et généreux. De plus, si G est connexe, ses sous-groupes de Carter sont des sous-groupes nilpotents maximaux.

Les preuves, dans les cas ordinaires et sous-ordinaires, sont similaires. Le point clé consiste à prouver qu'un sous-groupe de Carter qui n'est pas de Cartan est un sous-groupe propre définissable et connexe maximal du groupe ambient, puis à en déduire qu'il est généreux. On obtient ensuite facilement une contradiction.

5.2 Existence

Les sous-groupes de Carter sont susceptibles d'avoir de très bonnes propriétés, et d'être utiles dans des contextes où nous disposons de peu de moyens, comme celui des groupes sans torsion, qu'ils soient résolubles ou simples connexes minimaux. Cependant, aucune des propriétés qui en feraient un outil efficace, que ce soit l'existence ou la conjugaison par exemple, n'est évidente.

Dans un travail avec E. Jaligot [12], nous avons établi un premier résultat général concernant ces sous-groupes.

Théorème 5.2.1. – ([12], avec E. Jaligot) *Tout groupe de rang de Morley fini a un sous-groupe de Carter.*

La construction est entièrement basée sur la notion de $U_{0,r}$-groupe (section 4), et est très naturelle. Concrètement, on fixe un tore décent (ou un pseudo-tore) maximal $U_0 = T$, puis, pour tout entier i, un $U_{0,i+1}$-sous-groupe nilpotent maximal V_{i+1} dans $N_G(U_i)$, et on note $U_{i+1} = U_i V_{i+1}$. Par finitude du rank de Morley, il y a entier k tel que $U_{k+1} = U_k$. Il s'agit ensuite de montrer que $N_G(U_k)^\circ$ est un sous-groupe de Carter, ce qui se déduit facilement du résultat ci-dessous. En fait, ce dernier contient toute la difficulté technique de la construction.

Proposition 5.2.2. – ([12], avec E. Jaligot) *Soit $G = UV$ un groupe de rang de Morley fini, où U et V sont deux sous-groupes nilpotents et définissables. Si U est un $U_{0,r}$-groupe normal, et V un $U_{0,s}$-groupe, pour des entiers naturels r et s tels que $1 \leq r \leq s$, alors G est nilpotent.*

D'une certaine façon, on peut résumer en disant qu'il s'agit de partir de la partie "la moins unipotente" du groupe (un tore) pour aller vers la partie "la plus unipotente" (un $U_{0,r}$-groupe avec r le plus grand possible, ou un groupe d'exposant borné). Signalons aussi que notre construction fournit l'information suivante.

Proposition 5.2.3. – *Si T est un tore décent (resp. un pseudo-tore) d'un groupe G de rang de Morley fini, alors T est contenu dans un sous-groupe de Carter de G.*

En particulier, tout sous-groupe de Cartan contient un sous-groupe de Carter.

5.3 Dans les groupes résolubles

Les sous-groupes de Carter ont d'abord été analysés par F.O. Wagner pour les groupes résolubles [41]. Son travail concerne les $\mathfrak{R}$-*groupes*, c'est-à-dire une classe de groupes stables plus large que celle des groupes de rang de Morley fini. Son principal résultat, énoncé dans le contexte des groupes de rang de Morley fini, concerne la conjugaison.

Fait 5.3.1. – [41] *Les sous-groupes de Carter sont conjugués dans tout groupe résoluble de rang de Morley fini.*

Une preuve indépendante de ce résultat (uniquement pour les groupes de rang de Morley fini) est fournie dans [7]. Aussi, plus tard avec E. Jaligot [11, Section 3.5], nous avons écrit une preuve simplifiée de ce fait.

L'intérêt de [7] est surtout de fournir de nouvelles informations sur les sous-groupes de Carter, et les groupes résolubles de rang de Morley fini comme, par exemple :

- l'analyse du sous-groupe de Frattini ;
- l'introduction et l'analyse des *centralisateurs généralisés* ;
- la structure des groupes 2-résolubles.

On rappelle que, pour tout sous-ensemble X d'un groupe G, le *centralisateur généralisé* $E_G(X)$ de X dans G est l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que, pour tout $x \in X$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[g,_n x] = 1$, où $[g,_0 x] = g$ et $[g,_{n+1} x] = [[g,_n x], x]$. Dans tout groupe résoluble et connexe G de rang de Morley fini, les centralisateurs généralisés des sous-groupes nilpotents sont des sous-groupes définissables et connexes [7, Corollaire 5.17], et ils contiennent tous un sous-groupe de Carter [7, Théorème 1.1 et Corollaire 7.4]. Ces propriétés en font un outil très pratique.

Aussi, une *théorie des formations* a été développée dans [7]. Une telle théorie unifie, et généralise, de nombreux théorèmes d'existence et de conjugaison. Cette théorie a ensuite été généralisée dans [11, Sections 4 et 5].

Une approche sans connexité ni définissabilité

Une conséquence particulière de [7], qui n'est pas la plus difficile, mais qui est relativement frappante, est la suivante.

Proposition 5.3.2. – [7, Théorèmes 1.1 (ii)] *Dans tout groupe de rang de Morley fini* connexe *et résoluble, les sous-groupes de Carter sont précisément les sous-groupes nilpotents et autonormalisants.*

Suite à ce résultat, et aux deux constatations ci-dessous, une autre définition de sous-groupes de Carter a été analysée :
- un sous-groupe de Carter dans un groupe localement fini n'est pas nécessairement nilpotent, mais il est *localement* nilpotent ;
- un groupe résoluble de rang de Morley fini n'a pas nécessairement de sous-groupe nilpotent et autonormalisant, il suffit de considérer $\mathbb{C}^* \rtimes \langle i \rangle$ où i est une involution qui inverse $\mathbb{C}^*$;

Ainsi, les sous-groupes *localement* nilpotents et autonormalisants ont été étudiés [8], et le résultat suivant a été prouvé.

Théorème 5.3.3. – [8] *Tout groupe résoluble de rang de Morley fini a un sous-groupe localement nilpotent et autonormalisant, et deux tels sous-groupes sont conjugués.*

L'analyse de la structure des groupes non connexes est l'objet de [8] et, dans une moindre mesure, de [9].

5.4 Générosité

Dans tout groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos, l'union des sous-groupes de Cartan contient un ouvert dense [29, Theorem 22.2]. De la même façon, dans tout groupe de rang de Morley fini, les sous-groupes de Cartan sont généreux (section 3.4). Avec E. Jaligot, dans [12], nous avons conjecturé que, de même, tous les sous-groupes de Carter des groupes de rang de Morley fini sont généreux.

Conjecture 5.4.1. – [12, Conjecture 1.2] Soit C un sous-groupe de Carter d'un groupe G de rang de Morley fini. Alors C est généreux dans G.

Ceci a été vérifié pour les groupes résolubles [26, Lemma 3.5], puis pour les groupes ordinaires [2, Corollary 4.2] et sous-ordinaires [6, Theorem 3.8]. Par contre, le cas des groupes simples connexes et minimaux reste ouvert. Dans [12, Introduction], nous évoquions aussi le fait qu'"une réponse positive à la conjecture 5.4.1 impliquerait très probablement" la conjugaison des sous-groupes de Carter, sans toutefois pouvoir le démontrer. Finalement, dans [30], E. Jaligot a prouvé un résultat bien plus fort que cette implication.

Fait 5.4.2. – [30] *Dans tout groupe de rang de Morley fini, les sous-groupes de Carter* généreux *sont conjugués et génériquement disjoints.*

Ainsi, pour prouver la conjugaison des sous-groupes de Carter dans les groupes de rang de Morley fini, nous savons qu'il est suffisant d'étudier le comportement d'un sous-groupe de Carter *non* généreux.

5.5 Dans les groupes simples connexes minimaux

L'un des obstacles majeurs à l'analyse des groupes simples connexes minimaux, est l'existence possible d'un tel groupe sans torsion. En effet, très peu d'outils permettent de comprendre la structure d'un groupe simple sans torsion, et on est donc assez démuni lorsqu'on veut les étudier. Notamment, dans un tel groupe, les tores décents sont triviaux, et rien ne dit que les pseudo-tores ne le sont pas aussi. Dans ce dernier cas, le groupe ambient serait lui-même un sous-groupe de Cartan. Comme la conjugaison des sous-groupes de Borel dans les groupes de rang de Morley fini paraît totalement hors de portée, les sous-groupes de Carter apparaissent comme étant l'une des rares notions susceptible de pouvoir donner des informations générales sur la structure des groupes simples connexes minimaux sans torsion. Dans [3], c'est la conjugaison des sous-groupes de Carter qui est prouvée. Aussi, comme la preuve fonctionne dans un contexte plus général, le résultat suivant y est montré.

Théorème 5.5.1. – [3, Theorem 1.2] *Dans tout K^*-groupe, les sous-groupes de Carter sont conjugués.*

En fait, en cherchant le contexte le plus général possible dans lequel la preuve marche, il s'est avéré que les sous-groupes de Carter sont conjugués dans un groupe G de rang de Morley fini dès que le normalisateur de tout sous-groupe abélien, définissable et non trivial est un *P-groupe* [3, Corollary 1.6], où les *P-groupes* sont les groupes de rang de Morley fini dans lesquels toute section simple, définissable et connexe a un pseudo-tore non trivial. L'intérêt de cette généralisation consiste notamment à prouver que les sous-groupes de Carter sont conjugués dans tout groupe G de rang de Morley fini vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

- [3, Corollary 1.8] toute section simple et définissable a une involution ;
- [3, Corollary 1.9] G a un sous-groupe normal A, qui est simple connexe minimal, et tel que G/A est résoluble.

La seconde assertion est susceptible de fournir des informations sur certains automorphismes définissables de groupe simple connexe minimal.

La preuve du théorème 5.5.1 est longue et difficile. Elle repose sur une analyse fine de la structure d'un sous-groupe de Carter non généreux. En fait, un tel sous-groupe a une structure proche de celle des groupes unipotents, puisque c'est un $\tilde{U}$-groupe sans torsion [3, Theorem 7.3]. Il s'agit là d'un point clé, et non trivial, de la preuve. Ensuite, il est montré que cette propriété s'étend aux sous-groupes qui ont une intersection non triviale avec lui. Après un assez long travail, une description relativement précise de "l'entourage" du sous-groupe de Carter non généreux est explicitée, jusqu'à aboutir un calcul de rang qui fournit un certain ensemble générique au groupe [3, Theorem 10.6]. À partir de ce point, la conjugaison des sous-groupes de Carter est une formalité [3, Theorem 11.3].

Notons aussi qu'à la fin de la preuve, d'une façon presque accidentelle, il est prouvé que le sous-groupe de Carter non généreux est un U_K-groupe homogène pour un certain corps interprétable K de caractéristique zéro. Auparavant, avec une preuve spécifique, J. Burdges avait prouvé ceci pour les sous-groupes de Carter non généreux et *non abéliens* ([22, Proposition 5.9] et [3, Fact 6.8]).

Théorème 5.5.2. – [3, Corollary 1.6] *Soit G un K^*-groupe. Si G a un sous-groupe de Carter non généreux C, alors :*
- *G est sans torsion, en particulier il est simple connexe minimal ;*
- *tout sous-groupe nilpotent et définissable de G est un $\tilde{U}$-groupe ;*
- *il y a un corps interprétable K tel que C est un U_K-groupe homogène.*

Finalement, en plus de la conjugaison des sous-groupes de Carter, et à défaut de prouver la conjecture 5.4.1, l'article [3] donne une description relativement précise des groupes simples connexes minimaux dont les sous-groupes de Carter sont non généreux.

D'ailleurs, serait-il aberrant de conjecturer, qu'en présence d'un corps approximativement exponentiel, on puisse construire un tel groupe ?

Chapitre 6

Groupes géométriques

La conjecture de Cherlin-Zil'ber se concentre sur les groupes simples. Il est naturel de se demander quels sont les groupes linéaires de rang de Morley fini non nécessairement simples. En particulier, que se passerait-il si la conjecture de Cherlin-Zil'ber était prouvée ? Par exemple, que pourrait-on dire de la linéarité des groupes connexes et sans centre de rang de Morley fini ? C'est à ces questions que [4] tente d'apporter des éléments de réponses.

Un groupe G de rang de Morley fini est *définissablement linéaire*, sur un nombre fini n de corps interprétables $K_1, \cdots, K_n$, s'il a une représentation linéaire fidèle *interprétable* sur l'anneau $K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$.

Les *groupes géométriques* sont introduits dans [4], avec l'idée qu'ils pourraient offrir une approche très convenable aux groupes définissablement linéaires. Leur définition est la suivante.

Définition 6.0.3. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ une famille uniformément définissable de sous-groupes* connexes *de G telle que l'ensemble I des indices soit interprétable. On dit que $\mathscr{F}$ est une* famille géométrique *de sous-groupes de G, s'il y a un sous-ensemble générique X de $G \times G$ tel que, pour tout $(x, y) \in X$, il y a un unique $F \in \mathscr{F}$ tel que $xF = yF$.*

Le groupe G est dit géométrique *si, pour tous x et y deux éléments distincts de G, il existe une famille géométrique $\mathscr{F}$ tel que $xF \neq yF$ pour tout $F \in \mathscr{F}$.*

L'objet de [4] est de regarder les liens entre les groupes définissablement linéaires et les groupes géométriques. En particulier, il y est conjecturé ceci.

Conjecture 6.0.4. – [4, Conjecture 1.3] Tout groupe géométrique de rang de Morley fini est définissablement linéaire.

Disons d'abord que, concernant la réciproque, le résultat ci-dessous est obtenu.

Proposition 6.0.5. – [4, Corollaire 4.14] *Tout groupe de rang de Morley fini connexe, sans centre et définissablement linéaire est géométrique.*

Nous allons voir, qu'en un certain sens, les groupes géométriques sont omniprésents, ce qui motive fortement leur étude. Cela dit, il y a un certain travail à faire pour le voir.

Concrètement, dans tout groupe G de rang de Morley fini, on note $In(G)$ l'ensemble des éléments de G qui appartiennent à $\cup\mathscr{F}$ pour toute famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G. Vérifier que G est géométrique si et seulement si $In(G) = 1$ est facile. Le résultat suivant est, par contre, bien moins évident.

Proposition 6.0.6. – [4, Proposition 2.6 et Corollaire 2.9] *Dans tout groupe G de rang de Morley fini, l'ensemble $In(G)$ est un sous-groupe définissable et définissablement caractéristique.*

De plus, $G/In(G)$ est un groupe géométrique.

Ce sous-groupe $In(G)$ est étudié dans les groupes algébriques sur un corps algébriquement clos, lorsque le langage est celui des corps, augmenté éventuellement d'opérations et relations supplémentaires. Il est alors prouvé un analogue au théorème de Rosenlicht [38, p.147].

Théorème 6.0.7. – [4, Théorème 3.11] *Soit G un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos K* de caractéristique nulle. *Alors $In(G)$ est contenu dans le centre de G.*

Ce résultat ne peut pas être généralisé aux groupes de rang de Morley fini. En effet, il suffit de considérer le *groupe de Baudisch* G_{Baud} [16], puisque celui-ci est connexe, non abélien et vérifie $In(G_{Baud}) = G_{Baud}$.

Par contre, il est conjecturé ceci.

Conjecture 6.0.8. – [4, Conjecture 4.1] Dans tout groupe connexe de rang de Morley fini, $In(G)$ est hypercentral.

L'essentiel de [4] est une étude de cette conjecture. Après une analyse des sous-groupes de Carter des groupes résolubles-par-définissablement linéaires, les résultats suivants sont démontrés.

Théorème 6.0.9. – *La conjecture 6.0.8 est vraie si l'une des deux conjectures suivantes est vérifiées :*

- [4, Corollaire 4.15] *la conjecture de Cherlin-Zil'ber ;*
- [4, Théorème 4.18] *la conjecture 6.0.4.*

En fait, le résultat [4, Théorème 4.18] fournit une information plus précise, puisqu'il montre que, dans un contre-exemple minimal G à la conjecture 6.0.4, pour toute section définissable et connexe $\overline{L}$ de G, le sous-groupe $In(\overline{L})$ est hypercentral dans $\overline{L}$.

Références

Liste des publications présentées

[1] O. Frécon. Around unipotence in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9** (2006), 341–359.

[2] O. Frécon. Carter subgroups in tame groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9** (2006), 361–367.

[3] O. Frécon. Conjugacy of Carter subgroups in groups of finite Morley rank. Soumis.

[4] O. Frécon. Groupes géométriques de rang de Morley fini. À paraître à *Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.*

[5] O. Frécon. Linearity of solvable groups of finite Morley rank. En préparation.

[6] O. Frécon. Pseudo-tori and subtame groups of finite Morley rank. Soumis.

[7] O. Frécon. Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles. *J. Algebra* **229** (2000), no. 1, 118–152.

[8] O. Frécon. Sous-groupes de Carter dans les groupes de rang de Morley fini. *J. Symbolic Logic* **69** (2004), no. 1, 23–33.

[9] O. Frécon. Sous-groupes de Hall généralisés dans les groupes de rang de Morley fini résolubles. *J. Algebra* **233** (2000), no.1, 253–286.

[10] O. Frécon. Splitting in solvable groups of finite Morley rank. Soumis.

[11] O. Frécon et E. Jaligot. Conjugacy in groups of finite Morley rank. In *Model Theory with Applications to Algebra and Analysis, Volume 2*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, no. 350. Cambridge University Press, 2008.

[12] O. Frécon et E. Jaligot. The existence of Carter subgroups in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **8** (2005), 623–633.

Bibliographie

[13] T. Altinel, A.V. Borovik et G. Cherlin. *Simple Groups of Finite Morley Rank.* Amer. Math. Soc., 2008.

[14] T. Altinel et J. Burdges. On analogies between algebraic groups and groups of finite Morley rank. À paraître à *J. London Math. Soc.*.

[15] C. Altseimer et A. Berkman. On Quasi- and Pseudounipotent Groups of finite Morley rank. Préprint.

[16] A. Baudisch. A new uncountably categorical group. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), no. 10, 3889–3940.

[17] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro et F.O. Wagner. Die Böse Farbe. À paraître à *J. Inst. Math. Jussieu.*

[18] A.V. Borovik, J. Burdges et G. Cherlin. Involutions in groups of finite Morley rank of degenerate type. *Selecta Math.* **13** (2007), no. 1, 1–22.

[19] A.V. Borovik et A. Nesin. *Groups of Finite Morley Rank.* Oxford University Press, 1994.

[20] A.V. Borovik et B. Poizat. Tores et p-groupes. *J. Symbolic Logic* **55** (1990), no. 2, 478–491.

[21] J. Burdges. A signalizer functor theorem for groups of finite Morley rank. *J. Algebra* **274** (2003), 215–229.

[22] J. Burdges. The Bender method in groups of finite Morley rank. *J. Algebra* **312** (2007), 33–55.

[23] R.W. Carter. Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups. *Math. Z.* **75** (1960/1961), 136–139.

[24] G. Cherlin. Good tori in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* (5) **8** (2005), 613–622.

[25] G. Cherlin. Groups of small Morley rank. *Ann. Math. Logic* **17** (1979), no. 1, 1–28.

[26] G. Cherlin et E. Jaligot. Tame minimal simple groups of finite Morley rank. *J. Algebra* **276** (2004), 13–79.

[27] M.R. Dixon. *Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups.* Series in Algebra, 2. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.

[28] K. Doerk et T. Hawkes. *Finite soluble groups.* de Gruyter Expositions in Mathematics, 4. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1992.

[29] J.E. Humphreys. *Linear algebraic groups.* Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[30] E. Jaligot. Generix never gives up. *J. Symbolic Logic* **71** (2006), 599–610.

[31] E. JALIGOT. Groupes de type mixte. *J. Algebra* **212** (1999), no. 2, 753–768.

[32] J. LOVEYS ET F.O. WAGNER. Le Canada semi-dry. *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no.1, 217–221.

[33] A. MACINTYRE. On ω_1-categorical theories of fields. *Fund. Math.* **71** (1971), no. 1, 1–25.

[34] D. MARKER. *Model theory. An introduction.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[35] M. MORLEY. Categoricity in power. *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), 514–538.

[36] Y. MUSTAFIN. Structure des groupes linéaires définissables dans un corps de rang de Morley fini. *J. Algebra* **281** (2004), 753–773.

[37] A. NESIN. On solvable groups of finite Morley rank. *Trans. Amer. Math. Soc.* **321** (1990), no. 2, 659–690.

[38] B. POIZAT. *Groupes stables.* Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique. Nur Al-mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987.

[39] B. POIZAT. Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner. *J. Symbolic Logic* **66** (2001), 1637–1646.

[40] F.O. WAGNER. Fields of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic* **66** (2001), 703–706.

[41] F.O. WAGNER. Nilpotent complements and Carter subgroups in stable $\mathfrak{R}$-groups. *Arch. Math. Logic* **33** (1994), no. 1, 23–34.