Projecteurs dans les groupes de rang de Morley fini résolubles

Olivier Frécon
Institut Girard Desargues
UPRES-A 5028 Mathématiques
Batiment 101 (mathématiques)
Université Claude Bernard Lyon-1
43 blvd du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne CEDEX, France
e-mail: frecon@desargues.univ-lyon1.fr

22 mai 2000

1 Introduction

W. Gaschütz a introduit en 1963 ([16]) la *théorie des formations* pour les groupes finis résolubles. Cette théorie unifie, et généralise considérablement, les notions de sous-groupes de Carter et de sous-groupes de Hall. Elle a ensuite été généralisée à beaucoup de classes de groupes localement fini et localement résolubles : groupes (localement nilpotents)-par-finis ([30]), FC-groupes ([31]), groupes localement finis linéaires ([35]) et $\mathcal{U}$-groupes ([15]). Tout ces travaux ont été unifiés dans [18]. Mais il a été établie une théorie des formations pour d'autres classes de groupes : classe des groupes polycycliques ([23] et [24]), groupes satisfaisant min-p pour tout entier premier p ([10])....

L'objectif de cet article est d'établir une théorie des formations pour les groupes de rang de Morley fini résolubles. Cette théorie généralisera celle de [1]. L'ensemble du travail se fera dans un contexte plus général que les groupes de rang de Morley fini résolubles : *les sections localement closes résolubles* des groupes de rang de Morley fini (définition 2.21).

Bien que la classe de groupes que nous étudions ne soit pas une classe de groupes localement fini, on avait comme idée de départ de suivre l'approche de [15] pour la théorie des formations des $\mathcal{U}$-groupes. Cela semblait être rendu possible par l'introduction, dans [14], des notions d'∞-*élément* et de *sous-groupe de Hall généralisé* (définition 2.40). On rappelle qu'un élément $\overline{x}$ d'une section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini est un ∞-élément si, pour un $x \in H$ dont la classe modulo K est $\overline{x}$, $d(x)K/K$ est sans torsion. Finalement, il n'a pas été possible de concrétiser l'idée du départ, la principale raison étant que les sous-groupes de Hall généralisés ne se préservent pas, en général, par quotientement. On a alors été amené à considérer un autre analogue aux sous-groupes de Hall pour les groupes de rang de Morley fini : les *sous-groupes π-couvrants de Hall* (définition 3.8). π désigne ici un sous-ensemble de $\mathcal{P}^+$ où, si on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers, $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$. L'idée est basée sur le fait que, pour $\pi \subseteq \mathcal{P}$, un π-sous-groupe de Hall d'un groupe fini résoluble G est un sous-groupe *minimal* parmis ceux qui couvrent chaque π-section de G. En fait, il s'agit de voir les sous-groupes de Hall comme étant des objets minimaux. D'autre part, si H est un π-sous-groupe de Hall d'un groupe fini résoluble G, alors H vérifie deux propriétés duales l'une de l'autre :

(i) $H \cap A$ est un π-sous-groupe de Hall de A pour tout sous-groupe normal A de G ;

(ii) HK/K est un π-sous-groupe de Hall de G/K pour tout sous-groupe normal K de G.

Or, les sous-groupes de Hall généralisés vérifient (i) et pas (ii), tandis que, pour les sous-groupes π-couvrants de Hall, c'est l'inverse (corollaire 3.13 et exemple 3.16). Finalement, les deux notions sont équivalentes lorsque $\infty \notin \pi$ (lemme 3.10). Dans la partie 3, nous montrons des propriétés des sous-groupes π-couvrants de Hall, en particulier l'existence et la conjugaison (théorème 3.12).

Toutefois, pour étudier les sous-groupes π-couvrants de Hall, nous utilisons la plupart des résultats de [14] (cf. preuve du théorème 3.21).

A partir de la notion de sous-groupes π-couvrants de Hall, nous introduisons une notion de $\mathcal{M}$-*normalisateur* (définition 4.6) similaire à celle de [15]. On montre que ces sous-groupes sont préservés par quotientement (théorème 4.9). Ce résultat est similaire au lemme 2.13 de [15], mais la preuve est très différente. Le point qui va marquer notre différence avec [15] est l'impossibilité de trouver un théorème de "couverture et d'évitement" analogue au théorème 3.4 de [15] (exemples 4.11 et 4.12). Ceci aura des conséquences importantes sur l'étude des projecteurs. Pour remédier à ce problème, nous introduisons la notion de $\mathcal{M}^*$-*normalisateur* (définition 4.20). Ce sont des sous-groupes des $\mathcal{M}$-normalisateurs qui ne sont pas très loin de vérifier la propriétés de couverture et d'évitement. Nous montrons alors des propriétés des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs qui vont nous permettre de suivre la stratégie de [15] pour la fin de la preuve du théorème principal (théorème 6.14).

De façon analogue à [15], nous définissons des *fonctions de préformation* f auxquelles on associe des classes de groupes $\mathfrak{F}(f)$ et $\mathfrak{F}^*(f)$ (définition 5.2). La classe $\mathfrak{F}(f)$ est une $\mathfrak{N}$-*formation* (définition 5.14, lemme 5.15) à la différence de $\mathfrak{F}^*(f)$ (exemple 5.16). Par contre, c'est la classe $\mathfrak{F}^*(f)$ qui permet de travailler et d'arriver à des résultats généraux, puisque les projecteurs en rapport avec $\mathfrak{F}(f)$ n'existent pas toujours (exemple 6.8). Les fonctions f les plus interressantes sont celles pour lesquelles $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}^*(f)$. Le théorème 5.11 donne un critère pour que f vérifie $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}^*(f)$. Nous arrivons au théorème principal de l'article (théorème 6.14). Il concerne l'existence et la conjugaison des *projecteurs* (définition 6.7). Ce théorème unifie plusieurs résultats importants concernant les groupes de rang de Morley fini résolubles : conjugaison des sous-groupes de Hall et des sous-groupes de Hall généralisés, le théorème 5 de [1] (qui concerne les formations), existence et conjugaison des sous-groupes π-couvrants de Hall, existence et conjugaison des sous-groupes de Carter (proposition 6.18).

La dernière partie donnera une application du théorème 6.14 à la superrésolubilité. On montre l'existence d'une fonction de préformation f_s qui détermine quelles sections localement closes sont localement superrésolubles (proposition 7.21). Comme cette fonction vérifie les hypothèses du théorème 5.11, on a $\mathfrak{F}(f_s) = \mathfrak{F}^*(f_s)$ et on en déduit un théorème sur les projecteurs localement superrésolubles (théorème 7.23). Cette dernière partie est aussi l'occasion d'étudier plus précisément les sous-groupes localement superrésolubles des groupes de rang de Morley fini et, notamment, de montrer qu'ils sont toujours (localement nilpotents)-par-(finis, abéliens) (proposition 7.8).

2 Prérequis

La notation est celle habituellement utilisée. Pour des généralités sur le sujet on pourra se référer soit au livre de A. Borovik et A. Nesin ([5]), soit au livre de B. Poizat ([27]). De la même façon que dans [14], on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers et $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$. Aussi, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on notera $\pi^- = \pi \setminus \{\infty\}$, $\pi^\perp = \mathcal{P}^+ \setminus \pi$ et $\pi' = \mathcal{P} \setminus \pi$.

2.1 Généralités

Pour tout groupe G de rang de Morley fini, on note G° sa *composante connexe*, c'est-à-dire l'intersection de ses sous-groupes définissables d'indice fini. G° est un sous-groupe définissable et d'indice fini de G. On étend cette notation aux sous-groupes des groupes de rang de Morley fini, en notant $H^\circ = H \cap d(H)^\circ$ pour tout sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini.

Le fait suivant est un corollaire du théorème des indécomposables de Zil'ber.

Fait 2.1. – **([37], Zil'ber)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, $H \leq G$ définissable et connexe, et $X \subseteq G$, alors $[H, X]$ est définissable et connexe.*

Fait 2.2. – **([22], Nesin)** *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Alors $G = D * C$, $D = T \times N$ où*

D est définissable, connexe, caractéristique et divisible,

C est définissable et d'exposant borné,

T est la partie de torsion de D et est abélien et divisible,

N est un sous-groupe sans torsion.

De plus, si G est connexe, alors T est central dans G et C peut être choisi connexe et caractéristique.

Définition 2.3. – *Pour tout groupe G, le* sous-groupe de Fitting *$F(G)$ de G est le sous-groupe de G engendré par ses sous-groupes nilpotents normaux.*

Fait 2.4. – **([4],Belegradek, [20], Nesin)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini, son sous-groupe de Fitting $F(G)$ est nilpotent et définissable.*

Fait 2.5. – **([21], Nesin)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble. Alors $G/F(G)^{\circ}$ (et, donc, $G/F(G)$) est un groupe divisible et abélien.*

Pour tout entier premier p, on appelle *p-tore* un p-groupe abélien et divisible. Pour un p-tore T, la dimension du groupe des éléments d'ordre p de T, considéré comme espace vectoriel sur le corps premier, s'appelle la *taille* de T.

Fait 2.6. – **([8], Borovik, Poizat)** *Les sous-p-tores d'un groupe de rang de Morley fini sont de taille finie, bornée par un certain entier m.*

Définition 2.7. – **([2], déf. 2.1, Borovik)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Un sous-groupe définissable, connexe et nilpotent U de G est* quasiunipotent *si U ne contient pas de p-tores pour tout entier premier p.*

Définition 2.8. – **([2], déf. 2.1)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini. On définit par $Q(G) = \langle U | U \trianglelefteq G, U \text{ est quasiunipotent } \rangle$ le* radical quasiunipotent *de G.*

Les résultats de [2] et la remarque 3.23 de [14] montrent que le radical quasiunipotent d'un groupe de rang de Morley fini est quasiunipotent.

Le fait 2.9 généralise le fait 2.5.

Fait 2.9. – **([14], prop. 3.26)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors $G/Q(G)$ est abélien et divisible.*

Le *radical de Hirsch-Plotkin* d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par ses sous-groupes localement nilpotents normaux. On le note $HP(G)$. Le fait 2.10 montre qu'il s'agit toujours d'un sous-groupe localement nilpotent de G.

Fait 2.10. – **([29], 12.1.2 p.343, Hirsch, Plotkin)** *Si deux sous-groupes A et B d'un groupe G sont localement nilpotents et se normalisent, alors AB est localement nilpotent.*

2.2 Sous-groupes de Carter

Définition 2.11. – *Soit C un sous-groupe d'un groupe G. C est un* sous-groupe de Carter *de G si C est localement nilpotent nilpotent et autonormalisant.*

F.O. Wagner a montré l'existence et la conjugaison des sous-groupes nilpotents et autonormalisants dans les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles (fait 2.13). Le fait 2.12 montre que ces sous-groupes sont exactement les sous-groupes de Carter.

Fait 2.12. – **([13], cor. 5.12)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors tout sous-groupe localement nilpotent de G est nilpotent.*

Fait 2.13. – **([33], Wagner)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et L un sous-groupe normal et définissable de G tel que G/L soit nilpotent. Alors :*

(i) G a un sous-groupe de Carter C ;

(ii) $G = LC$;

(iii) les sous-groupes de Carter de G sont conjugués.

Fait 2.14. – **([13], cor. 5.20)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, C un sous-groupe de Carter de G et N un sous-groupe normal (non nécessairement définissable) de G. Alors CN/N est un sous-groupe de Carter de G/N et tous les sous-groupes de Carter de G/N sont de cette forme. En particulier, les sous-groupes de Carter de G/N sont conjugués.*

Fait 2.15. – **([13], corollaire 7.7)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et 2-résoluble et C un sous-groupe de Carter de G. Alors il existe un entier k tel que $G = G^k \rtimes C$.*

Il est montré dans [13] que, dans les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles, la notion de sous-groupe de Carter est très liée à celle de *sous-groupe anormal.*

Définition 2.16. – *Un sous-groupe H d'un groupe G est anormal dans G si, pour tout $g \in G$, $g \in \langle H, H^g \rangle$.*

Fait 2.17. – **([13], théorème 1.2)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H est anormal;

(ii) H contient un sous-groupe de Carter de G;

(iii) H est définissable et connexe et il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite décroissante $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous-groupes de G tel que $H_0 = G$, $H_n = H$ et, pour tout $i = 1, ..., n$, H_i est un sous-groupe propre définissable et connexe maximal de H_{i-1} qui n'est pas normal dans H_{i-1}.

On définit le *centralisateur généralisé.*

Définition 2.18. – *Soient G un groupe et A un sous-groupe de G. Nous définissons le* centralisateur généralisé *$E_A(g)$ d'un élément g de $N_G(A)$ par $E_A(g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (ad_g)^{-n}(1)$ où ad_g désigne l'application*

$$ad_g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & [x, g] \end{array}$$

Le centralisateur généralisé $E_A(X)$ d'un sous-ensemble X de $N_G(A)$ est l'intersection des $E_A(x)$ pour $x \in X$.

Cette notion a été introduite, sans être nommée, par T.A. Peng dans [25]. En général, pour un groupe résoluble, il ne s'agit même pas d'un sous-groupe (un exemple est donné dans [26]). Il est montré dans [13] que les centralisateurs généralisés des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles constituent des sous-groupes anormaux très particuliers :

Fait 2.19. – **([13], cor. 5.12)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe localement nilpotent de G. Alors $E_G(H)$ est un sous-groupe définissable et connexe et H est contenu dans $F(E_G(H))$.*

Fait 2.20. – **([13], cor. 7.4)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe nilpotent de G. Alors $E_G(H)$ est anormal dans G.*

2.3 Sous-groupes localement clos

Dans un groupe de rang de Morley fini G, la *clôture définissable* d'un sous-ensemble X de G est l'intersection des sous-groupes définissables de G qui contiennent X. On la note $d(X)$. Par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables de G, c'est un sous-groupe définissable de G.

La notion de *sous-groupe localement clos* a été introduite et étudiée dans [14] et [12]. Les résultats montrés ici concernent, en général, les *sections localement closes.*

Définition 2.21. – *Un sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini G est dit* localement clos *si, pour toute partie fini X de H, $d(X) \leq H$.*

On appelle section localement close *un quotient entre deux sous-groupes localement clos.*

Le fait 2.22 donne une caractérisation des sous-groupes localement clos.

Fait 2.22. – **([12], lemme 3.4)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G. Alors H est localement clos si et seulement si H est définissable-par-localement fini.*

Le fait 2.23 permet de définir une notion de *clôture locale* (définition 2.24).

Fait 2.23. – **([14], lemme 3.7)** *Dans un groupe de rang de Morley fini, toute intersection de sous-groupes localement clos est localement close.*

Définition 2.24. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et X une partie de G. La* clôture locale *$d_{loc}(X)$ de X dans G est le plus petit sous-groupe localement clos de G qui contient X.*

Fait 2.25. – **([14], rem. 3.9)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et X un sous-ensemble de G. Alors $d_{loc}(X) = \langle X\rangle^{+}\langle X\rangle$. En particulier, si X est fini, $d_{loc}(X) = d(X)$.*

Le fait 2.26 est utilisé partout dans le texte et son utilisation ne sera pas mentionnée.

Fait 2.26. – **([14], lemme 3.6)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H et K deux sous-groupes localement clos de G tels que H normalise K. Alors HK est localement clos.*

Pour tout groupe G, on note $G^0 = G^{(0)} = G$, pour tout ordinal i, $G^{i+1} = [G, G^i]$ et $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$ et, pour tout ordinal limite j, $G^j = \bigcap_{i<j} G^i$ et $G^{(j)} = \bigcap_{i<j} G^{(i)}$.

Fait 2.27. – **([12], cor. 3.14)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G localement clos. Alors, pour tout ordinal α, H^{α} et $H^{(\alpha)}$ sont localement clos.*

Fait 2.28. – **([12], lemme 3.22)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Alors, pour tout sous-ensemble X de H, $C_{H/K}(XK/K)$ est une section de H localement close.*

Définition 2.29. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Une H-section A/B non triviale et localement close de H est dite H/K-d_{loc}-*minimale *si B contient K et si, pour toute H-section localement close C/B de A, $A = C$ ou $B = C$.*

Le fait 2.30 permet de montrer un analogue au théorème de Jordan-Hölder pour les sections localement closes des groupes de rang de Morley fini résolubles (cor. 6.7, [12]).

Fait 2.30. – **([12], prop. 6.5)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et U/V une H-section non triviale et localement close de H avec $K \leq V$. Alors U/V contient une section H/K-d_{loc}-minimale.*

Dans [14] ont été introduits, pour tout sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini, les sous-groupes H^{+} et H^{-} qui sont des imitations de la composante connexe.

Définition 2.31. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G. On note $H^{+} = \langle d(h)^{\circ} : h \in H\rangle$ et $H^{-} = \langle U \leq H : U$ est définissable et connexe $\rangle$.*

Remarque 2.32. – Si H est un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini G, alors HH^{+}/H^{+} est un groupe de torsion. En particulier, si G est résoluble, HH^{+}/H^{+} est localement fini.

Fait 2.33. – **([14], lemme 3.2)** *Si H est un sous-groupe d'un groupe G de rang de Morley fini :*
(i) H^{+} et H^{-} sont définissables, connexes et normalisés par H.
(ii) $(H^{+})^{+} = H^{+}$ et $(H^{-})^{-} = H^{-}$.

Cet article concerne les sections localement closes résolubles des groupes de rang de Morley fini. Le fait 2.34 montre que de telles sections sont aussi des sections localement closes de groupes de rang de Morley fini *résolubles*.

Fait 2.34. – **([12], cor. 4.11)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H/K une section localement close de G et L/K un sous-groupe localement résoluble de H/K. Alors il existe un sous-groupe définissable et résoluble de $d(H)/K^-$ qui couvre L/K, en particulier $d_{loc}(L)/K$ est résoluble.*

Fait 2.35. – **([12], cor. 4.14)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H/K une section localement close de G et L/K un sous-groupe localement nilpotent de H/K. Alors $d_{loc}(L)/K$ est localement nilpotent.*

Le fait 2.36 est analogue au fait 2.2.

Fait 2.36. – **([12], cor. 4.16)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H/K une section de G localement close et localement nilpotente et R/K le sous-groupe de torsion maximal de H/K. Alors $H/K^- = H^+K^-/K^- * R/K^-$ et H^+K^-/K^- est nilpotent.*

Fait 2.37. – **([12], prop. 4.17)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H/K est localement nilpotent ;

(ii) H/K est hypercentrale ;

(iii) H/K vérifie la condition de normalisateur.

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, H/K est nilpotent-par-fini.

Définition 2.38. – *Pour toute section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini, on note $(H/K)^{L\mathcal{N}}$ l'intersection des sections localement closes normales U/K de H/K telles que H/U soit localement nilpotent.*

Fait 2.39. – **([12], cor. 6.8)** *Si H/K est une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, alors $(H/K)/(H/K)^{L\mathcal{N}}$ est localement nilpotent.*

2.4 Sous-groupes de Hall généralisés

Dans [14], on avait introduit la notion de π-*élément* pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Cette notion généralise la notion habituelle de π-élément pour $\pi \subseteq \mathcal{P}$.

Définition 2.40. – *Soient R/K un sous-groupe d'une section localement close résoluble H/K, x un élément de H et $\overline{x}$ sa classe modulo K. Alors:*

a) $\overline{x}$ est un π-élément *si, pour tout $p \in \mathcal{P}^+ \setminus \pi$, $d(x)K/K$ est sans élément d'ordre p;*

b) R/K est un π-sous-groupe *de H/K si tous les éléments de R/K sont des π-éléments;*

c) R/K est un π-sous-groupe de Hall généralisé *de H/K si R/K est un π-sous-groupe maximal de H/K.*

d) R/K est un p-sous-groupe de Sylow *de H/K (pour $p \in \mathcal{P}^+$) si R/K est un p-sous-groupe maximal de H/K.*

On remarque que la définition *a*) a un sens puisque, si k est un élément de K alors, par le fait 2.26, $d(xk) \leq d_{loc}(xK) \leq d(x)K$. Or $d(x)K/K$ n'a pas d'élément d'ordre p et $d(xk)K/K$ non plus.

Pour $p \in \mathcal{P}$, un p-sous-groupe d'une section localement close résoluble H/K est localement nilpotent. Par contre, l'exemple 2.42 montre, qu'en présence d'un *mauvais corps* (définition 2.41), il peut exister des ∞-groupes non nilpotents.

Définition 2.41. – *Une structure $\langle K, +, ., T\rangle$ de rang de Morley fini est un* mauvais corps *si $\langle K, +, .\rangle$ est un corps et si T est un sous-groupe propre et infini de K^*.*

On ne sait pas si il existe ou non un mauvais corps. Pendant longtemps, il a été conjecturé que de tels objets n'existent pas. Suite à certains travaux récents, B. Poizat a conjecturé leur existence en caractéristique nulle ([28]). Par contre, F.O. Wagner a effectué certains travaux concernant les mauvais corps de caractéristique non nulle, et il conjecture qu'il n'existe pas de tels objets ([32]).

Exemple 2.42. – Si il existe un mauvais corps K de caractéristique nulle avec un sous-groupe multiplicatif T, infini, propre, définissable et sans torsion, alors $K_+ \rtimes T$ (où T agit linéairement sur K_+) est un ∞-groupe non nilpotent de rang de Morley fini.

Définition 2.43. – *Un* pur groupe *est un groupe qui n'est considéré qu'avec sa structure de groupe.*

Dans certains exemples, nous parlerons d'un pur groupe G isomorphe à $\mathbb{C}^*$. Dans ce cas, la structure définissable de $\mathbb{C}^*$ sera donnée par sa loi de groupe. En particulier, la possibilité d'un sous-groupe propre, infini et définissable sera exclue.

Le fait suivant généralise un fait qui a été prouvé avec l'hypothèse "H définissable" par Borovik et Nesin ([6]).

Fait 2.44. – **([14], cor. 3.5)** *Soient π un ensemble d'entiers premiers, G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe localement clos de G. Si $x \in N_G(H)$ est tel que sa classe modulo H soit un π-élément de $N_G(H)/H$, alors le coset xH contient un π-élément.*

Définition 2.45. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et H/K une section localement close résoluble d'un groupe de rang de Morley fini. On note $\mathcal{O}_\pi(H/K)$ le sous-groupe de H/K engendré par les π-sous-groupes normaux de H/K.*

Fait 2.46. – **([14], cor. 4.7 et 4.25)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble. Alors $\mathcal{O}_\pi(H/K)$ est une π-section localement close.*

Fait 2.47. – **([8], Borovik, Poizat)** *Soient $p \in \mathcal{P}$ et P un p-sous-groupe localement fini d'un groupe G de rang de Morley fini. Alors P° est nilpotent et $P^\circ = B * T$ est le produit central d'un groupe nilpotent B d'exposant borné et d'un p-tore T.*

Nous rappelons les principaux résultats concernant les sous-groupes de Hall dans les groupes de rang de Morley fini résolubles. Les faits 2.48, 2.49 et 2.56 ont été énoncer pour les groupes ω-stables résolubles. Il s'avère que les preuves données permettent des énoncés un peu plus général. Nous donnons ces énoncés dans le contexte des sections localement closes des groupes de rang de Morley fini résolubles.

Fait 2.48. – **([1], Altınel, Cherlin, Corredor, Nesin)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, G un groupe de rang de Morley fini résoluble et H un sous-groupe localement clos de G. Alors les π-sous-groupes de Hall de H sont conjugués.*

Fait 2.49. – **([1], Altınel, Cherlin, Corredor, Nesin)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H un sous-groupe de G localement clos, N un sous-groupe normal de H et R un π-sous-groupe de Hall de H. Alors :*

(i) $R \cap N$ est un π-sous-groupe de Hall de N;

(ii) Si N est localement clos, RN/N est un π-sous-groupe de Hall de H/N et tous les π-sous-groupes de Hall de H/N sont de cette forme.

Fait 2.50. – **([14], prop. 4.12)** *Si H/K est une section localement close et localement nilpotente d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, alors H/K possède un unique π-sous-groupe de Hall généralisé pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$.*

Fait 2.51. – **([14], th. 4.18)** *Dans une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, les π-sous-groupes de Hall généralisés de H/K sont conjugués pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$.*

Fait 2.52. – **([14], cor. 4.19)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, R/K est un π-sous-groupe de Hall généralisé de H/K et N/K un sous-groupe normal de H/K. Alors $R/K \cap N/K$ est un π-sous-groupe de Hall généralisé de N/K et tous les π-sous-groupes de Hall généralisés de N/K sont de cette forme.*

Fait 2.53. – **([14], cor. 4.24)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble. Si R/K désigne un π-sous-groupe de Hall généralisé de H/K, alors R/K est une section localement close.*

Fait 2.54. – **([14], cor. 5.5)** *Soient G un goupe de rang de Morley fini résoluble, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, H/K une section localement close de G, R/K un π-sous-groupe de Hall généralisé de H/K et A un sous-groupe localement clos et normal de H qui contient K. On suppose qu'un π'-sous-groupe de Hall généralisé de A/K est d'exposant borné. Alors RA/A est un π-sous-groupe de Hall généralisé de H/A et tous les π-sous-groupes de Hall généralisés de H/A sont de cette forme.*

Définition 2.55. – *Soient G un groupe et $\mathfrak{S} = (S_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une famille de sous-groupes où, pour tout entier p, S_p désigne un p-sous-groupe de Sylow de G. On dit que $\mathfrak{S}$ est une* base de Sylow *de G si $\langle S_p : p \in \pi\rangle$ est un π-sous-groupe pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$.*

Fait 2.56. – **([1], Altinel, Cherlin, Corredor, Nesin)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et H/K une section localement close de G. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de bases de Sylow.*

Définition 2.57. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section définissable-par-localement fini de G et $\mathcal{B} = (S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ une famille de sous-groupes où, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, S_π/K désigne un π-sous-groupe de Hall généralisé de H/K. On dit que $\mathcal{B}$ est une* base de Sylow généralisée *de H/K si, pour tout $\sigma \subseteq \pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $S_\sigma/K \leq S_\pi/K$.*

Fait 2.58. – **([14], th. 6.6)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et H/K une section localement close de G. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de bases de Sylow généralisées.*

Dans ce qui suit, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, les π-sous-groupes de Hall généralisés seront appelés π-sous-groupes de Hall. Il n'y a pas d'ambiguité possible puisque, si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, les notions de π-sous-groupe de Hall et de π-sous-groupe de Hall généralisés sont équivalentes.

3 Sous-groupes couvrants de Hall

Nous aurons besoin des définitions et faits suivants.

Définition 3.1. – **([7])** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. G est un* π^*-groupe *si G est connexe et si ses sections définissables, abéliennes et connexes sont π-divisibles.*

Définition 3.2. – *Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on note $B_\pi(G)$ le π-sous-groupe de Hall de $Q(G)$.*

Remarque 3.3. – $B_\pi(G)$ est quasiunipotent et $B_\pi(G) = \bigoplus_{p\in\pi} B_p(G)$.

Fait 3.4. – **([7], Borovik, Nesin)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Alors les π^*-sous-groupes maximaux de G sont conjugués. Si K est l'un d'eux, alors $G = B_\pi(G)K$ et $B_\pi(G) \cap K$ est un sous-groupe fini.*

Lemme 3.5. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Alors les π^*-sous-groupes maximaux de G sont exactement les sous-groupes de G de la forme $B_{\pi^\perp}(G)D$ où D désigne un sous-groupe définissable et divisible maximal d'un sous-groupe de Carter de G.*

Preuve. – Soient D un sous-groupe définissable et divisible maximal d'un sous-groupe de Carter C de G (C existe d'après le fait 2.13). Alors $B_{\pi^\perp}(G)D$ est un π^*-sous-groupe de G. Montrons la maximalité de $B_{\pi^\perp}(G)D$. Soit K un π^*-sous-groupe maximal de G qui contient $B_{\pi^\perp}(G)D$. Alors $K \cap B_\pi(G)$ est fini d'après le fait 3.4, donc $B_{\pi^\perp}(G)$ est d'indice fini dans $K \cap Q(G)$. Le fait 2.9 dit que $G/Q(G)$ est abélien et divisible, donc le fait 2.13 (*ii*) dit que $G = CQ(G)$. Soit B le sous-groupe d'exposant borné définissable et connexe maximal de C. Alors les faits 2.2 et 2.17 montrent que $C = B * D$, en particulier $G/Q(G) = (BQ(G)/Q(G))(DQ(G)/Q(G))$. Comme $G/Q(G)$ est divisible, on obtient $G = DQ(G) = KQ(G)$. On en déduit que $B_{\pi^\perp}(G)D$ est d'indice fini dans K, donc $B_{\pi^\perp}(G)D = K$ puisque K est connexe. Ainsi, $B_{\pi^\perp}(G)D$ est bien un π^*-sous-groupe maximal de G. Par conjugaison des π^*-sous-groupes maximaux de G (fait 3.4), tous les π^*-sous-groupes maximaux de G sont de cette forme, ce qui prouve le lemme. □

Lemme 3.6. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble tel que $G = G^+$ et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Si T est un π^*-sous-groupe maximal de G, alors $T = T^+$.*

Preuve. – Le fait 3.4 montre que $G = B_\pi(G)T$, en particulier $B_\pi(G)T^+$ est normal dans G. Or T/T^+ est localement fini, donc $G/B_\pi(G)T^+$ aussi. Ainsi on a $G^+ \leq B_\pi(G)T^+$, donc $G = B_\pi(G)T^+$. Mais le fait 3.4 dit que $B_\pi(G) \cap T$ est fini, donc T/T^+ est fini. T étant connexe, on a le résultat. □

Fait 3.7. – **([14], prop. 4.17)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K et U un sous-groupe normal, définissable et connexe de H tel que H/U soit localement fini. Alors il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que R normalise $B_\pi(U)CK$.*

Définition 3.8. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G, R/K une section localement close de H et $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si R couvre toutes les π-sections localement closes normales de H, on dit que R/K est un* sous-groupe π-couvrant *de H/K. De plus, si R/K est un sous-groupe π-couvrant minimal de H/K, alors R/K est un* sous-groupe π-couvrant de Hall *de H/K.*

Dans toute cette partie G désigne un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$.

Lemme 3.9. – *Si R/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K et si S/K est un sous-groupe π-couvrant de R/K, alors S/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K.*

Preuve. – Soit E/D une π-section localement close et normale de H. Alors $E = (R \cap E)D$ puisque R/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K. Or $(R \cap E)/(R \cap D)$ est une π-section définissable-par-localement fini et normale de R, donc $R \cap E \leq S(R \cap D)$. Ceci montre que $E \leq SD$, et on en déduit le résultat. □

Lemme 3.10. – *Si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, alors les sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K sont exactement les π-sous-groupes de Hall de H/K. De plus, tout sous-groupe π-couvrant de H/K contient un π-sous-groupe de Hall de H/K.*

Preuve. – Soit R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K. Montrons que R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. D'après le fait 2.49, R/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K. D'après le lemme 3.9, il suffit de montrer que R/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre. Supposons le contraire et soit S/K un sous-groupe π-couvrant propre de R/K. D'après le fait 2.30 il existe un ordinal α et une suite croissante $(R_i)_{i \leq \alpha}$ de sous-groupes normaux et localement clos de R avec $R_0 = K$, $R_\alpha = R$, $R_\mu = \cup_{i<\mu} R_i$ pour tout ordinal limite μ et, pour tout $i < \alpha$, la section R_{i+1}/R_i est R-d_{loc}-minimale. Comme $S < R$, il existe un plus petit $j \leq \alpha$ tel que R_j ne soit pas contenu dans S. j est nécessairement un ordinal successeur, donc il existe un ordinal k tel que $j = k + 1$. Par minimalité de j, S contient R_k. Ainsi S ne couvre pas R_j/R_k, ce qui est contradictoire. Donc R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.

Supposons maintenant que R/K soit un sous-groupe π-couvrant de H/K. Soit S/K un π-sous-groupe de Hall de R/K. Le fait 2.49 montre que S/K est un sous-groupe π-couvrant de R/K. On déduit alors du lemme 3.9 que S/K est sous-groupe π-couvrant de H/K. Soit T/K un π-sous-groupe de Hall de H/K qui contient S/K. Alors T/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K d'après ce qui précède, donc $T = S$. Ceci finit la preuve du lemme. $\square$

Lemme 3.11. – *Si L/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K et si $(K \cap H^+)^- = 1$, alors L contient un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient ∞.*

Preuve. – Montrons $H^+ = L^+Q(H^+)$. $H^+K/Q(H^+)K$ étant abélien (fait 2.9), $H^+K/Q(H^+)K$ possède un unique $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall $V/Q(H^+)K$. Alors H^+K/V est sans torsion et LV contient H^+K, d'où $H^+K = L^+V$. $L^+V/L^+Q(H^+)K$ est localement fini, donc $(L^+V)^+$ est contenu dans $L^+Q(H^+)K$. Mais on a $(L^+V)^+K/K = (H^+K)^+K/K = H^+K/K = L^+V/K$, ce qui prouve $L^+V = L^+Q(H^+)K$. Comme H^+ centralise K puisque $(K\cap H^+)^- = 1$, $L^+Q(H^+)$ est normal dans L^+V. Comme $(K \cap H^+)^- = 1$, K est localement fini, donc aussi $L^+V/L^+Q(H^+)$. Ainsi on obtient $H^+ = (H^+K)^+ = (L^+V)^+ \leq L^+Q(H^+)$ et on a bien $H^+ = L^+Q(H^+)$.

$B_\pi(H^+)$ étant un π-groupe, L contient $B_\pi(H^+)$. On en déduit que $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)(L\cap H^+)^-$. Soit U un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de $(L\cap H^+)^-$. Alors $(L\cap H^+)^- = B_{\pi^\perp}((L\cap H^+)^-)U$ d'après le fait 3.4. Mais $B_{\pi^\perp}((L \cap H^+)^-)$ est contenu dans $B_{\pi^\perp}(H^+)$ puisque $\infty \in \pi$ et $H^+/Q(H^+)$ est divisible et abélien (fait 2.9), donc $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)U$. Soit U_1 un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ qui contient U. Alors $U_1 \cap B_{\pi^\perp}(H^+)$ est fini d'après le fait 3.4, donc U est d'indice fini dans U_1 et $U = U_1$. Ceci prouve que L contient un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+. $\square$

Théorème 3.12. – *Tout sous-groupe π-couvrant de H/K contient un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K et les sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K sont conjugués dans H/K. De plus, si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, alors :*

(i) R/K contient un π-sous-groupe de Hall de H/K ;

(ii) si $\infty \in \pi$, il existe un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal T de H^+ et un π^--sous-groupe de Hall S de H qui normalise T tel que $R = TKS$ et $S \cap H^+ \leq T$, en particulier $R \cap H^+K = TK$;

(iii) si $\infty \in \pi$ et si R est un sous-groupe de H de la forme TKS où T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ et S un π^--sous-groupe de Hall de H qui normalise TK, R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.

Preuve. – D'après le lemme 3.10 et le fait 2.48, il suffit de prouver le théorème lorsque $\infty \in \pi$. Donc, durant toute la preuve, on supposera $\infty \in \pi$. On va d'abord prouver ceci :

(∗) *Soient T un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ et R/TK un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T)K/TK$. Alors R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K et tout sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K est de cette forme. De plus, $R \cap H^+K = TK$ et tout sous-groupe π-couvrant de H/K contient un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.*

Notons $K_1 = (K\cap H^+)^-$, $\overline{K} = K/K_1$, $\overline{T} = TK_1/K_1$ et $\overline{H} = H/K_1$. Supposons l'assertion (*) vraie quand $K_1 = 1$. D'après le fait 3.4, $\overline{T}$ est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+/K_1. Aussi T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de TK_1, donc $N_H(T)K_1/K_1 = N_{\overline{H}}(\overline{T})$ d'après le fait 3.4 et l'argument de Frattini. On en déduit que $(N_{\overline{H}}(\overline{T})\overline{K})/(\overline{TK}) = (N_H(T)K/K_1)/(\overline{TK})$. Ce qui précède montre que $(R/K_1)/(\overline{TK})$ est un π^--sous-groupe de Hall de $(N_{\overline{H}}(\overline{T})\overline{K})/(\overline{TK})$. Par hypothèse, $(R/K_1)/\overline{K}$ est un sous-groupe π-couvrant de Hall de $\overline{H}/\overline{K}$ et tout sous-groupe π-couvrant de Hall de $\overline{H}/\overline{K}$ est de cette forme. Aussi, tout sous-groupe π-couvrant de $\overline{H}/\overline{K}$ contient un sous-groupe π-couvrant de Hall de $\overline{H}/\overline{K}$. De plus, $R/K_1 \cap H^+K/K_1 = \overline{TK}$, donc il est clair que l'assertion (*) est toujours vraie, et on peut alors supposer $K_1 = 1$. Ainsi H^+ centralise K, donc K normalise T et $N_H(T)K = N_H(T)$.

On va d'abord montrer que R/K contient un π^--sous-groupe de Hall de H/K. R/TK étant un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T)/TK$, le fait 2.49 dit que R contient un π^--sous-groupe de Hall S de $N_H(T)$. D'après le fait 3.4 et l'argument de Frattini on a $H = B_{\pi^\perp}(H^+)N_H(T)$. Alors, d'après le fait 2.49, $SB_{\pi^\perp}(H^+)/B_{\pi^\perp}(H^+)$ est un π^--sous-groupe de Hall de $H/B_{\pi^\perp}(H^+)$. Comme $B_{\pi^\perp}(H^+)$

est un $\pi^{\perp}$-groupe, on a montré que S est un π^{-}-sous-groupe de Hall de H. En particulier SK/K est un π^{-}-sous-groupe de Hall de H/K d'après le fait 2.49 et, ainsi, R/K contient un π^{-}-sous-groupe de Hall de H/K.

Montrons que R/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K. Soit E/D une π-section localement close et normale de H avec $K \leq D$. Comme, d'après ce qui précède, R/K contient un π^{-}-sous-groupe de Hall de H/K, R couvre $E/E^{+}D$, donc on peut supposer $E = E^{+}D$. Par le fait 3.4 les $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupes maximaux de H^{+} sont conjugués et ceux de E^{+} aussi, donc T contient un $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupe maximal V de E^{+}. Or, comme $E^{+}/(E^{+} \cap D)$ est un π-groupe, $E^{+} \cap D$ contient $B_{\pi^{\perp}}(E^{+})$ et $E^{+} = V(E^{+} \cap D)$ d'après le fait 3.4. On en déduit que $E = E^{+}D = VD \leq TD \leq RD$ et R couvre E/D.

Montrons que $R \cap H^{+}K = TK$ et que R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Comme R/TK est un π^{-}-groupe et comme $H^{+} = B_{\pi^{\perp}}(H^{+})T$ d'après le fait 3.4, $R \cap H^{+}K = TK$. Soit S/K un sous-groupe π-couvrant de H/K contenu dans R/K. Le lemme 3.11 dit que S contient un $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupe maximal U de H^{+}, lequel est nécessairement contenu dans $(R \cap H^{+})^{-}$. Comme T est aussi un $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupe maximal de H^{+}, il existe $x \in (R \cap H^{+})^{-}$ tel que $U^{x} = T$ d'après le fait 3.4. Comme $R/(R \cap H^{+}K)$ est un π^{-}-groupe, le fait 2.49 donne $R = S(R \cap H^{+}K)$. Or on a vu que $R \cap H^{+}K = TK$, donc $R = ST = SU^{x}$. Ainsi il existe $s \in S$ et $u \in U$ tels que $x = su^{x}$, en particulier $x = us \in S$. Ceci montre que $R = S$ et que R/K est bien un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.

Finissons la preuve de l'assertion (*). Soit L/K un sous-groupe π-couvrant de H/K. Montrons que L/K contient un sous-groupe de H/K conjugué à R/K. Par le lemme 3.11, L contient un $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupe maximal U de H^{+}. Le fait 3.4 permet de supposer $U = T$. Alors T est un $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupe maximal de $(L \cap H^{+})^{-}$. Soit Q un π^{-}-sous-groupe de Hall de $N_{L}(T)$. On a $L = B_{\pi^{\perp}}((L \cap H^{+})^{-})N_{L}(T)$ d'après le fait 3.4 et l'argument de Frattini, donc $QB_{\pi^{\perp}}((L \cap H^{+})^{-})/B_{\pi^{\perp}}((L \cap H^{+})^{-})$ est un π^{-}-sous-groupe de Hall de $L/B_{\pi^{\perp}}((L \cap H^{+})^{-})$ d'après le fait 2.49. Comme $B_{\pi^{\perp}}((L \cap H^{+})^{-})$ est un $\pi^{\perp}$-groupe, on en déduit que Q est un π^{-}-sous-groupe de Hall de L. Le lemme 3.10 dit que L contient un π^{-}-sous-groupe de Hall de H, donc le fait 2.48 dit que Q est un π^{-}-sous-groupe de Hall de H. Par le fait 2.49, QTK/TK est un π^{-}-sous-groupe de Hall de $N_{H}(T)/TK$ (K normalise T puisque H^{+} centralise K). Ainsi, QTK/TK est conjugué à R/K (fait 2.48) et, comme L contient QTK, L/K contient un sous-groupe de H/K conjugué à R/K. Comme on a vu que R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, ceci finit la preuve de l'assertion (*).

Montrons que les sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K sont conjugués. Soient R_1/K et R_2/K deux sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K. D'après $(*)$, il existe deux $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupes maximaux T_1 et T_2 de H^{+} contenus respectivement dans R_1 et R_2 et telles que R_1/T_1K et R_2/T_2K soient des π^{-}-sous-groupes de Hall de $N_H(T_1)K/T_1K$ et $N_H(T_2)K/T_2K$ respectivement. Le fait 3.4 permet de supposer $T_1 = T_2$ et le fait 2.48 donnent la conjugaison de R_1/T_1K et de R_2/T_1K dans $N_H(T_1)K/T_1K$. Il reste donc à montrer (i), (ii) et (iii).

Montrons d'abord (iii). Soit R/K un sous-groupe de H/K de la forme TKS/K où T est un $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupe maximal de H^{+} et S un π^{-}-sous-groupe de Hall de H qui normalise TK. Alors R normalise $(TK \cap H^{+})^{-}$. Mais le fait 3.4 et l'argument de Frattini montrent que $N_H((TK \cap H^{+})^{-}) \leq (TK \cap H^{+})^{-}N_H(T) \leq KN_H(T)$, donc $R \leq KN_H(T)$ et R/TK est un π^{-}-sous-groupe de Hall de $N_H(T)K/TK$ d'après le fait 2.49. L'assertion (*) permet de conclure.

Montrons (i) et (ii). Soit Q/K un π-sous-groupe de Hall de H/K. D'après le fait 3.7 il existe un sous-groupe de Carter C de H^{+} tel que Q normalise $B_{\pi}(H^{+})CK$. Soient D le sous-groupe définissable et divisible maximal de C et $T = B_{\pi}(H^{+})D$. On va montrer que TK contient $QTK \cap H^{+}K$. Par le fait 2.2, $D(C \cap B_{\pi}(H^{+})K)/(C \cap B_{\pi}(H^{+})K)$ est le sous-groupe divisible maximal de $C/(C \cap B_{\pi}(H^{+})K)$, donc $TK/B_{\pi}(H^{+})K$ est le sous-groupe divisible maximal de $CB_{\pi}(H^{+})K/B_{\pi}(H^{+})K$. Alors TK est normal dans $N_H(B_{\pi}(H^{+})CK)$ et Q normalise TK. Le lemme 3.5 dit que T est un $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupe maximal de H^{+} et le fait 3.4 donne $H^{+} = B_{\pi^{\perp}}(H^{+})T$. Donc $(QTK \cap H^{+}K)/TK (= (QTK \cap B_{\pi^{\perp}}(H^{+}))TK/TK)$ est à la fois un π-groupe et un $\pi^{\perp}$-groupe et, par conséquent, est trivial. Ainsi TK contient $QTK \cap H^{+}K$.

Comme $QTK \cap H^{+}K \leq TK$, QTK/TK est localement fini et QTK/TK est un π^{-}-groupe. Par le fait 2.51, Q/K contient un π^{-}-sous-groupe de Hall de H/K, donc le fait 2.49 dit que QTK/TK est un π^{-}-sous-groupe de Hall de $N_H(T)K/TK$. Puisque T est un $(\pi^{\perp})^{*}$-sous-groupe maximal de

H^+, l'assertion (*) montre que QTK/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Comme les sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K sont conjugués, on peut supposer $R = QTK$ et on a donc prouvé (i). De plus, on a prouvé que $R \cap H^+K = (Q \cap H^+K)TK = TK$. D'après les faits 2.49 et 2.51, Q contient un π^--sous-groupe de Hall S_0 de H. Le fait 2.49 dit que $R = QTK = S_0TK$ puisque QTK/TK est localement fini. Comme S_0 normalise TK, S_0 normalise $(TK \cap H^+)^-$. Notons $B = B_{\pi^\perp}((TK \cap H^+)^-)$. Alors le fait 3.4 dit que $(TK \cap H^+)^- = BT$. Soit S un π^--sous-groupe de Hall de $N_{BTS_0}(T)$. D'après l'argument de Frattini, on a $BTS_0 = BN_{BTS_0}(T)$. SB/B est un π^--sous-groupe de Hall de BTS_0/B d'après le fait 2.49. Comme B est un $\pi^\perp$-groupe, on en déduit que S est un π^--sous-groupe de Hall de BTS_0. Le fait 2.48 dit alors que S est un π^--sous-groupe de Hall de H donc, comme R/TK est un π^--groupe, $R = TKS$ d'après le fait 2.49. Comme $T(S \cap H^+) = (B_{\pi^\perp}(H^+) \cap T(S \cap H^+))T$ d'après le fait 3.4, $T(S \cap H^+)/T$ est à la fois un π-groupe et un $\pi^\perp$-groupe, donc $S \cap H^+ \leq T$. Ceci finit la preuve de (ii). □

Corollaire 3.13. – *Si A/K est une section localement close et normale de H et si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, alors RA/A est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/A.*

Preuve. – Si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, le lemme 3.10 et le fait 2.49 donnent le résultat. Sinon le théorème 3.12 (ii) montre que RA/A est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/A. □

Corollaire 3.14. – *Si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, et si U/K est une section localement close de H qui contient R/K, alors R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de U/K.*

Preuve. – Si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, le lemme 3.10 donne le résultat. Sinon le théorème 3.12 (ii) dit qu'il existe T un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ et S un π^--sous-groupe de Hall de H qui normalise T tel que $R = TKS$. Comme $R \leq U$, on a $T \leq U$ donc $T^+ \leq U^+$. Alors le lemme 3.6 dit que T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de U^+, donc le théorème 3.12 (iii) donne le résultat. □

Corollaire 3.15. – *Si H/K est localement nilpotent, H/K possède un unique sous-groupe π-couvrant de Hall.*

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$. Alors H^+ est nilpotent d'après le fait 2.36. Comme $(H^+)^+ = H^+$, le fait 2.2 montre que H^+ est divisible. En particulier, H^+ est un $(\pi^\perp)^*$-groupe. Soit S_1/K l'unique π^--sous-groupe de Hall de H/K. Par le fait 2.49, il existe S un π^--sous-groupe de Hall de H tel que $S_1 = SK$. D'après le théorème 3.12 (i), H/K possède un sous-groupe π-couvrant de Hall R/K et on a $R = H^+KS = H^+S_1$ d'après (ii). Ainsi, R/K est normal dans H/K donc, par conjugaison des sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K (théorème 3.12), R/K est l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. □

L'exemple 3.16 montre que l'intersection d'un sous-groupe π-couvrant de Hall ($\pi \subseteq \mathcal{P}^+$) d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G avec un sous-groupe normal et localement clos T de G n'est pas nécessairement un sous-groupe π-couvrant de Hall de T. La proposition 3.17 donne une information sur les intersections des sous-groupes π-couvrants de Hall ($\pi \subseteq \mathcal{P}^+$) des sections localement closes des groupes de rang de Morley fini résolubles avec ses sous-groupes normaux.

Exemple 3.16. – Si G est un pur groupe isomorphe à $\mathbb{C}^*$ et si on choisit T un sous-groupe non trivial et localement fini de G, alors G est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de G. Pourtant $\{1\}$ est l'unique sous-groupe ∞-couvrant de Hall de T, et $G \cap T \neq 1$.

Proposition 3.17. – *Si A/K est une section localement close et normale de H et si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, alors $(R \cap A)/K$ contient un unique sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K.*

Preuve. – Si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, le lemme 3.10 et le fait 2.49 donnent le résultat. Donc on peut supposer $\infty \in \pi$. On peut aussi supposer $K^- = 1$. Le théorème 3.12 (ii) montre qu'il existe un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal T de H^+ et un π^--sous-groupe de Hall S de H qui normalise T tels que $R = TKS$.

Alors $(T \cap A^+)^\circ$ est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de A^+ d'après le fait 3.4 et, d'après le fait 2.49, $S \cap A$ est un π^--sous-groupe de Hall de A qui normalise $(T \cap A^+)^\circ$. Donc le théorème 3.12 (*iii*) dit que $(T \cap A^+)^\circ K(S \cap A)/K$ est un sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K, en particulier $(R \cap A)/K$ est un sous-groupe π-couvrant de A/K.

Supposons que $(R \cap A)/K$ ait un unique sous-groupe π-couvrant de Hall V/K. Comme $(R \cap A)/K$ est un sous-groupe π-couvrant de A/K, le lemme 3.9 dit que V/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K. Or V/K est l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de $(R \cap A)/K$, donc le corollaire 3.14 dit que $(R \cap A)/K$ ne contient pas d'autre sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $H = R$.

Soit U/K un sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K. Le théorème 3.12 (*ii*) montre qu'il existe un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal T de H^+ tel que R normalise TK et, aussi, $R \cap H^+K = TK$. Mais $R = H$, donc $H^+K = TK$ et, comme H^+ centralise K puisque $K^- = 1$ (fait 2.1), T centralise K et T est normal dans H^+. K étant localement fini, H/T est aussi localement fini, donc $H^+(= R^+) = T$. Ainsi R^+ est un $(\pi^\perp)^*$-groupe, donc $(A \cap R^+)^-$ aussi. En particulier $(A \cap R^+)^- K/K$ est contenu dans tout sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K. Par le corollaire 3.13, il suffit de montrer que $U/(A \cap R^+)^- K$ est l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de $A/(A \cap R^+)^- K$, c'est-à-dire qu'on peut supposer $(A \cap R^+)^- \leq K$. Comme $K^- = 1$, on a $(A \cap R^+)^- = 1$ et le fait 2.1 montre que A centralise R^+. Comme $A^+ \leq (A \cap R^+)^-$, A est localement fini. D'après le lemme 3.10 U/K est un π-sous-groupe de Hall de A/K. Soit $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_\pi(R/K)$. Alors $U\mathcal{O}/\mathcal{O}$ est un π-sous-groupe de Hall de $A\mathcal{O}/\mathcal{O}$ d'après le fait 2.54, en particulier $U = U\mathcal{O} \cap A$. Si $U\mathcal{O}/\mathcal{O}$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de $A\mathcal{O}/\mathcal{O}$ alors tout sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K est contenu dans $(U\mathcal{O} \cap A)/K = U/K$, donc on a le résultat et on peut alors supposer $\mathcal{O}/K = 1$.

U/K est un π-sous-groupe de Hall de A/K, donc UR^+/R^+K est un π-sous-groupe de Hall de AR^+/R^+K. Comme R/R^+K est un π-groupe, on en déduit que $UR^+ = AR^+$. Ainsi on a $A/K = U/K * (A \cap R^+K)/K$ et U/K est l'unique π-sous-groupe de Hall de A/K et, donc, est U/K normal dans R/K. Comme $\mathcal{O}/K = 1$, on a montré que $U/K = 1$, donc A/K n'a qu'un seul π-sous-groupe de Hall (c'est le sous-groupe trivial). $\square$

Lemme 3.18. – *Si U/K est une section localement close de H/K et si U/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant (de U/K) propre, alors U/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$, le lemme 3.10 donne le résultat, donc on peut supposer $\infty \in \pi$. On peut aussi supposer $K^- = 1$. On fait la preuve par induction sur le rang de H^+. Soit B/K l'intersection des sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K. Alors B est un sous-groupe localement clos et normal de H. U/K étant sans sous-groupe π-couvrant propre, $U/(U \cap B^-K)$ est aussi sans sous-groupe π-couvrant propre, donc UB^-/B^-K et $(UB^-/B^-)/(B^-K/B^-)$ aussi. Si $B^- \neq 1$, l'hypothèse d'induction dit qu'il existe un sous-groupe π-couvrant de Hall $(S/B^-)/(B^-K/B^-)$ de $(H/B^-)/(B^-K/B^-)$ avec $UB^- \leq S$. D'après le corollaire 3.13, il existe un sous-groupe π-couvrant de Hall S_0/K de H/K avec $S = S_0B^-$. Par le choix de B, S_0 contient B, donc S/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K qui contient U/K, et on peut supposer $B^- = 1$.

D'après le fait 2.2, $F(H^+)^\circ = B_{\pi^\perp}(H^+) * D$ où D est l'unique $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de $F(H^+)^\circ$. Mais D est normal dans H^+ et, donc, D est contenu dans tout $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+. D'après le théorème 3.12 (*ii*), D est contenu dans B, donc $D = 1$ puisque $B^- = 1$. Ainsi on a $F(H^+)^\circ = B_{\pi^\perp}(H^+) = Q(H^+)$ et $F(H^+)$ ne contient pas de $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe non trivial. D onc, d'après le fait 2.5, tout $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe de H^+ est abélien. Si $U^+ = 1$, le lemme 3.10 donne le résultat, donc on peut supposer $U^+ \neq 1$. Comme $K^- = 1$, le théorème 3.12 (*ii*) dit que U^+ est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe de H^+, donc ce qui précède dit que U^+ est abélien et non contenu dans $F(H^+)$. Alors $E_{H^+}(U^+)$ est un sous-groupe définissable, anormal et propre de H^+ d'après les faits 2.19 et 2.20, donc, $N_H(E_{H^+}(U^+))^+ < H^+$. Aussi, comme K centralise H^+ du fait que $K^- = 1$, $K \leq N_H(E_{H^+}(U^+))$. Donc l'hypothèse d'induction dit que U/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall R/K de $N_H(E_{H^+}(U^+))/K$. Par le théorème 3.12 (*ii*), $R = TKS$ où T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de $N_H(E_{H^+}(U^+))^+$ et S un π^- sous-groupe de Hall de $N_H(E_{H^+}(U^+))$ qui normalise T. Comme H^+ centralise K, T centralise K et R normalise T.

$E_{H^+}(U^+)$ étant un sous-groupe anormal de H^+, les faits 2.9 et 2.20 montrent que $H^+ = Q(H^+)E_{H^+}(U^+)$. Comme $Q(H^+) = B_{\pi^\perp}(H^+)$, on a $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)E_{H^+}(U^+)$. Comme $B_{\pi^\perp}(H^+)$ est normal dans H^+, on obtient $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)E_{H^+}(U^+)^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)N_H(E_{H^+}(U^+))^+$. Le fait 3.4 donne alors $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)T$. Ceci prouve que T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+. Soit S_1 un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T)$ qui contient S. Comme $H = B_{\pi^\perp}(H^+)N_H(T)$ d'après le fait 3.4 et l'argument de Frattini, le fait 2.49 montre que S_1 est un π^--sous-groupe de Hall de H. Le théorème 3.12 *(iii)* montre que TKS_1/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Comme TKS_1/K contient U/K, on a finit la preuve. □

Proposition 3.19. – *Si $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée de H/K et si U est un sous-groupe définissable, connexe et normal de H tel que H/U soit localement fini, alors il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que S_π normalise $B_\pi(U)CK$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur le rang de U. Notons $K_1 = (K \cap U)^-$ et $B_\pi/K_1 = B_\pi(U/K_1)$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si $K_1 \neq 1$ alors, par hypothèse d'induction, il existe un sous-groupe de Carter D/K_1 de U/K_1 tel que S_π/K_1 normalise $B_\pi DK/K_1$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. D'après le fait 2.14 il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que $D = CK_1$. Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. D'après le fait 2.9, $[U, B_\pi] \leq Q(U) \cap B_\pi \leq B_\pi(U)K_1$, donc $B_\pi/B_\pi(U)K_1 \leq Z(U/B_\pi(U)K_1) \leq CB_\pi(U)K_1/B_\pi(U)K_1$ d'après le fait 2.14. En particulier $B_\pi DK = B_\pi(U)CK$ et S_π normalise $B_\pi(U)CK$. Ceci étant vrai pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on a le résultat et on peut donc supposer $K_1 = 1$.

Si U est nilpotent, il n'y a rien à démontrer, donc le fait 2.9 permet de supposer que $Q(U)$ contient un sous-groupe H-minimal A. Alors $(S_\pi A/AK)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée de H/AK d'après le fait 2.54. Par hypothèse d'induction il existe un sous-groupe de Carter D/A de U/A tel que $S_\pi A/A$ normalise $B_\pi(U/A)DK/A$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $B/A = B_\pi(U/A)$. Alors S_π normalise BDK et on a $B_\pi(U)A = B \cap Q(U)$. Aussi on a $[B, U] \leq B \cap Q(U) = B_\pi(U)A$, donc $B/B_\pi(U)A$ est central dans $U/B_\pi(U)A$. Mais $DB_\pi(U)/B_\pi(U)A$ est un sous-groupe de Carter de $U/B_\pi(U)A$ d'après le fait 2.14, donc $B \leq DB_\pi(U)$ et, comme U centralise K ($K_1 = 1$), on a $K \cap U \leq DB_\pi(U)$. En particulier $BDK \cap U = DB_\pi(U)(K \cap U) = DB_\pi(U)$ et S_π normalise $B_\pi(U)D$ (pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$).

Soit $p \in \mathcal{P}^+$ tel que A soit un p-groupe. Montrons

(∗) *il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que $D = CA$ et tel que $S_{p^\perp}$ normalise $B_{p^\perp}(U)CK$.*

Soient $S = S_{p^\perp}D$ et $V = (S \cap U)^-$. Comme $S_{p^\perp}$ contient $B_{p^\perp}(U)K$ et normalise $B_{p^\perp}(U)DK$, S est un sous-groupe localement clos de H. S contient $B_{p^\perp}(U)$ et $B_{p^\perp}(U)$ est contenu dans V, donc $B_{p^\perp}(V) = B_{p^\perp}(U)$. Aussi $(S \cap U)/V$ et $S/(S \cap U)$ sont localement fini, donc S/V est aussi localement fini. Alors, d'après le fait 3.7, $S_{p^\perp}$ normalise $B_{p^\perp}(V)C_0K$ pour un sous-groupe de Carter C_0 de V. C_0A/A étant un sous-groupe de Carter de V/A d'après le fait 2.14, il existe $v \in V$ tel que $(C_0A)^v = D$. Notons $C = C_0^v$. Comme $D \leq V \leq S = S_{p^\perp}D$, on peut supposer $v \in S_{p^\perp}$. On en déduit que $S_{p^\perp}$ normalise $B_{p^\perp}(V)CK = B_{p^\perp}(U)CK$. C étant un sous-groupe de Carter de $D(\leq V)$, C est un sous-groupe de Carter de U (fait 2.14), ce qui prouve (∗).

On choisit C un sous-groupe de Carter comme dans (∗). Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si $p \in \pi$, A est contenu dans $B_\pi(U)$ puisque A est un p-groupe, donc S_π normalise $B_\pi(U)CK$. Soit $L = B_{p^\perp}(U)CK \cap B_\pi(U)DK$. Si $p \notin \pi$, (∗) montre que S_π normalise L. On a $L = B_\pi(U)CK(B_{p^\perp}(U)CK \cap A)$. Soit T/K le p-sous-groupe de Hall de CK/K. Alors $TB_{p^\perp}(U)/B_{p^\perp}(U)K$ est un p-sous-groupe de Hall de $B_{p^\perp}(U)CK/B_{p^\perp}(U)K$ (fait 2.54). Comme $B_{p^\perp}(U)K/K$ est un $p^\perp$-groupe, T/K est un p-sous-groupe de Hall de $B_{p^\perp}(U)CK/K$. En particulier, T contient $B_{p^\perp}(U)CK \cap A$ et $L = B_\pi(U)CK$. Ceci finit la preuve de la proposition. □

Définition 3.20. – *Une* base de Sylow couvrante *de H/K est une famille $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ où R_π/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et où $R_\sigma \leq R_\pi$ pour tout $\sigma \subseteq \pi$.*

Théorème 3.21. – *(i) H/K possède une unique classe de conjugaison de bases de Sylow couvrantes.*

De plus, si $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de H/K, alors :

(ii) il existe une base de Sylow généralisée $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ de H/K et un sous-groupe de Carter C de H^+ tels que, pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, S_π normalise $B_\pi(H^+)CK$, $R_\pi = S_\pi$ si $\infty\notin\pi$ et, si on note D le sous-groupe définissable et divisible maximal de C, $R_\pi = S_\pi D$ si $\infty\in\pi$. En particulier $R_\pi R_\sigma = R_{\pi\cup\sigma}$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ et tout $\sigma\subseteq\mathcal{P}^+$;

(iii) la base de Sylow généralisée $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ de (ii) est l'unique base de Sylow généralisée de H/K telle que $S_\pi\leq R_\pi$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$.

Preuve. – On va d'abord montrer l'existence d'une base de Sylow couvrante $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ de H/K qui vérifie *(ii)*. D'après le fait 2.58, H/K possède une base de Sylow généralisée $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$. Aussi, la proposition 3.19 dit qu'il existe un sous-groupe de Carter C de H^+ tel que S_π normalise $B_\pi(H^+)CK$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$. C a un unique sous-groupe D définissable et divisible maximal. Alors S_π normalise $B_\pi(H^+)DK$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$. Pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, on note $T_\pi = B_\pi(H^+)D$. Le lemme 3.5 montre que, pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ qui contient ∞, T_π est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+. Alors, pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ qui contient ∞, $R_\pi/K = T_\pi S_{\pi^-}/K$ est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K d'après le théorème 3.12. De même, si $\infty\notin\pi$, le lemme 3.10 dit que $R_\pi/K = S_\pi/K$ est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Soient $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ et $\sigma\subseteq\mathcal{P}^+$. Si $\infty\notin\pi\cup\sigma$, alors $R_\pi R_\sigma = S_\pi S_\sigma = S_{\pi\cup\sigma} = R_{\pi\cup\sigma}$. Si $\infty\in\pi\setminus\sigma$, alors $R_\pi R_\sigma = B_\pi(H^+)DS_{\pi^-}S_\sigma = B_\pi(H^+)DS_{\pi^-\cup\sigma} = B_{\pi\cup\sigma}(H^+)DS_{(\pi\cup\sigma)^-} = R_{\pi\cup\sigma}$. De façon analogue on a $R_\pi R_\sigma = R_{\pi\cup\sigma}$ si $\infty\in\sigma\setminus\pi$. De même, si $\infty\in\pi\cap\sigma$, alors $R_\pi R_\sigma = B_\pi(H^+)DS_{\pi^-} = B_\sigma(H^+)DS_{\sigma^-} = B_{\pi\cup\sigma}(H^+)DS_{(\pi\cup\sigma)^-} = R_{\pi\cup\sigma}$. On en déduit que $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de H/K qui vérifie *(ii)*.

Montrons que toute base de Sylow couvrante $(U_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ de H/K est conjugué à $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$. On va montrer cela par induction sur le rang de H^+. On peut supposer $K^- = 1$. Supposons d'abord H^+ abélien. Comme $(H^+)^+ = H^+$ (fait 2.33), H^+K/K est l'unique sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K et on a $R_\infty = H^+K = U_\infty$. Comme $(U_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ et $(R_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ sont deux bases de Sylow de H/K et sont conjugués d'après le fait 2.56, on peut supposer $U_\pi = R_\pi$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}$. Ainsi, si $\infty\in\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, on a $R_\pi = H^+R_{\pi^-} = U_\pi$. On en déduit qu'on peut supposer H^+ non abélien. Par le fait 2.9, $Q(H^+)$ contient un sous-groupe H-minimal A. D'après le corollaire 3.13 et l'hypothèse d'induction, $(R_\pi A/AK)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ et $(U_\pi A/AK)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ sont conjugués, donc on peut supposer $R_\pi A = U_\pi A$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$. Soit $p\in\mathcal{P}^+$ tel que A soit un p-groupe. Alors $R_{p^\perp}/K$ et $U_{p^\perp}/K$ sont deux sous-groupes $p^\perp$-couvrants de $R_{p^\perp}A/K(= U_{p^\perp}A/K)$. Si $R_{p^\perp}/K$ (resp. $U_{p^\perp}/K$) contient strictement un sous-groupe $p^\perp$-couvrant V/K de $R_{p^\perp}A/K$, alors le lemme 3.9 dit que V/K est un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de H/K, ce qui est contradictoire puisque $R_{p^\perp}/K$ (resp. $U_{p^\perp}/K$) est un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de H/K. Le théorème 3.12 dit alors que $R_{p^\perp}$ et $U_{p^\perp}$ sont A-conjugués. Donc, comme $A\leq R_\pi\cap U_\pi$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ qui contient p, on peut supposer $R_{p^\perp} = U_{p^\perp}$. Ainsi, pour tout $\pi\subseteq p^\perp$, on a $U_\pi = U_\pi A\cap U_{p^\perp} = R_\pi A\cap R_{p^\perp} = R_\pi$. Comme $U_\pi = R_\pi A = R_\pi$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ qui contient p, on a prouvé la conjugaison des bases de Sylow couvrantes de H/K.

Il reste à montrer l'unicité de $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$. Soit $(V_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow généralisée de H/K telle que $V_\pi\leq R_\pi$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$. Soit $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$. Montrons que $((R_\pi\cap H^+K)/K)'$ est un π-groupe. Si $\infty\notin\pi$ le lemme 3.10 donne le résultat. Sinon, comme $B_\pi(H^+)D$ est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+, le théorème 3.12 donne $R_\pi\cap H^+K = (B_\pi(H^+)D)K$. Or D' est sans torsion (fait 2.2) et est contenu dans $Q(H^+)$ (fait 2.9), donc D' est contenu dans $B_\pi(H^+)$. Ceci prouve que $(R_\pi\cap H^+K)'\leq B_\pi(H^+)K$, donc $((R_\pi\cap H^+K)/K)'$ est bien un π-groupe. On en déduit que $(R_\pi\cap H^+K)/K$ a un unique π-sous-groupe de Hall $\mathcal{O}/K$. En particulier $\mathcal{O} = V_\pi\cap H^+K = S_\pi\cap H^+K$ et, aussi, les π-sous-groupes de Hall de $H/\mathcal{O}$ sont localement fini. Ainsi, d'après le fait 2.49, on a $S_\pi\mathcal{O}/\mathcal{O} = S_{\pi^-}\mathcal{O}/\mathcal{O}$ et $V_\pi\mathcal{O}/\mathcal{O} = V_{\pi^-}\mathcal{O}/\mathcal{O}$. Mais, par le lemme 3.10, on a nécessairement $S_{\pi^-} = R_{\pi^-} = V_{\pi^-}$, donc $S_\pi = V_\pi$. Ceci finit la preuve du théorème. □

On dira que la base de Sylow généralisée $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ du théorème ci-dessus est la *base de Sylow généralisée de H/K associée à $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$*.

L'exemple ci-dessous dit que, si π et σ sont deux sous-ensembles de $\mathcal{P}^+$, on n'a pas nécessairement $R_\pi\cap R_\sigma = R_{\pi\cap\sigma}$.

Exemple 3.22. – On considère un pur groupe G isomorphe à $\mathbb{C}^*$. Pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}$, on note S_π le π-sous-groupe de Hall de G. Pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, on note $R_\pi = S_\pi$ si $\infty\notin\pi$ et $R_\pi = G$

sinon. Alors $(R_\pi)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de G. Or, si $\pi\subseteq\mathcal{P}$ n'est pas vide, on a $R_\pi\cap R_{\pi^\perp}=S_\pi\neq 1(=R_{\pi\cap\pi^\perp})$.

4 $\mathcal{M}$-normalisateurs

On va maintenant montrer un résultat concernant les normalisateurs des sous-groupes de Hall des sections localement closes des groupes de rang de Morley fini (corollaire 4.4). Le contrexemple suivant montre qu'un normalisateur d'un p-sous-groupe ($p\in\mathcal{P}$) d'un groupe de rang de Morley fini n'est pas nécessairement localement clos.

Exemple 4.1. – On considère K un corps algébriquement clos indénombrable de caractéristique non nulle et $G=K_+\rtimes K^*$ où K^* agit linéairement sur K_+. Si u désigne un élément non trivial de K_+, x un élément d'ordre infini de K^* et $V=\langle u,x\rangle$, alors $N_G(V\cap K_+)$ contient x et pas $d(x)$. En particulier, $N_G(V\cap K_+)$ n'est pas localement clos.

Dans toute cette section G désigne un groupe de rang de Morley fini résoluble et H/K une section localement close de G.

Lemme 4.2. – *Soit V/K une section localement close de H qui intersecte trivialement $(H/K)^{L\mathcal{N}}$. Alors $N_{H/K}(V/K)$ est une section localement close et V/K est hypercentral dans $N_{H/K}(V/K)$.*

Preuve. – Soit $L/K=(H/K)^{L\mathcal{N}}$. Pour tout ordinal i, on note $Z_i/L=Z_i(H/L)$ et $V_i=Z_i\cap V$. Z_i et V_i sont localement clos pour tout ordinal i (fait 2.28). H/L étant hypercentral (fait 2.37), il existe un ordinal μ tel que $V=V_\mu$. Soit $N/K=N_{H/K}(V/K)$. N/K centralise V_{i+1}/V_i pour tout $i<\mu$, donc V/K est hypercentral dans N/K. On note $C_0=H$; pour tout ordinal $i<\mu$, $C_{i+1}/V_i=C_{C_i/V_i}(V_{i+1}/V_i)$ et, pour tout ordinal limite $\nu\leq\mu$, $C_\nu=\bigcap_{i<\nu}C_i$. Alors C_μ/K normalise V/K et, comme N/K est contenu dans C_μ/K, $C_\mu=N$. Mais C_μ est localement clos d'après le fait 2.28, donc on a prouvé le lemme. □

Proposition 4.3. – *Soit V/K une section localement close de H telle que $V/K\cap(H^+K/K)^{L\mathcal{N}}$ soit normal dans H/K. Alors $N_{H/K}(V/K)$ est une section localement close de H.*

Preuve. – Supposons $V/K\cap H^+K/K$ normal dans H/K. Soient $N/K=N_{H/K}(V/K)$, $U/K=V/K\cap H^+K/K$ et $C/U=C_{H/U}(V/U)$. Alors C est localement clos d'après le fait 2.28. Mais on a $[N_{H^+K/K}(V/K),V/K]\leq U/K$, donc $N_{H^+K/K}(V/K)=C/K$ et, comme H/H^+K est localement fini, on en déduit N est localement clos.

Finissons la preuve de la proposition. Soit $B/K=V/K\cap(H^+K/K)^{L\mathcal{N}}$. Quitte à considérer H/B au lieu de H/K, on peut supposer $B/K=1$. Le lemme 4.2 montre que $N_{H^+K/K}(V/K\cap H^+K/K)$ est une section localement close. Comme H/H^+K est localement fini, $N_{H/K}(V/K\cap H^+K/K)$ est une section localement close. Soit $N/K=N_{H/K}(V/K\cap H^+K/K)$. Alors, $V/K\cap N^+K/K$ étant contenu dans H^+K/K, $V/K\cap N^+K/K$ est normal dans N/K. Ce qui précède dit que $N_{N/K}(V/K)$ est une section localement close. Mais $N_{H/K}(V/K)$ est contenu dans N/K, donc $N_{H/K}(V/K)$ est une section localement close. □

Corollaire 4.4. – *Soient L/K une section normale et localement close de H/K, $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ et R/K un π-sous-groupe de Hall de L/K. Alors $N_{H/K}(R/K)$ est une section localement close de G.*

Preuve. – Soit $A/K=(H^+K/K)^{L\mathcal{N}}$. D'après le fait 2.53 et la proposition 4.3, il suffit de montrer que $R/K\cap A/K$ est normal dans H/K. A/K est un sous-groupe nilpotent de H/K d'après le fait 2.5, donc $A/K\cap L/K$ possède un unique π-sous-groupe de Hall R_0/K (fait 2.50). De plus, R_0/K est normal dans H/K. Comme on a $R/K\cap A/K=R_0/K$ d'après le fait 2.52, on a prouvé le corollaire. □

Corollaire 4.5. – *Si L/K est une section localement close et normale de H/K et si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de L/K ($\pi\subseteq\mathcal{P}^+$), alors $N_H(R)$ est localement clos.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$ le lemme 3.10 et le corollaire 4.4 donnent le résultat. Donc on peut supposer $\infty \in \pi$. Alors, d'après le théorème 3.12 (ii), il existe un $(\pi^{\perp})^*$-sous-groupe maximal T de H^+ et un π^--sous-groupe de Hall de S de H qui normalise T tel que $R = TKS$ et $R \cap H^+K = TK$. T étant contenu dans $(TK \cap H^+)^-$, on a $TK = (TK \cap H^+)^- K$, en particulier $N_H(TK) = N_H((TK \cap H^+)^-)$ est localement clos. Ainsi $R/TK (= STK/TK)$ est un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(TK)/TK$ d'après le fait 2.49. Le corollaire 4.4 dit alors que $N_{N_H(TK)}(R)$ est localement clos. Comme $R \cap H^+K = TK$, $N_H(R)$ normalise TK et, ainsi, $N_H(R) (= N_{N_H(TK)}(R))$ est localement clos. □

Ce résultat est essentiel pour la suite. Notamment, il montre que les $\mathcal{M}$-*normalisateurs* (définition 4.6) sont des sections localement closes.

Définition 4.6. – *Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ est un* π-système *de H/K si, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, M_σ est un sous-groupe normal et localement clos de H et si $M_{\sigma_1} \leq M_{\sigma_2}$ dès que $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$.*

Soit $\mathcal{R} = (R_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K. D'après la proposition 3.17, pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, il existe un unique sous-groupe $\sigma^{\perp}$-couvrant de Hall $R^*_{\sigma^\perp}/K$ de M_σ/K contenu dans $R_{\sigma^\perp}K \cap M_\sigma/K$ Alors $R_\pi/K \cap \bigcap_{\sigma \subseteq \pi} N_{H/K}(R^*_{\sigma^\perp}/K)$ est appelé $\mathcal{M}$-normalisateur *de H/K associé à $\mathcal{R}$.*

Remarque 4.7. – Par le théorème 3.21, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et tout π-système $\mathcal{M}$ d'une section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, les $\mathcal{M}$-normalisateurs de H/K sont conjugués. De plus, le corollaire 4.5 montre que ce sont des sections localement closes de H.

On peut remarquer que les $\mathcal{M}$-normalisateurs dans le sens "classique" (cf. [15]) correspondent exactement aux notres si H/K est localement fini. Ainsi le fait 4.8 peut se déduire du lemme 2.13 de [15] (où il est donné pour les $\mathcal{U}$-groupes) et du fait qu'un $\mathcal{M}_c$-groupe résoluble de torsion est un $\mathcal{U}$-groupe ([9]).

Fait 4.8. – **([15], lemme 2.13, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *On suppose H/K localement fini. Soient A/K un sous-groupe normal de H/K, $\pi \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un* π-système *de H/K, $\overline{\mathcal{M}} = (M_\sigma A/A)_{\sigma \subseteq \pi}$, $(R_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K et N/K le $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K associé à $(R_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$. Alors NA/A est le $\overline{\mathcal{M}}$-normalisateur de H/A associé à $(R_\sigma A/A)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ et tout $\overline{\mathcal{M}}$-normalisateur de H/A est de cette forme.*

Théorème 4.9. – *Soient A/K une section localement close et normale de H, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de H/K, $\overline{\mathcal{M}} = (M_\sigma A/A)_{\sigma \subseteq \pi}$, $\mathcal{R} = (R_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K et N/K le $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K associé à $\mathcal{R}$. Alors NA/A est le $\overline{\mathcal{M}}$-normalisateur de H/A associé à $(R_\sigma A/A)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ et tout $\overline{\mathcal{M}}$-normalisateur de H/A est de cette forme.*

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$. Pour tout $\sigma \subseteq \pi$, on note $R^*_{\sigma^\perp}/K$ l'unique sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de M_σ/K contenu dans $R_{\sigma^\perp}/K \cap M_\sigma/K$. Alors, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, $R^*_{\sigma^\perp}(A \cap M_\sigma)/(A \cap M_\sigma)$ est un sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de $M_\sigma/(A \cap M_\sigma)$ d'après le corollaire 3.13. Donc, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, $R^*_{\sigma^\perp}A/A$ est un sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de $M_\sigma A/A$ Soit M/A le $\overline{\mathcal{M}}$-normalisateur de H/A. associé à $(R_\sigma A/A)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$. Comme, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, $R^*_{\sigma^\perp}A/A \leq R_{\sigma^\perp}A/A \cap M_\sigma A/A$, la proposition 3.17 donne $M/A = R_\pi A/A \cap \cap_{\sigma \subseteq \pi} N_{H/A}(R^*_{\sigma^\perp}A/A)$, en particulier $AN \leq M$. Montrons l'inclusion inverse. Pour cela on va d'abord montrer le résultat lorsque $\pi = \mathcal{P}^+$ (partie I). Ensuite, dans la partie II, on traitera le cas général.

I.1) *Si A/K est un p-groupe pour un $p \in \mathcal{P}^+$.*

Soient $N_0 = N_M(R^*_{p^\perp})$ et $N_1 = N_{N_0}(R^*_{\{p,\infty\}^\perp})$. $R^*_{p^\perp}/K$ étant un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de M_p/K, il n'a pas de sous-groupe $p^\perp$-couvrant propre. Mais $R^*_{p^\perp}/K$ est un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de $AR^*_{p^\perp}/K$ donc, par le lemme 3.18, $R^*_{p^\perp}/K$ est un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de $AR^*_{p^\perp}/K$. Par le théorème 3.12 et l'argument de Frattini on obtient $M = AN_0$. D'autre part on a $AR^*_{\{p,\infty\}^\perp} \cap R^*_{p^\perp} = (A \cap R^*_{p^\perp})R^*_{\{p,\infty\}^\perp}$ et le lemme 3.10 dit que $R^*_{\{p,\infty\}^\perp}/K$ est un $\{p,\infty\}^\perp$-sous-groupe. Donc $R^*_{\{p,\infty\}^\perp}/K$ est un $\{p,\infty\}^\perp$-sous-groupe de Hall de $(A \cap R^*_{p^\perp})R^*_{\{p,\infty\}^\perp}/K$ et le fait

2.48 et l'argument de Frattini montrent que $N_0 = (A \cap R^*_{p^\perp})N_1$. On en déduit que $M = AN_1$. Il suffit donc de montrer que N_1 est contenu dans N. Soit $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$.

Si $p \notin \sigma$, $R^*_{\sigma^\perp}$ contient $A \cap M_\sigma$. Donc, comme M/A normalise $R^*_{\sigma^\perp}A/A$, M/K normalise $R^*_{\sigma^\perp}/K$.

Si $p \in \sigma$ et $\infty \in \sigma$, $R^*_{\{p,\infty\}^\perp} \cap R^*_{\sigma^\perp}A = R^*_{\sigma^\perp}(R^*_{\{p,\infty\}^\perp} \cap A) = R^*_{\sigma^\perp}$ puisque $R^*_{\{p,\infty\}^\perp}/K$ est un $\{p,\infty\}^\perp$-groupe d'après le lemme 3.10. En particulier N_1/K normalise $R^*_{\sigma^\perp}/K$.

On peut donc supposer $p \in \sigma$ et $\infty \notin \sigma$ (donc $p \in \mathcal{P}$). Pour tout $\nu \subseteq \mathcal{P}^+$, on note U_ν/K l'unique sous-groupe ν-couvrant de Hall de M_σ/K contenu dans $R_\nu/K \cap M_\sigma/K$ (donc $U_{\sigma^\perp} = R^*_{\sigma^\perp}$). Alors $(U_\nu/K)_{\nu \subseteq \mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de M_σ/K. D'après le théorème 3.21, il existe un sous-groupe définissable et divisible maximal D d'un sous-groupe de Carter de M^+_σ tel que $D \leq U_\nu$ pour tout $\nu \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient ∞ et tel que U_ν normalise $B_\nu(M^+_\sigma)DK$ pour tout $\nu \subseteq \mathcal{P}^+$. Comme N_0/K normalise $R^*_{p^\perp}/K$ et comme $p \in \sigma$, N_0/K normalise $U_{p^\perp}/K$. En particulier $N_1/K (\leq N_0/K)$ normalise $R^*_{\sigma^\perp}A/K \cap U_{p^\perp}/K = R^*_{\sigma^\perp}(A \cap U_{p^\perp})/K$. Si on note $B = B_{p^\perp}(M^+_\sigma)$, alors BD est un p^*-sous-groupe maximal de M^+_σ (lemme 3.5) et le théorème 3.12 (*iii*) montre que $U_{p^\perp} = (BD)KU_{p'}$. Comme BDK est normal dans $U_{p^\perp}$ (par le choix de D) et comme A/K est un p-groupe, ceci montre que $A \cap U_{p^\perp} = A \cap BDK$ (fait 2.49). Soit $D_1 = AB \cap DK$. Comme tous les p-éléments de AB/K sont contenus dans A/K, $(D_1 \cap A)/K$ est l'unique p-sous-groupe de Sylow de D_1/K. En particulier le fait 2.49 montre que, comme $D_1/(B \cap D_1)K$ est un p-groupe, $D_1 = (D_1 \cap A)(B \cap D_1)$. Ainsi $A \cap U_{p^\perp} = A \cap B(AB \cap DK) = A \cap B(D_1 \cap A)(B \cap D_1) = (D_1 \cap A)(A \cap B)$. Or $A \cap B \leq K$ puisque A/K est un p-groupe, donc $A \cap U_{p^\perp} = A \cap DK$. Mais DK est contenu dans $U_{\sigma^\perp}(= R^*_{\sigma^\perp})$ d'après le choix de D, donc on a montré que N_1/K normalise $R^*_{\sigma^\perp}/K$. On en déduit que N_1 est contenu dans N, d'où $M = AN$.

I.2) *On peut supposer $Q(H^+) = 1$, A localement fini. De plus, on peut supposer qu'on a soit $A \leq H^+K$, soit $A \cap H^+K = K$.*

D'après I.1) on peut supposer $A = A^\circ K$ et $A \cap Q(d(H)^\circ) \leq K$, en particulier A/K est abélien et central dans $H^\circ K/K$ (fait 2.9). On peut même supposer que, si $Q(d(H)^\circ)$ possède un q-élément non trivial pour $q \in \mathcal{P}$, A/K ne possède pas de q-élément non trivial. Soit A_0/K le sous-groupe de torsion maximal de A/K. Alors A/A_0 est sans torsion, donc on peut supposer $A = A_0$ et A est localement fini puisque $K^- = 1$. De plus, on peut supposer $A \leq H^+K$ ou $A \cap H^+K = K$.

Montrons que $Q(H^+) \cap M$ est contenu dans N. Soient $p \in \mathcal{P}^+$ et $x \in B_p(H^+) \cap M$ et $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$.

Si $p \notin \sigma$, $[x, R^*_{\sigma^\perp}] \leq B_p(H^+) \cap M_\sigma \leq R^*_{\sigma^\perp}$.

Si $p \in \sigma$ et $\infty \in \sigma$, alors $R^*_{\sigma^\perp}/K$ est un $\sigma^\perp$-groupe d'après le lemme 3.10. Donc, comme $A \cap Q(d(H)^\circ) \leq K$, $[x, R^*_{\sigma^\perp}] \leq B_p(H^+) \cap R^*_{\sigma^\perp}A \leq B_p(H^+) \cap A \leq Q(d(H)^\circ) \cap A \leq K$.

Si $p \in \sigma$ et $\infty \notin \sigma$, le théorème 3.12 dit qu'il existe un σ^*-sous-groupe maximal T de M^+_σ et un σ'-sous-groupe de Hall S de M_σ tels que TK soit normal dans $R^*_{\sigma^\perp}$ et $R^*_{\sigma^\perp} = TKS$. On en déduit que $B_p(H^+) \cap R^*_{\sigma^\perp}A$ est contenu dans TKA. Or, si $A \cap H^+K = K$, $TKA \cap H^+$ est contenu dans TK et on obtient $B_p(H^+) \cap R^*_{\sigma^\perp}A \leq TK \leq R^*_{\sigma^\perp}$. Sinon on a $A \leq H^+K$ et $A = (A \cap H^+)K$. Comme $A/K \leq Z(H^\circ K/K)$ et $K^- = 1$, $A \cap H^+$ est central dans H^+, donc $A \cap H^+$ est contenu dans tout sous-groupe de Carter de H^+. Soient C un sous-groupe de Carter de H^+ et $D(C)$ son sous-groupe définissable et divisible maximal. Alors les faits 2.2 et 2.17 montrent que $C = (C \cap B_{\mathcal{P}}(H^+)) * D(C)$. Comme A/K ne possède pas de q-élément non trivial ($q \in \mathcal{P}$) si $Q(d(H)^\circ)$ en possède un, et comme $A \cap H^+$ est contenu dans C, $(A \cap H^+)K/K = (A \cap D(C))K/K$. Or $B_{\sigma^\perp}(H^+)D(C)$ est un σ^*-sous-groupe maximal de H^+ d'après le lemme 3.5. Donc, d'après le fait 3.4 et comme C est un sous-groupe de Carter quelconque de H^+, on peut supposer $T = B_{\sigma^\perp}(H^+)D(C)$. En particulier on a $A \cap H^+ \leq TK$, ce qui donne $B_p(H^+) \cap R^*_{\sigma^\perp}A = B_p(H^+) \cap TKA = B_p(H^+) \cap TK \leq R^*_{\sigma^\perp}$. On a montré que $[x, R^*_{\sigma^\perp}]$ est contenu dans $R^*_{\sigma^\perp}$ pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ et on en déduit que, comme ceci est vrai pour tout $x \in B_p(H^+) \cap M$ et tout $p \in \mathcal{P}^+$, $Q(H^+) \cap M$ normalise $R^*_{\sigma^\perp}$ pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$. On a donc bien $Q(H^+) \cap M \leq N$.

Supposons le résultat vrai lorsque $Q(H^+) = 1$. Par I.1, on a $MQ(H^+) = ANQ(H^+)$. Mais $Q(H^+) \cap M$ est contenu dans N, donc $M = AN(M \cap Q(H^+)) = AN$ et, ainsi, on peut supposer $Q(H^+) = 1$.

I.3) *$M \cap H^+K$ est contenu dans AN.*

Comme $Q(H^+) = 1$, le fait 2.9 montre que H^+ est divisible et abélien, donc $R_\infty/K = H^+K/K$. En particulier H^+K normalise $R^*_{\sigma^\perp}$ dès que $\infty \notin \sigma$. On a donc $M \cap H^+K = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{H^+K}(R_{\sigma'}A \cap M_{\sigma\cup\{\infty\}}A)$ et, de même, $N \cap H^+K = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{H^+K}(R_{\sigma'} \cap M_{\sigma\cup\{\infty\}})$. En particulier on obtient $R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap M = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}\cap H^+K}(R_{\sigma'}A \cap (M_{\sigma\cup\{\infty\}} \cap R_{\infty^\perp})A)$ et, aussi,

$$R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap N = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}\cap H^+K}(R_{\sigma'} \cap (M_{\sigma\cup\{\infty\}} \cap R_{\infty^\perp}))$$

Supposons $A \leq H^+K$. Alors le fait 4.8 montre que $\cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'}A \cap (M_{\sigma\cup\{\infty\}} \cap R_{\infty^\perp})A) = A(\cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'} \cap (M_{\sigma\cup\{\infty\}} \cap R_{\infty^\perp})))$, donc on a $R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap M = A(R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap N)$. Mais, si $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ contient ∞, le lemme 3.10 montre que $R^*_{\sigma^\perp}/K$ est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de $(A \cap M_\sigma)R^*_{\sigma^\perp}/K$. Par l'argument de Frattini on obtient $M \cap H^+K = (A \cap M_\sigma)N_{M\cap H^+K}(R^*_{\sigma^\perp})$. En particulier, comme A est localement fini, $(M \cap H^+K)/N_{M\cap H^+K}(R^*_{\sigma^\perp})$ est localement fini. Or $N \cap H^+K = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+,\infty\in\sigma} N_{M\cap H^+K}(R^*_{\sigma^\perp})$, donc $(M \cap H^+K)/(N \cap H^+K)$ est localement fini et $M \cap H^+K = (R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap M)(N \cap H^+K)$ d'après le fait 2.49. Ce qui précède montre qu'on a bien $M \cap H^+K = A(N \cap H^+K)$.

Donc, par I.2), on peut supposer $A \cap H^+K = K$. Soit $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient ∞. Alors $[M \cap H^+K, R^*_{\sigma^\perp}] \leq H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}A$. Or $H^+KA/A \cap R^*_{\sigma^\perp}A/A$ est un $\sigma^\perp$-groupe d'après le lemme 3.10, donc $(H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}A)/K$ est un $\sigma^\perp$-groupe puisque $A \cap H^+K = K$. $(R^*_{\sigma^\perp} \cap H^+K)/K$ étant le $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de H^+K/K, on en déduit que $H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}A = H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}$, donc $[M \cap H^+K, R^*_{\sigma^\perp}] \leq R^*_{\sigma^\perp}$ et $M \cap H^+K$ normalise $R^*_{\sigma^\perp}$. Ceci étant vrai pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient ∞, $M \cap H^+K$ est contenu dans N.

I.4) *Argument final (lorsque $\pi = \mathcal{P}^+$).*

Pour finir la preuve du théorème, il reste à montrer que $MH^+ = ANH^+$. En effet, on aura alors $M = AN(M \cap H^+) = AN$ d'après 3). Notons $X = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)$ et $Y = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'}A \cap M_\sigma A)$. Comme $R^*_{\sigma^\perp} = M^+_\sigma R_{\sigma'}$ pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}$ puisque $M^+_\sigma(\leq H^+)$ est abélien. On a donc $X \leq N$ et $Y \leq M$. D'autre part on peut appliquer le fait 4.8 à X et Y et on obtient

$$\frac{X(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)}{(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)} = \bigcap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}/(R_{\infty^\perp}\cap H^+A)}\left(\frac{R_{\sigma'}(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)}{(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)} \cap \frac{M_\sigma(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)}{(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)}\right)$$

et, de même, $Y(R_{\infty^\perp} \cap H^+A) = N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'}(R_{\infty^\perp} \cap H^+A) \cap M_\sigma(R_{\infty^\perp} \cap H^+A))$. Or $R_{\infty^\perp}$ couvre H/H^+A d'après le fait 2.49, donc le fait 4.8 donne

$$XH^+A/H^+A (= YH^+A/H^+A) = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{H/H^+A}(R_{\sigma'}H^+A/H^+A \cap M_\sigma H^+A/H^+A)$$

Comme $R^*_{\sigma^\perp} = M^+_\sigma R_{\sigma'}$ pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}$, on en déduit que M et N sont contenus dans $XH^+A = YH^+A$, donc on a bien $MH^+ = ANH^+$ puisque $X \leq N$ et $Y \leq M$.

II. *Cas général (π quelconque).*

On suppose $A \neq K$. Alors il existe $n \in N^*$ et une suite croissante $(A_i)_{i=0,\dots,n}$ de sous-groupes normaux et définissables-par-localement fini de H avec $A_0 = K$, $A_n = A$ et, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, A_{i+1}/A_i est soit un π-groupe, soit un $\pi^\perp$-groupe. On peut donc clairement supposer que A/K est soit un π-groupe, soit un $\pi^\perp$-groupe. En particulier, si on note $U/K = \cap_{\sigma\subseteq\pi} N_{H/K}(R^*_{\sigma^\perp}/K)$, alors A est contenu soit dans R_π, soit dans U.

Soit $V/A = \cap_{\sigma\subseteq\pi} N_{H/A}(R^*_{\sigma^\perp}/A)$. Si on définit $M_\sigma = K$ pour tout $\sigma \nsubseteq \pi$ et si on note $\mathcal{N} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ et $\overline{\mathcal{N}} = (M_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ des $\mathcal{P}^+$-systèmes de H/K et H/A respectivement, alors U/K est le $\mathcal{N}$-normalisateur de H/K associé à $\mathcal{R}$ et V/A est le $\overline{\mathcal{N}}$-normalisateur de H/A associé à $(R_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$. La partie I prouve que $V = UA$. Or $N = R_\pi \cap U$ et $M = R_\pi A \cap V$, donc on a $M = R_\pi A \cap UA$. Comme on a $A \leq R_\pi$ ou $A \leq U$, on obtient $M = (R_\pi \cap U)A = NA$. Le résultat est donc prouvé. $\square$

L'exemple 4.11 montre qu'il est impossible de trouver un théorème de couverture et d'évitement analogue au théorème 3.4 de [15]. Et même, comme le montre l'exemple 4.12, il est possible, en présence d'un mauvais corps, qu'il existe une section H/K-d_{loc}-minimale de H qui ne soit ni couverte, ni évitée par les $\mathcal{M}$-normalisateurs de H/K (où $\mathcal{M}$ désigne un π-système de H/K pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$). On peut ajouter à cela que l'exemple 2.42 (qui donne un ∞-groupe non nilpotent) nous empêche de trouver un analogue au corollaire 3.3 de [15]. Par contre, le corollaire 4.10 dit que, pour tout $p \in \pi$, toute p-section H/K-d_{loc}-minimale centrale de H est couverte par les $\mathcal{M}$-normalisateurs H/K.

Corollaire 4.10. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de H/K et N/K un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. Alors, pour tout $p \in \pi$, N couvre toute p-section normale de H/K centralisée par M_p.*

Preuve. – Soient $p \in \pi$ et U/A une p-section normale de H/K centralisée par M_p/K. On reprend les notations du théorème 4.9. Comme U/A est une p-section et comme U/A centralise M_pA/A, U/A est contenu dans $M/A = NA/A$. Ceci prouve le résultat. □

Exemple 4.11. – Si G est un pur groupe isomorphe à $\mathbb{C}^*$ et si $\pi = \{\infty\}$, on note $\mathcal{M} = (G)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de G. Alors G est l'unique $\mathcal{M}$-normalisateur de G et G couvre des p-sections G-d_{loc}-minimales non triviales de G pour $p \notin \pi$.

Exemple 4.12. – On suppose qu'il existe un mauvais corps ${}_0K$ de caractéristique nulle avec T un sous-groupe de ${}_0K^*$ définissable, infini et sans torsion. On considère $U = ({}_0K_+ \rtimes T) \times ({}_0K_+ \rtimes T)$ (où T agit linéairement sur ${}_0K_+$) et i l'automorphisme involutif de U qui, à tout $(u, v) \in U$ associe (v, u). On forme le produit semi-direct $G = U \rtimes \langle i \rangle$. Soit $\mathcal{M} = (G)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ un $\mathcal{P}^+$-système de G. Si M est un $\mathcal{M}$-normalisateur de G associé à une base de Sylow couvrante $(S_\sigma)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ de G avec $S_{\{2\}} = \langle i \rangle$, alors $M = C_G(i)$. On en déduit que ${}_0K_+ \times {}_0K_+$ est un sous-groupe G-d_{loc}-minimal de G qui n'est ni couvert, ni évité par M.

Lemme 4.13. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, R/K un sous-groupe σ-couvrant de Hall de H/K et U/K un sous-groupe ∞-couvrant de R/K. Alors U/K contient un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. En particulier, tout sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K contenu dans R/K contient un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K.*

Preuve. – Montrons que U/K contient un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. D'après le lemme 3.10, on peut supposer $\infty \in \sigma$. On peut supposer U/K sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K. Le lemme 3.9 dit que U/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K. D'après le théorème 3.21, il existe une base de Sylow couvrante $\mathcal{R} = (R_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ de H/K. Par conjugaison des sous-groupes σ-couvrants de Hall de H/K et des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de R/K (théorème 3.12), on peut supposer $R = R_\sigma$ et $U = R_\infty$. Par le théorème 3.21 (ii), il existe un sous-groupe de Carter C de H^+ tel que, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, R_π normalise $B_\pi CK$ et tel que, si $\infty \in \pi$, $R_\pi = R_{\pi^-}D$ où D est le sous-groupe définissable et divisible maximal de C. Or $T = B_\sigma(H^+)D$ est un $(\sigma^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ (lemme 3.5) et R_σ normalise TK, donc $R_\sigma = B_\sigma(H^+)DKR_{\sigma^-}$ d'après le théorème 3.12 (iii). De même, $R_\infty = B_\infty(H^+)DK$. Soit S/K un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de DK/K. Alors $S/(DK \cap B_\sigma(H^+)K)$ est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de $DK/(DK \cap B_\sigma(H^+)K)$ (fait 2.49). On en déduit que $SB_\sigma(H^+)K/B_\sigma(H^+)K$ est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de $B_\sigma(H^+)DK/B_\sigma(H^+)K$. Mais $B_\sigma(H^+)K/K$ est sans $\sigma^\perp$-élément non trivial, donc S/K est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de $B_\sigma(H^+)DK/K$. Comme $R = R_\sigma = B_\sigma(H^+)DKR_{\sigma^-}$, S/K est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. Comme $S \leq DK \leq U$, on a le résultat.

Si L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K contenu dans R/K, alors le corollaire 3.14 dit que L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K. Ce qui précède dit que L/K contient un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. Ceci finit la preuve du lemme. □

Corollaire 4.14. – *Soient $\nu \subseteq \mathcal{P}^+$, R/K un sous-groupe ν-couvrant de Hall de H/K et S/K un $\nu^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. Alors S/K est abélien et divisible.*

Preuve. – On peut supposer $\infty \in \nu$. Soit $\mathcal{R} = (R_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K avec $R = R_\nu$. D'après le fait 2.48 et le lemme 4.13, on peut supposer S/K contenu dans R_∞/K. Le théorème 3.12 (ii) dit qu'il existe un $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T de H^+ tel que $R_\infty = TK$ et le fait 2.9 dit que T' est sans torsion. Ainsi $R_\infty/R'_\infty K$ est abélien et divisible et, comme $S \cap R'_\infty K = K$, $SR'_\infty/R'_\infty K$ est isomorphe à S/K. Mais le fait 2.49 dit que $SR'_\infty/R'_\infty K$ est un $\nu^\perp$-sous-groupe de Hall de $R_\infty/R'_\infty K$, donc S/K est abélien et divisible. □

Fait 4.15. – **([14], lemme 4.20)** *On suppose G connexe. Soient p un entier premier et T un p-tore de G. Alors $T \cap F(G) \leq Z(G)$.*

Lemme 4.16. – *Soient U/V une section H/K-d_{loc}-minimale de H, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et R/K un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Alors R couvre ou évite U/V.*

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$, en particulier H^+ centralise K. On peut aussi supposer que U/V est une p-section pour un $p \notin \pi$ et que U/V n'est pas évité par R. Si $\infty \notin \pi$, R/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K d'après le lemme 3.10. Alors R évite U/V, ce qui est contradictoire. Donc on a $\infty \in \pi$. Le théorème 3.12 dit que R/K contient un sous-groupe ∞-couvrant de Hall R_∞/K de H/K. Mais le lemme 4.13 dit alors que R_∞/K contient un $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall R_0/K de R/K. Comme $p \in \pi^\perp$ et comme R n'évite pas U/V, R_0 n'évite pas U/V, donc R_∞ non plus. On peut alors supposer $\pi = \{\infty\}$, en particulier $R = R_\infty$. D'après le théorème 3.12 (ii), $R = TK$ pour un $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T de H^+, en particulier T n'évite pas U/V.

Notons $B = B_{\mathcal{P}}(H^+)$. Supposons U/V non couverte par B. Alors B évite U/V et on a $[B, (U \cap T)V] \leq B \cap U \leq V$. Comme le fait 3.4 donne $H^+ = BT$, on obtient $[H^+, (U \cap T)V] \leq V[T, (U \cap T)V] \leq (U \cap T)V$ et H^+ normalise $(U \cap T)V$. Par conjugaison des $\mathcal{P}^*$-sous-groupes maximaux dans H^+ (fait 3.4), on a $(U \cap T_1)V = (U \cap T)V$ pour tout $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T_1 de H^+. On en déduit que $(U \cap T)V$ est normal dans H. Par minimalité de U/V et comme T n'évite pas U/V, on a $(U \cap T)V = U$. Mais $(U \cap T)V = (U \cap R)V$, donc R couvre U/V et on en déduit qu'on peut supposer que BK couvre U/V. Quitte à remplacer U/V par $(U \cap BK)/(V \cap BK)$, on peut supposer $U \leq BK$.

Soit T_0 un p-sous-groupe de Sylow de T. Par le fait 2.49, T_0 n'évite pas U/V. De plus, comme T est un $\mathcal{P}^*$-groupe, on a $B_p(T)$=1 et $T_0 \cap Q(T) = 1$. Mais $T_0Q(T)/Q(T)$ est un p-sous-groupe de Sylow de $T/Q(T)$ (fait 2.49), et $T/Q(T)$ est abélien et divisible (fait 2.9), donc $T_0Q(T)/Q(T)$ est un p-tore. Mais T est un $\mathcal{P}^*$-groupe, donc $Q(T)$ est sans torsion et T_0 est un p-tore. Comme on a $B(K \cap H^+) \leq F(H^+)$ puisque $K \cap H^+ \leq Z(H^+)$, $T_0(K \cap H^+) \cap B(K \cap H^+)$ est central dans H^+ (fait 4.15). On en déduit que $(T_0K \cap BK)/K$ est central dans H^+K/K. Par conjugaison des p-sous-groupes de Sylow de T et par conjugaison des $\mathcal{P}^*$-sous-groupes maximaux de H^+ (fait 3.4), on en déduit que $T_0K \cap BK$ est normal dans H. Ceci prouve que $T_0K \cap U$ est normal dans H et, comme T_0 n'évite pas U/V, T_0 couvre U/V par minimalité de U/V. On en déduit que R couvre U/V. □

Lemme 4.17. – *Soit H/K est une section localement close abélienne et divisible. Alors les sous-groupes d'exposant bornés de H/K sont finis.*

Preuve. – Par le fait 2.34, on peut supposer $d(H)$ résoluble. Il suffit de montrer que, pour tout $p \in \mathcal{P}$, les p-sous-groupes d'exposant bornés de H/K sont finis. Soient $p \in \mathcal{P}$, B/K un p-sous-groupe d'exposant borné de H/K et S/K un p-sous-groupe de Sylow de H/K. Alors S/K est un p-tore. Les faits 2.49 et 2.47 montrent qu'il existe un p-tore T de H qui couvre S/K. Le fait 2.6 dit que T est de taille finie. Donc S/K est aussi de taille fini et B/K, par conséquent, est fini. □

Lemme 4.18. – *Soient U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H ($p \in \mathcal{P}$), M/K une section normale et localement close de H qui ne centralise pas U/V et R/K un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de M/K. Alors, soit $N_H(R)$ évite U/V, soit R^+ couvre U/V. De plus, si R^+ couvre U/V, alors U/V est finie.*

Preuve. – On suppose que $N_H(R)$ n'évite pas U/V. Montrons d'abord que R n'évite pas U/V. Soit $D = M/C_M(U/V)$, on a $D \neq 1$ par hypothèse. D agit sur U/V par conjugaison. Soit S_1 un p-sous-groupe de Sylow de M. Alors, d'après le fait 2.49, S_1 couvre U/V et S_1 couvre $\mathcal{O}_p(D)$. De plus,

S_1 est hypercentral (fait 2.37), donc $U/V \rtimes \mathcal{O}_p(D)$ aussi et $C_{U/V}(\mathcal{O}_p(D)) \neq 1$. Or $C_{U/V}(\mathcal{O}_p(D))$ est une section localement close (fait 2.28) normalisée par H, donc $\mathcal{O}_p(D)$ centralise U/V par minimalité de U/V. On en déduit que $\mathcal{O}_p(D) = 1$. Comme $D \neq 1$, on a $\mathcal{O}_{p^\perp}(D) \neq 1$. Si R évite U/V, alors $N_{U/V}(RV/V)$ est centralisé par R et, comme R couvre $\mathcal{O}_{p^\perp}(D)$, $1 \neq N_U(R)V/V \leq N_{U/V}(RV/V) \leq C_{U/V}(R) \leq C_{U/V}(\mathcal{O}_{p^\perp}(D))$. Ainsi, par minimalité de U/V, $\mathcal{O}_{p^\perp}(D)$ centralise U/V, ce qui est contradictoire. Donc R n'évite pas U/V.

Montrons maintenant que R couvre U/V. D'après le lemme 4.13, si S/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K, S/K contient un p-sous-groupe de Sylow de R/K. En particulier S n'évite pas U/V (fait 2.49). D'après le lemme 3.9, S/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre et, d'après le lemme 3.18, il existe un sous-groupe ∞-couvrant de Hall S_0/K de H/K qui contient S/K. Alors S_0/K couvre U/V d'après le lemme 4.16. Or, d'après le théorème 3.12 (ii), $S_0 = TK$ pour un $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T de H^+. Comme T' est quasiunipotent (fait 2.9) et comme $B_{\mathcal{P}}(T) = 1$ puisque T est un $\mathcal{P}^*$-groupe, T' est sans torsion, donc $(S_0/K)'$ est sans torsion. Comme S_0 couvre U/V, on en déduit que S_0 centralise U/V. Par conséquent, $S(\leq S_0)$ centralise U/V. Par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de $C_{M/K}(U/V)$, $(S \cap U)V/V = (S_1 \cap U)V/V$ pour tout sous-groupe ∞-couvrant de Hall S_1/K de $C_{M/K}(U/V)$. En particulier $(S \cap U)V/V$ est normalisé par H/K (puisque $C_{M/K}(U/V)$ est normal dans H/K). Ainsi S couvre U/V par minimalité de U/V et, donc, R couvre U/V. D'après le lemme 3.18, S/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre donc, comme S/S^+K est localement fini, $S = S^+K$ et S^+ couvre U/V. En particulier R^+ couvre U/V.

Montrons que U/V est finie. Soient R_∞/K un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K et P/K un p-sous-groupe de Sylow de R_∞/K. Par le lemme 4.13, P/K est un p-sous-groupe de Sylow de R/K. Comme R couvre U/V, le fait 2.49 montre que P couvre U/V. Mais le corollaire 4.14 dit que P/K est un p-tore et PV/V est un p-tore. Or U/V est une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H/K. Donc U/V est un sous-groupe d'exposant p de PV/V et le lemme 4.17 dit que U/V est finie. □

Lemme 4.19. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble et U/K une section localement close de H qui couvre ou évite chaque section H/K-d_{loc}-minimale de H. Si un sous-groupe L/K de U/K couvre les mêmes sections H/K-d_{loc}-minimales de H que U/K, alors $L = U$.*

Preuve. – Supposons $L < U$. D'après le fait 2.30, il existe un ordinal μ et une suite croissante $(H_i)_{i \leq \mu}$ de sous-groupes normaux et localement clos de H tels que $H_0 = K$, $H_\mu = H$, H_{i+1}/H_i soit H/K-d_{loc}-minimal pour tout $i < \mu$ et $H_\alpha = \cup_{j<\alpha} H_j$ pour tout ordinal limite $\alpha \leq \mu$. Il existe un plus petit ordinal $\nu < \mu$ tel que $H_\nu \cap L \neq H_\nu \cap U$. ν ne peut pas être un ordinal limite, donc il existe un ordinal β tel que $\beta + 1 = \nu$. On a $H_\beta \cap U \neq H_\nu \cap U$, donc U n'évite pas H_ν/H_β et U couvre H_ν/H_β. On en déduit que L couvre aussi H_ν/H_β. Soit $u \in (H_\nu \cap U) \setminus L$. Alors il existe $l \in L \cap H_\nu$ et $h \in H_\beta$ tels que $u = lh$. Comme $l \in U$, h appartient à $H_\beta \cap U (= H_\beta \cap L)$, ce qui est contradictoire. □

Définition 4.20. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de H/K, N/K un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K et N^*/K une section localement close de N qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections normales de H/K centralisées par M_p. Si N^*/K est minimale pour ces conditions, alors N^*/K est appellé* $\mathcal{M}^*$-normalisateur *de H/K.*

Lemme 4.21. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ contenant ∞ et $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de H/K. On suppose que M_∞ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de M_∞. Alors les $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de H/K sont exactement les sous-groupes π-couvrants de Hall des $\mathcal{M}$-normalisateurs de H/K.*

Preuve. – Soient $\mathcal{R} = (R_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K et N/K le $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K associé à $\mathcal{R}$. Pour tout $\sigma \subseteq \pi$, on note $R^*_{\sigma^\perp}/K$ l'unique sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de M_σ/K contenu dans $R_{\sigma^\perp}/K \cap M_\sigma/K$. Si M/K est une section localement close de N qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections localement closes normales de H/K centralisées par M_p, alors tout sous-groupe π-couvrant R/K de Hall de M/K possède la même propriété. Comme R/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall de N/K d'après les lemmes 3.9 et 3.18, on en déduit qu'il suffit, pour prouver le lemme, de montrer que les sous-groupes π-couvrants de Hall de N/K sont des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de H/K.

D'après le corollaire 4.10, pour tout $p \in \pi$, tout sous-groupe π-couvrant de Hall de N/K couvre toutes les p-sections localement closes normales de H/K centralisées par M_p. Soit L/K une section localement close d'un sous-groupe π-couvrant de Hall R/K de N/K telle que, pour tout $p \in \pi$, L couvre toutes les p-sections localement closes normales de H/K centralisées par M_p. On va montrer qu'on a nécessairement $L/K = R/K$, ce qui finira la preuve du lemme.

Soit U/V une q-section H/K-d_{loc}-minimale de H ($q \in \pi^-$) qui n'est pas évitée par N. Montrons que L couvre U/V. D'après le choix de L, on peut supposer U/V non centralisée par M_q. Comme N n'évite pas U/V, $N_H(R^*_{q^\perp})$ n'évite pas U/V et $R^*_{q^\perp}$ couvre U/V (lemme 4.18). Alors le lemme 4.13 et le fait 2.49 disent que U/V est couverte par R_∞ donc, par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de H/K (théorème 3.12), tout sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K couvre U/V. Or L couvre toutes les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H d'après l'hypothèse faite sur M_∞. Donc, par le théorème 3.12, L/K contient un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, ce qui prouve que L couvre U/V. De plus, on a montré que N couvre ou évite chaque π^--section H/K-d_{loc}-minimale de H.

Montrons que $L/K = R/K$. Soient P/K un π^--sous-groupe de Hall de L/K et P_1/K un π^--sous-groupe de Hall de R/K qui contient P/K. Par ce qui précède et par le fait 2.49, P et P_1 couvrent chaque π^--section H/K-d_{loc}-minimale de H non évitée par N. Comme P et P_1 sont contenus dans N, P et P_1 évitent les π^--sections H/K-d_{loc}-minimales de H évitées par N. Alors le lemme 4.19 donne $P = P_1$. Aussi, L/K contient un sous-groupe ∞-couvrant de Hall Q/K de H/K d'après le théorème 3.12. D'après le corollaire 3.14, Q/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K. Le théorème 3.21 (*ii*) montre que $R = PQ_1$ pour un sous-groupe ∞-couvrant de Hall Q_1/K de R/K. Par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de R/K (théorème 3.12), on obtient $R = PQ \leq L$. Ceci finit la preuve du lemme. $\square$

Proposition 4.22. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ contenant ∞ et $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de H/K. On suppose que H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de lui-même. Alors il existe N^*/K un $\mathcal{M}^*$-normalisateur de H/K. De plus, il existe un sous-groupe de Carter C/K de M_∞^+K/K tel que $N^* = B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)N_H(C)$. En particulier les $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de H/K sont conjugués.*

Preuve. – Montrons qu'un sous-groupe N^*/K de H/K de la forme $N^* = B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)N_H(C)$, où C désigne un sous-groupe de Carter de M_∞^+, est un sous-groupe localement clos de H/K qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections localement closes normales de H/K centralisées par M_p. Par le fait 2.14 et l'argument de Frattini, $H = M_\infty^+ N_H(C) = M_\infty^+ N^*$. Notons $B_0 = B_\infty(M_\infty^+)$. Par le fait 2.9 et le fait 2.14, C couvre $M_\infty^+/Q(M_\infty^+)$, donc N^* couvre M_∞^+/B_0. On en déduit que $H = B_0N^*$. Mais, par le fait 2.14, C couvre chaque section M_∞^+-minimale centrale de M_∞^+. Donc, comme B_0 est sans torsion, N^* couvre chaque ∞-section H/K-d_{loc}-minimale centrale de M_∞ et on en déduit que N^* est un sous-groupe (localement clos) de H/K qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections normales de H/K centralisées par M_p.

Montrons maintenant la minimalité de N^*/K. Soit M/K un sous-groupe localement clos de H/K qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections normales de H/K centralisées par M_p. Soient $B_0 = B_\infty(M_\infty^+)$ et $B = B_0K$. Comme H normalise un sous-groupe $\infty^\perp$-couvrant de Hall de M_∞/K et comme $(M_\infty^+)'B/B$ est d'exposant borné d'après le fait 2.9, toutes les ∞-sections de H/B sont centralisées par $M_\infty B/B$. Donc, par le théorème 4.9 et le lemme 4.21, MB/B est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/B. Comme H/B n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre puisque H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de lui-même, on a $H = MB$. Soit $L = M \cap M_\infty^+$. Alors $M_\infty^+ = LB_0$ et, donc, $M_\infty^+ = L^+B_0$. B_0 étant sans torsion, on en déduit que $L = L^+$ et L est définissable et connexe. Montrons que L est anormal dans M_∞^+. Soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite croissante de sous-groupes normaux de M_∞^+ tels que $A_0 = 1$, $A_n = B_0$ et A_{i+1}/A_i soit M_∞^+-minimal pour tout $i < n$. De plus on suppose qu'il existe une sous-suite $(A_k)_{k=i_1,\dots,i_l}$ de $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ telle que $A_{i_{m+1}}/A_{i_m}$ soit H-minimale pour tout $m < l$. Si $A_{i_{m+1}}/A_{i_m}$ (pour $m < l$) n'est pas centralisée par M_∞^+, alors le fait 2.15 appliqué à $Q = A_{i_{m+1}}/A_{i_m} \rtimes M_\infty^+/(M_\infty^+)'$ muni de l'action naturelle montre que $M_\infty^+/(M_\infty^+)'$ est un sous-groupe de Carter de Q, donc A_{i+1}/A_i n'est pas centralisée par M_∞^+ pour tout $i = i_m, \dots, i_{m+1} - 1$. En particulier L couvre chaque section A_{i+1}/A_i qui est centralisée par M_∞^+. On note $L_0 = L$ et, si on suppose L_j construit pour un $j \in \mathbb{N}$ et $L_j \neq M_\infty^+$, on note $L_{j+1} = L_j A_{i(j)}$ où $i(j)$ est le plus petit entier de $1, ..., n$ tel que $A_{i(j)} \nleq L_j$. Soit j_1 l'entier tel que $L_{j_1} = M_\infty^+$. Comme $M_\infty^+ = LB_0$ alors, pour tout $i = 1, ..., n$, A_{i+1}/A_i est L-minimale puisque B_0 est nilpotent. On en déduit que, pour tout $j = 1, ..., j_1$, L_{j-1} est un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de L_j. De plus, comme L couvre chaque section A_{i+1}/A_i qui est centralisée par M_∞^+, L_{j-1} ne centralise pas $A_{i(j)}/A_{i(j-1)}$ et L_{j-1} n'est pas normal dans L_j pour tout $j = 1, ..., j_1$. Le fait 2.17 dit alors que L est anormal dans M_∞^+ et que L contient un sous-groupe de Carter C_0 de M_∞^+. Soit $C^*/K = C_0K/K$.

Alors C^*/K est un sous-groupe de Carter de M_∞^+K/K d'après le fait 2.14. Comme M/K normalise LK/K et comme LK/K est anormal dans M_∞^+K/K, on a $N_{H/K}(LK/K) = M/K$ puisque $H = MB$. Par l'argument de Frattini, $N_{H/K}(LK/K) = LN_M(C^*)/K$, donc $H = M_\infty^+ N_M(C^*)$ et $N_H(C^*) = N_M(C^*)$. Ce qui précède montre que M est contenu dans $B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)N_H(C^*)$. La conjugaison des sous-groupes de Carter de M_∞^+K/K donne la minimalité de N^*/K, ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 4.23. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ contenant ∞ et $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de H/K. On suppose que H/K est un $\mathcal{M}^*$-normalisateur de lui-même. Alors M_∞/K centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H.*

Preuve. – Soit U/V une ∞-section H/K-d_{loc}-minimale de H. Montrons que M_∞/K centralise U/V. On peut supposer que M_∞ couvre U/V, et même que U soit contenu dans M_∞. Comme H/K est un $\mathcal{M}^*$-normalisateur de H/K, H/K est, en particulier, un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K et la proposition 4.22 montre que $H = B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)N_H(C)$ où C/K est un sous-groupe de Carter de M_∞^+K/K. En particulier $M_\infty^+K = B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)C$. Soit R/K un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de M_∞/K, alors $B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)$ est contenu dans R et $M_\infty = RC$ d'après le fait 2.49. Comme H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K, R est normal dans H et on peut supposer $R \leq V$. Mais $M_\infty/R (\cong C/(C \cap R))$ est nilpotent, donc centralise ses sections H/K-d_{loc}-minimales. On en déduit que M_∞ centralise U/V. $\square$

On ne connait rien des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs dans le cas général. En particulier, on aimerait une réponse à la question suivante :

Question 4.24. – Si $\mathcal{M}$ désigne un π-système de H/K pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, existe-t-il, dans H/K, une unique classe de conjugaison de $\mathcal{M}^*$-normalisateurs ?

Lemme 4.25. – *Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. On suppose que, pour tout $p \in \pi$, H/K possède un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall normal $U_{p^\perp}/K$. Alors H/K a un sous-groupe $\pi^\perp$-couvrant de Hall normal R/K.*

Preuve. – Soit R/K un sous-groupe $\pi^\perp$-couvrant de Hall de H/K. Notons $\aleph$ le plus petit cardinal strictement supèrieur à $Card(H/K)$. Nous allons construire une suite décroissante $(L_i/K)_{i \leq \aleph}$ de sous-groupes localement clos et normaux de H/K telle que $L_\aleph = R$, ce qui prouvera le résultat. Soit $L_0 = H$. Supposons que, pour un ordinal $i \leq \aleph$, on ait construit L_j pour tout $j < i$ et que R soit toujours contenu dans L_j pour $j < i$. Alors, si i est un ordinal limite, on note $L_i = \cap_{\beta < i} L_\beta$ et on a bien $R \leq L_i$. Sinon, soit j un ordinal tel que $i = j + 1$. D'après la proposition 3.17, pour tout $p \in \pi$, $U_{p^\perp}/K \cap L_j/K$ contient un unique sous-groupe $\pi^\perp$-couvrant de Hall $U_{p^\perp, j}/K$ de L_j/K. On note $L_i = \cap_{p \in \pi} U_{p^\perp, j}$. Comme R est contenu dans L_j, alors R/K est un sous-groupe $\pi^\perp$-couvrant de Hall de L_j/K (corollaire 3.14). Par le théorème 3.12, pour tout $p \in \pi$, $U_{p^\perp, j}/K$ contient un sous-groupe $\pi^\perp$-couvrant de Hall de L_j/K. Aussi, les sous-groupes $\pi^\perp$-couvrants de Hall de L_j/K sont conjugués et $U_{p^\perp, j}/K$ est normal dans L_j/K, donc $U_{p^\perp, j}/K$ contient R/K. En particulier R/K est contenu dans $U_{p^\perp, j}/K$ pour tout $p \in \pi$, donc $R \leq L_i$. Ceci prouve que R est contenu dans $L_\aleph$.

Montrons que R contient $L_\aleph$. Par le choix de $\aleph$, il existe un ordinal $\mu < \aleph$ tel que $L_\mu = L_{\mu+1}$, donc $L_\mu = L_\aleph$. Supposons d'abord $\infty \in \pi$. Alors $U_{\infty^\perp}/K$ est localement fini (lemme 3.10), donc L_μ/K est localement fini et $U_{p^\perp, \mu}/K$ est un p'-groupe pour tout $p \in \pi$. On en déduit que $L_\mu/K (= L_{\mu+1}/K)$ est un $\pi^\perp$-groupe, donc R contient $L_\aleph$. Donc on peut supposer $\infty \notin \pi$. Soient $p \in \mathcal{P}^+$ et U/V une

p-section de H/K couverte par L_μ. Montrons que R couvre U/V. On peut supposer $p \in \pi$. D'après le théorème 3.12, R/K contient un sous-groupe ∞-couvrant de Hall R_∞/K de L_μ/K. Comme $L_\mu/K = U_{p^\perp,\mu}/K$, le lemme 4.13 dit que R_∞/K contient un p'-sous-groupe de Hall S/K de L_μ/K. Le fait 2.49 dit que S couvre U/V, donc R couvre U/V. Comme L_μ est normal dans H, L_μ couvre ou évite chaque section H/K-d_{loc}-minimale de H. Alors le lemme 4.19 donne le résultat. $\square$

Proposition 4.26. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\pi}$ un π-système de H/K. Alors H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K si et seulement si H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre et si, pour tout $p \in \pi$, l'une des deux conditions suivantes est réalisée :*

(i) $p = \infty$ et M_∞/K a un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall normal ;

(ii) $p \in \pi^-$ et toute p-section U/V H/K-d_{loc}-minimale de H est soit centralisée par M_p, soit couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K.

Preuve. – Supposons que H/K soit un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. Soit $\mathcal{R} = (R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K tel que H/K soit le $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K associé à $\mathcal{R}$. Soit $p \in \pi$. Supposons $p = \infty$. D'après le lemme 3.10 et le fait 2.49, $R_{\infty^\perp} \cap M_\infty/K$ est un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de M_∞/K normalisé par H/K, donc H/K vérifie (i). Supposons maintenant $p \in \pi^-$. Soit U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H non centralisée par M_p. Montrons que U/V est couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K. Notons R/K l'unique sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de M_p/K contenu dans dans $R_{p^\perp} \cap M_p/K$ (proposition 3.17). Alors H/K normalise R/K puisque H/K est le $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K associé à $\mathcal{R}$. Aussi, M_p/R est un p-groupe. Ainsi M_p/R est localement nilpotent, donc hypercentral (fait 2.37), ce qui montre que M_p centralise les p-sections H/K-d_{loc}-minimales de H non couvertes par R. En particulier R couvre U/V. Par le lemme 4.13, R_∞/K contient un p-sous-groupe de Sylow S/K de $R_{p^\perp}/K$, donc R_∞/K contient $(S \cap R)/K$ qui est un p-sous-groupe de Sylow de R/K (fait 2.49). Comme $S \cap R$ couvre chaque p-section normale de H/K couverte par R (fait 2.49), alors R_∞ couvre U/V. On a montré que H/K vérifie (ii).

Réciproquement supposons que H/K n'ait pas de sous-groupe π-couvrant propre et que, pour tout $p \in \pi$, l'une des conditions (i) et (ii) soit réalisée. Montrons que H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. Il suffit de montrer que, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, M_σ/K a un sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall normal. Supposons que, pour tout $p \in \pi$, M_p/K ait un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall normal $S_{p^\perp}/K$. Alors, pour tout $p \in \sigma$, M_σ/K a un unique sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall $U_{p^\perp}/K$, lequel est contenu dans $S_{p^\perp} \cap M_\sigma/K$ (proposition 3.17). Comme $U_{p^\perp}/K$ est normal dans M_σ/K pour tout $p \in \sigma$, le lemme 4.25 dit que M_σ/K possède un sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall normal. On en déduit que pour montrer que H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K, il suffit de montrer que, pour tout $p \in \pi$, M_p/K a un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall normal. Soient $p \in \pi$, R/K un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de M_p/K et U/V une section H/K-d_{loc}-minimale de M_p. Montrons que $N_H(R)$ couvre U/V. Par (i), on peut supposer $p \neq \infty$. Aussi, on peut supposer U/V non couverte par R, donc U/V est une p-section. De plus, comme $p \in \mathcal{P}$, U/V est centralisée par M_p d'après (ii), en particulier U/V normalise RV/V. Mais le théorème 3.12 et l'argument de Frattini montrent que $N_{H/V}(RV/V) = N_H(R)V/V$, donc $N_H(R)$ couvre U/V. On a prouvé que H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. $\square$

5 Formations

Si U/V est une section normale d'un groupe G, on note $A_G(U/V)$ le groupe des automorphismes de U/V induits par G. Ainsi, $A_G(U/V)$ est isomorphe à $G/C_G(U/V)$. Par abus de language, on considèrera $A_G(U/V) = G/C_G(U/V)$.

Pour toute classe $\mathcal{G}$ de groupe, on appelle *$\mathcal{G}$-groupe* un élément de $\mathcal{G}$.

On introduit une série de notations et définitions.

Définition 5.1. – *On désignera par $\mathcal{D}loc$ la classe des sections localement closes résolubles des groupes de rang de Morley fini. Pour tout groupe de rang de Morley fini G, on note $\mathcal{D}loc(G)$ la classe de ses sections localement closes résolubles.*

Soit $\mathfrak{D}$ une sous-classe de $\mathcal{D}loc$. $\mathfrak{D}$ est dite I-d_{loc}-close *si, pour tout $H/K \in \mathcal{D}loc(G)$ (pour un groupe de rang de Morley fini G) et pour tout U sous-groupe localement clos de H, $UK/K \in \mathfrak{D}$ si et seulement si $U/(U \cap K) \in \mathfrak{D}$.*

Soit $\mathfrak{D}$ une sous-classe I-d_{loc}-close de $\mathcal{D}loc$. $\mathfrak{D}$ est dite Q-d_{loc}-close *si, pour tout $H/K \in \mathfrak{D}$ et tout $U/K \in \mathcal{D}loc$ sous-groupe normal de H/K, $H/U \in \mathfrak{D}$.*

Soit $\mathfrak{D}$ une sous-classe de $\mathcal{D}loc$. $\mathfrak{D}$ est dite S-d_{loc}-close, si pour tout $H/K \in \mathfrak{D}$, tout sous groupe $U/K \in \mathcal{D}loc$ de H/K appartient à $\mathfrak{D}$.

Dans toute la suite, $\mathfrak{R}$ désignera une sous-classe de $\mathcal{D}loc$ qui est S-d_{loc}-close et Q-d_{loc}-close. Le fait 2.34 nous permet de supposer, pour les démonstrations, que les éléments de $\mathfrak{R}$ sont des sections localement closes de groupes de rang de Morley fini *résolubles*.

Définition 5.2. – *Soient $p \in \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathcal{D}loc$ et $\mathfrak{E}$ une classe de groupes. On note $C_{H/K}(\mathfrak{E}, p)$ l'intersection des centralisateurs dans H/K des p-sections H/K-d_{loc}-minimales U/V de H telles que $A_H(U/V) \in \mathfrak{E}$. Si H/K n'a pas de telles sections, $C_{H/K}(\mathfrak{E}, p) = H/K$. Soit $C/K = C_{H/K}(\mathfrak{E}, p)$. Alors on note $A_{H/K}(\mathfrak{E}, p) = H/C$.*

Soit $\mathfrak{X}$ une sous-classe Q-d_{loc}-close de $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{X}$ est une $(\mathfrak{R}, p)$-préformation *pour $p \in \mathcal{P}^+$ si, pour tout $H/K \in \mathfrak{R}$, $A_{H/K}(\mathfrak{X}, p) \in \mathfrak{X}$.*

Soient π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$ et f une application qui, à chaque $p \in \pi$, associe une $(\mathfrak{R}, p)$-préformation $f(p)$ (on dit que f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur π*). On note $\mathfrak{F}(f)$ la classe des π-groupes $H/K \in \mathfrak{R}$ telle que $A_{H/K}(\mathfrak{R}, p) \in f(p)$ pour tout $p \in \pi$.*

Soient $H/K \in \mathfrak{R}$, π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur π, $p \in \pi$ et U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H. On dit que U/V est une f-section *de H/K si $A_H(U/V) \in f(p)$. Un sous-groupe $L/K \in \mathfrak{R}$ de H/K est un* sous-groupe f-couvrant *de H/K si L couvre toutes les f-sections de H/K. On note $\mathfrak{F}^*(f)$ la classe des groupes $H/K \in \mathfrak{R}$ sans sous-groupe f-couvrant propre.*

Remarque 5.3. – Soient π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$ et f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur π. Alors le lemme 4.19 donne $\mathfrak{F}(f) \subseteq \mathfrak{F}^*(f)$.

Remarque 5.4. – Soient π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur π et $H/K \in \mathfrak{R}$. Alors $H/K \in \mathfrak{F}(f)$ si et seulement si chaque section H/K-d_{loc}-minimale de H est une f-section.

On rapelle que $\mathcal{U}$ désigne la classe des groupes localement finis et localement résolubles G tels que, pour tout $H \leq G$ et tout $p \in \mathcal{P}$, les p-sous-groupes de Sylow de H sont conjugués ([15], [17]). Le fait 2.48 dit que les sections localement closes et localement fini des groupe de rang de Morley fini résoluble appartiennent à $\mathcal{U}$.

Le lemme 5.6 constitue une remarque importante, puisque c'est grâce à son existence, que l'on pourra appliquer les résultats de [15] à notre contexte.

Fait 5.5. – **([15], th. 3.4, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Soient G un $\mathcal{U}$-groupe, $\pi \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{M} = (M_\sigma)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de G, S une base de Sylow de G et D le $\mathcal{M}$-normalisateur de G associé à S. Alors D évite tous les facteurs chefs de G, sauf les p-facteurs chefs centralisés par M_p pour $p \in \pi$, lesquels sont couverts.*

Lemme 5.6. – *Soient π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$ et f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur π. Alors $\mathfrak{F}^*(f) \cap \mathcal{U} = \mathfrak{F}(f) \cap \mathcal{U}$.*

Preuve. – Par la remarque 5.3, on a $\mathfrak{F}(f) \cap \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{F}^*(f) \cap \mathcal{U}$. Soit $H/K \in \mathfrak{F}^*(f) \cap \mathcal{U}$. Pour tout $p \in \pi$ on note $M_p/K = C_{H/K}(f(p), p)$. Alors $H/M_p \in f(p)$ pour tout $p \in \pi$. Soient $\mathcal{M} = (M_p/K)_{p \in \pi}$ et M/K un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. D'après le fait 5.5, M/K est un sous-groupe f-couvrant de H/K. On en déduit $M = H$, en particulier H/K est un π-groupe et, pour tout $p \in \pi$, $A_{H/K}(\mathcal{D}loc, p) \in f(p)$. Ceci montre que H/K est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. $\square$

Lemme 5.7. – *Soit f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Alors $\mathfrak{F}^*(f)$ est Q-d_{loc}-close.*

Preuve. – $\mathfrak{F}^*(f)$ est I-d_{loc}-close. Montrons que $\mathfrak{F}^*(f)$ est Q-d_{loc}-close. Soient $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ et M/K un sous-groupe normal de H/K dans $\mathcal{D}loc$. Soient L/M un sous-groupe f-couvrant de H/M et U/V une f-section de H/K. Montrons que L couvre U/V. On peut supposer $UM \neq VM$. Alors UM/VM est une f-section de H/M et $UM = (L \cap UM)V$. Ainsi $U = (U \cap L)V$ et L couvre U/V. On en déduit que L/K est un sous-groupe f-couvrant de H/K, donc $L = H$ puisque $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Ceci montre que $H/M \in \mathfrak{F}^*(f)$ et que $\mathfrak{F}^*(f)$ est Q-d_{loc}-close. □

Nous nous interresserons particulièrement aux fonctions de $\mathfrak{R}$-préformations f pour lesquelles $\mathfrak{F}^*(f) = \mathfrak{F}(f)$. Nous donnons un critère permettant de reconnaitre certaines d'entre elles (théorème 5.11).

Définition 5.8. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathcal{D}loc$. Le π-système $\mathcal{M}_{H/K}(f) = (\cap_{p\in\sigma} C_{H/K}(f(p), p))_{\sigma\subseteq\pi}$ de H/K est appellé* f-système *de H/K.*

Lemme 5.9. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{R}$. Alors $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ si et seulement si H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K et, si $\infty \in \pi$, $C_{H/K}(f(\infty), \infty)$ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H.*

Preuve. – Pour tout $\sigma \subseteq \pi$, on note $M_\sigma/K = \cap_{p\in\sigma} C_{H/K}(f(p), p)$. Supposons $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. D'après le corollaire 4.10, tout $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K est un sous-groupe f-couvrant de H/K. Donc H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K et on peut supposer $\infty \in \pi$. D'après la proposition 4.22, H/K possède un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur N^*/K. H/K étant sans sous-groupe f-couvrant propre, on a $H = N^*$ et le corollaire 4.23 montre que M_∞ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H.

Réciproquement, supposons que H/K soit un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K et que, si $\infty \in \pi$, M_∞ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H. Alors H/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Soit L/K un sous-groupe f-couvrant de H/K. On va montrer que $L = H$. Montrons d'abord que L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de H/K. Si $\infty \notin \pi$, alors H/K est localement fini et L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de H/K, donc on peut supposer $\infty \in \pi$. Comme M_∞ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H et comme $H/M_\infty \in f(\infty)$, L/K couvre toutes les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H et L/K est donc un sous-groupe ∞-couvrant de H/K.

Soient $p \in \mathcal{P}^+$, U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H et $C/K = C_{H/K}(U/V)$. Montrons que L couvre U/V. Ce qui précède permet de supposer $p \neq \infty$. Comme L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de H/K, le lemme 4.13 dit que L/K contient un π^--sous-groupe de Hall de H/K. Donc le fait 2.49 permet de supposer $p \in \pi$. Si $M_p \leq C$ alors, comme $H/M_p \in f(p)$, on a $H/C \in f(p)$ et U/V est une f-section de H/K, donc L couvre U/V. On va donc supposer $M_p \not\leq C$. Alors la proposition 4.26 dit qu'un sous-groupe ∞-couvrant de Hall H/K couvre U/V. Mais le théorème 3.12 donne l'existence d'un sous-groupe ∞-couvrant de Hall S/K de H/K contenu dans L/K. Par conjugaison des sous-groupe ∞-couvrants de Hall de H/K (théorème 3.12), S couvre U/V, donc L couvre U/V. On en déduit que L couvre chaque p-section H/K-d_{loc}-minimale de H/K pour $p \in \mathcal{P}^+$, donc $L = H$ (lemme 4.19) et $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. □

Proposition 5.10. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{R}$. Alors $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ si et seulement si H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre et si, pour tout $p \in \pi$ et toute p-section H/K-d_{loc}-minimale U/V de H, (i) ou (ii) est vérifiée :*

(i) U/V est une f-section ;

(ii) $p \in \pi^-$ et un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K couvre U/V.

Preuve. – Si $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$, alors tout sous-groupe π-couvrant de H/K est f-couvrant, donc H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre. Le lemme 5.9 dit que les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H/K sont des f-sections. Aussi, le lemme 5.9 montre que H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K, donc la proposition 4.26 montre que, si $p \in \pi^-$, alors toute p-section H/K-d_{loc}-minimale de H vérifie (i) ou (ii).

Réciproquement, supposons que H/K n'ait pas de sous-groupe π-couvrant propre et que, pour tout $p \in \pi$, toute p-section H/K-d_{loc}-minimale de H vérifie (i) ou (ii). Soit R/K un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de $C/K = C_{H/K}(f(\infty), \infty)$. Montrons que $N_C(R)$ couvre chaque p-section H/K-d_{loc}-minimale de C pour tout $p \in \mathcal{P}^+$. Soit U/V une telle section. Si $p \neq \infty$, le fait 2.49 dit que R couvre U/V, donc $N_C(R)$ couvre U/V. Donc on peut supposer $p = \infty$. Le fait 2.48 et l'argument de Frattini donnent $N_{C/V}(RV/V) = N_C(R)V/V$. Mais U/V est centralisée par C/K d'après (i), donc $N_C(R)$ couvre U/V.

Montrons que H/K appartient à $\mathfrak{F}^*(f)$. $N_C(R)$ est localement clos d'après le corollaire 4.4. Donc, par le lemme 4.19 et par ce qui précède, C normalise R. Alors la proposition 4.26 dit que H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K. Le lemme 5.9 permet de conclure. $\square$

Théorème 5.11. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si $\infty \in \pi$, on suppose que H/K vérifie*

(∗) Pour tout $p \in \mathcal{P}$ et toute p-section H/K-d_{loc}-minimale U/V de H couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, si on a $A_H(U/V) \in f(\infty)$, alors $p \in \pi$ et $A_H(U/V) \in f(p)$.

Alors $H/K \in \mathfrak{F}(f)$.

Preuve. – On peut supposer $\infty \in \pi$. Soient $p \in \mathcal{P}$ et U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H. Montrons que U/V est une f-section. Soit $C/K = C_{H/K}(f(\infty), \infty)$. Montrons qu'on peut supposer que C ne centralise pas U/V. Comme H/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre. Le lemme 4.13 dit que, si $p \notin \pi$, alors U/V est couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K. (∗) montre que C ne centralise pas U/V. Supposons $p \in \pi$. D'après la proposition 5.10, on peut supposer $p \in \pi^-$ et U/V couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall R/K de H/K. Si C centralise U/V, on a $A_H(U/V) \in f(\infty)$. Donc on obtient $p \in \pi$ et $A_H(U/V) \in f(p)$ d'après (∗), et U/V est une f-section. Ainsi, on peut supposer que C ne centralise pas U/V. On va montrer que ceci est contradictoire.

Soit R_0/K un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de H/K qui contient R/K (R_0/K existe d'après les lemmes 3.9 et 3.18). D'après la proposition 3.17, $R_0/K \cap C/K$ contient un unique sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall R_0^*/K de C/K. En particulier, R_0 normalise R_0^*/K et $N_H(R_0^*)$ couvre U/V. Le lemme 4.18 dit que U/V est fini, en particulier $(CR)^+$ centralise U/V.

Soit U_1/V une section CR/K-d_{loc}-minimale contenue dans U/V. Montrons que CR centralise U_1/V. R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K (lemme 3.9), donc $R = R^+K$ et R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de $(CR)^+K/K$ (corollaire 3.14). Par l'argument de Frattini et par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de $(CR)^+K/K$ (théorème 3.12), on obtient $CR = (CR)^+N_{CR}(R)$. Notons $N = N_{CR}(R)$ et montrons que N centralise U_1/V. Soit $(L_i)_{i\leq\alpha}$ (α ordinal) une suite croissante de sous-groupes localement clos de R normalisés par N avec $L_0 = K$, $L_\alpha = R$, L_{i+1}/L_i est N-d_{loc}-minimale pour tout $i < \alpha$ et $L_\beta = \cup_{j<\beta} L_j$ pour tout ordinal limite $\beta \leq \alpha$. De plus, on construit cette suite de telle façon que, si L_i évite U_1/V et si il existe une section N-d_{loc}-minimale M/L_i de R avec M qui évite U_1/V, alors L_{i+1} évite U_1/V. Alors il existe un plus petit ordinal j tel que L_j n'évite pas U_1/V. j est nécessairement un ordinal successeur et il existe $k < \alpha$ avec $j = k+1$. L_k est un sous-groupe localement clos de R maximal parmis ceux qui évite U_1/V et qui sont normalisés par N. Comme $(CR)^+$ centralise U/V et comme $CR = (CR)^+N$, U_1/V est N-d_{loc}-minimal. Donc tout sous-groupe localement clos de R qui est normalisé par N et qui contient strictement L_k couvre U_1/K. Comme R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K, il existe un $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T de R^+ tel que $R = TK$ (théorème 3.12 (ii)). T' étant sans torsion (fait 2.9), $R'L_k/L_k$ est aussi sans torsion, donc $R'L_k$ ne couvre pas U_1/V d'où $R' \leq L_k$. Ainsi R/L_k est abélien. Soient W/L_k le plus grand sous-groupe de torsion de R/L_k. Comme $R = R^+K = R^+L_k$, R/L_k n'est pas localement fini et $W < R$. C centralise chaque ∞-section H/K-d_{loc}-minimale de H (lemme 5.9) donc, en particulier, $N_C(R)$ centralise chaque ∞-section N/K-d_{loc}-minimale de R et on a $C_{R/W}(N_C(R)) \neq 1$. Comme $N = N_C(R)R$ et comme R/W est abélien, on en déduit $C_{R/W}(N) \neq 1$. Notons $X/W = C_{R/W}(N)$. Pour tout $\overline{g} \in N/L_k$, on note

$$ad_{\overline{g}}: \begin{array}{ccc} X/L_k & \longrightarrow & W/L_k \\ \overline{x} & \longmapsto & [\overline{x}, \overline{g}] \end{array}.$$

C'est un homomorphisme de groupe et $Imad_{\overline{g}}$ est localement fini pour tout $\overline{g} \in N/L_k$, donc $(X/L_k)/C_{X/L_k}(N)$ est localement fini et $C_{X/L_k}(N) \neq 1$. Par maximalité de L_k, $C_{X/L_k}(N)$ couvre U_1/V, donc $N \leq C_H(U_1/V)$ et CR centralise U_1/V.

On a montré $C_{U/V}(C) \neq 1$, donc C centralise U/V par minimalité de U/V, ce qui est contradictoire. On en déduit que toutes les sections H/K-d_{loc}-minimales de H sont des f-sections, donc $H/K \in \mathfrak{F}(f)$ (remarque 5.4). $\square$

Corollaire 5.12. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ un π-groupe. Si $\infty \in \pi$, on suppose $f(\infty) \subseteq \cap_{p\in\pi} f(p)$. Alors $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}^*(f)$.*

Preuve. – La remarque 5.3 dit que $\mathfrak{F}(f)$ est contenu dans $\mathfrak{F}^*(f)$. Montrons la réciproque. Soit $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Comme H/K vérifie la propriété $(*)$ du théorème 5.11, $H/K \in \mathfrak{F}(f)$. $\square$

Remarque 5.13. – La preuve du théorème 5.11 dit que, si f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et si H/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, si U/V est une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H $(p \in \mathcal{P})$ couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, alors on a $A_H(U/V) \in f(\infty)$.

Par analogie à [15], nous définissons une *formation* (définition 5.14). Jusqu'à la fin de cette section, nous étudions les liens entre les notions de formations et de $\mathfrak{F}^*(f)$-groupes et $\mathfrak{F}(f)$-groupes. En général, la notion de formation est très liée à celle de *projecteur* (définition 6.7). Dans cet article, pourtant consacré aux projecteurs, nous n'utilisons pas la notion de formation (les parties 6 et 7, sont indépendantes des résultats ci-dessous). En effet, on montre qu'en général, pour une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation f, $\mathfrak{F}^*(f)$ n'est pas une $\mathfrak{R}$-formation (exemple 5.16). Cependant, $\mathfrak{F}(f)$ est une $\mathfrak{R}$-formation (lemme 5.15). C'est l'un des faits qui rend ces classes de groupes intéressantes.

Définition 5.14. – *Une sous-classe $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{D}loc$ est dite R-d_{loc}-*close *si, pour tout $H/K \in \mathcal{D}loc$ et tout $(U_i/K)_{i\in I}$ famille de sous-groupe normaux de H/K dans $\mathcal{D}loc$ telle que $H/U_i \in \mathfrak{R}$ pour tout $i \in I$, on a $H/\cap_{i\in I} U_i \in \mathfrak{D}$.*

Toute sous-classe R-d_{loc}-close de $\mathfrak{R}$ est appelé une $\mathfrak{R}$-formation .

Lemme 5.15. – *Si f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, alors $\mathfrak{F}(f)$ est une $\mathfrak{R}$-formation.*

Preuve. – Il faut montrer que $\mathfrak{F}(f)$ est R-d_{loc}-close. $\mathfrak{F}(f)$ est I-d_{loc}-close. Montrons que $\mathfrak{F}(f)$ est Q-d_{loc}-close. Soient $H/K \in \mathfrak{F}(f)$ et U/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K. Soient $p \in \pi$, $D_p/U = C_{H/U}(\mathcal{D}loc, p)$ et $C_p/K = C_{H/K}(\mathcal{D}loc, p)$. C_p est contenu dans D_p. Par définition de $\mathfrak{F}(f)$ on a $H/C_p \in f(p)$, donc $H/D_p \in f(p)$ puisque $f(p)$ est Q-d_{loc}-close. Ceci étant vrai pour tout $p \in \pi$, on obtient $H/U \in \mathfrak{F}(f)$ et $\mathfrak{F}(f)$ est Q-d_{loc}-close.

Maintenant on va montrer que $\mathfrak{F}(f)$ est R-d_{loc}-close. Soient $H/K \in \mathfrak{R}$ et $(U_i/K)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normaux de H/K telle que H/U_i soit un $\mathfrak{F}(f)$-groupe pour tout $i \in I$. Notons $U = \cap_{i\in I} U_i$, $C_p/U = C_{H/U}(\mathcal{D}loc, p)$ pour tout $p \in \pi$ et $E_{p,i}/U_i = C_{H/U_i}(\mathcal{D}loc, p)$ pour tout $i \in I$ et tout $p \in \pi$. On a $C_p = \cap_{i\in I} E_{p,i}$ pour tout $p \in \pi$. Mais $H/E_{p,i}$ est un $f(p)$-groupe pour tout $p \in \pi$ et tout $i \in I$ puisque $H/U_i \in \mathfrak{F}(f)$ pour tout $i \in I$. On en déduit que H/U est un $f(p)$-groupe pour tout $p \in \pi$ puisque $A_{H/K}(f(p), p) \in f(p)$ par définition d'une $(\mathfrak{R}, p)$-préformation. Ainsi, H/U appartient à $\mathfrak{F}(f)$. Ceci finit la preuve du lemme. $\square$

La $\mathfrak{R}$-formation $\mathfrak{F}(f)$ sera appelée $\mathfrak{R}$-*formation saturée définie par f*.

L'exemple 5.16 montre qu'en général, les classes de groupes de la forme $\mathfrak{F}^*(f)$ ne sont pas des $\mathfrak{R}$-formations.

Exemple 5.16. – On considère le pur groupe $\mathbb{C}^*$ et F un groupe isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$. On note $\pi = \{\infty\}$ et $G = \mathbb{C}^* \times F$. G possède un sous-groupe U du même ordre que F qui intersecte trivialement $\mathbb{C}^* \cup F$. Si f est une fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation sur π, alors G/F et G/U sont des $\mathfrak{F}^*(f)$-groupes. Pourtant, $G (\cong G/(F \cap U))$ n'est pas un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Donc $\mathfrak{F}^*(f)$ n'est pas une $\mathcal{D}loc$-formation.

En fait, l'exemple 5.16 est générique. En effet, pour chaque fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation f avec $\mathfrak{F}^*(f) \neq \mathfrak{F}(f)$, on peut construire un $\mathcal{D}loc$-groupe H/K qui n'est pas un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe avec deux $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux L_1/K et L_2/K qui s'intersectent trivialement et tels que H/L_1 et H/L_2 soient des $\mathfrak{F}^*(f)$-groupes (proposition 5.18).

Lemme 5.17. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, alors $N_H(R)/K$ est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe.*

Preuve. – On peut supposer $\infty \in \pi$. Comme $N_H(R)/K$ est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K (corollaire 4.5), $N_H(R)/K$ est un $\mathfrak{R}$-groupe. Montrons que $N_H(R)/K$ n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre. Soit R_0/K un sous-groupe π-couvrant de $N_H(R)/K$. Comme $\infty \in \pi$, $(R_0 \cap R)/K$ est un sous-groupe ∞-couvrant de R/K (proposition 3.17). R/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre (lemme 3.9). Donc R_0 contient R. Mais H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre puisque $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Le lemme 4.13 dit que R/K contient un $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall S/K de H/K. Alors S/K est un $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall de $N_H(R)/K$ et tout $\pi^\perp$-élément de $N_H(R)/K$ est dans R/K. On en déduit que $N_H(R)/R$ est un π-groupe et $N_H(R) = R_0R = R_0$. Ceci prouve que $N_H(R)/K$ n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre.

Soient $p \in \pi$ et U/V une p-section $N_H(R)/K$-d_{loc}-minimal de $N_H(R)$. On suppose que soit $p \notin \pi^-$, soit U/V n'est pas couverte par R. D'après la proposition 5.10, il suffit de montrer que U/V est une f-section. Comme U/V n'est pas couverte par R, on peut supposer $R \leq V$ puisque $U/V \rtimes A_H(U/V)$ et $UR/VR \rtimes A_H(UR/VR)$ sont isomorphes. Mais il existe une section H/K-d_{loc}-minimale U_1/V_1 de H telle que V_1 évite U/V et U_1 n'évite pas U/V. Par minimalité de U/V, U_1 couvre U/V. Supposons que U_1/V_1 ne soit pas une f-section de H/K. La proposition 5.10 dit qu'on a $p \in \pi^-$ et, par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de H/K (théorème 3.12), R couvre U_1/V_1. Alors on a $U_1 = (U_1 \cap R)V_1$ et, comme V contient R, on obtient $U_1 = (U_1 \cap V)V_1$. Ainsi, $U = (U \cap U_1)V = (U \cap V_1)V$ et V_1 couvre U/V, ce qui est contradictoire. Donc U_1/V_1 est une f-section.

Le théorème 3.12 (*ii*) et le fait 3.4 donnent $H^+ = Q(H^+)T$. Par l'argument de Frattini, on obtient $H = Q(H^+)N_H(R)$. Comme $Q(H^+)$ centralise U_1/V_1, on en déduit $C_H(U_1/V_1) = Q(H^+)C_{N_H(R)}(U_1/V_1)$. Mais U_1/V_1 est une f-section et $H/C_H(U_1/V_1)$ est un $f(p)$-groupe. Donc $N_H(R)/C_{N_H(R)}(U_1/V_1)$ est un $f(p)$-groupe. On a $C_{N_H(R)}(U_1/V_1) \leq C_{N_H(R)}(U/V)$ puisque U_1 couvre U/V et V_1 évite U/V. Donc $A_H(U/V)$ est un $f(p)$-groupe et U/V est une f-section de $N_H(R)/K$. $\square$

Proposition 5.18. – *Si f est une fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, alors $\mathfrak{F}^*(f)$ est une $\mathcal{D}loc$-formation si et seulement si $\mathfrak{F}^*(f) = \mathfrak{F}(f)$.*

Preuve. – Si $\mathfrak{F}^*(f) = \mathfrak{F}(f)$, le lemme 5.15 dit que $\mathfrak{F}^*(f)$ est une $\mathcal{D}loc$-préformation. Réciproquement, supposons $\mathfrak{F}^*(f) \neq \mathfrak{F}(f)$. La remarque 5.3 dit qu'il existe un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe H/K qui n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Soit R/K un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K. Montrons qu'on peut supposer $H = N_H(R)$. La proposition 5.17 dit que $N_H(R)/K$ est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. D'après le corollaire 3.14, R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de $N_H(R)/K$. Il reste à montrer que $N_H(R)/K$ n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Comme $H/K \notin \mathfrak{F}(f)$, le théorème 5.11 montre qu'on a $\infty \in \pi$ et qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ et L/M une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall R/K de H/K et qu'on a soit $p \notin \pi$, soit $A_H(L/M) \in f(\infty) \setminus f(p)$. Comme R couvre L/M, on a $N_L(R)/N_M(R) \neq 1$. Le théorème 3.12 (*ii*) et le fait 3.4 donnent $H^+K = Q(H^+)R$. Par l'argument de Frattini et le théorème 3.12, $H = Q(H^+)N_H(R)$. Comme $Q(H^+)$ centralise L/M et comme $H = Q(H^+)N_H(R)$, $N_L(R)/N_M(R)$ est une section $N_H(R)/K$-d_{loc}-minimale. Si $p \notin \pi$, $N_L(R)/N_M(R)$ n'est pas une f-section et $N_H(R)/K$ n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Donc on peut supposer $A_H(L/M) \in f(\infty) \setminus f(p)$. Comme on a

$$C_H(L/M) = Q(H^+)C_{N_H(L)}(L/M) = Q(H^+)C_{N_H(L)}(N_L(R)/N_M(R)),$$

on obtient $A_{N_H(R)}(N_L(R)/N_M(R)) \in f(\infty) \setminus f(p)$ et $N_L(R)/N_M(R)$ n'est pas une f-section. Ceci prouve que $N_H(R)/K$ n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe et on peut supposer $H = N_H(R)$.

Comme R/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre (lemme 3.9) et comme R/R^+K est localement fini, on a $R = R^+K$. Le fait 2.9 dit que $R'K/K$ est sans torsion et le fait 2.27 dit que $R'K/K$ est un $\mathcal{D}loc$-groupe. Alors LR'/MR' est une p-section $H/R'K$-d_{loc}-minimale de H et on a $C_H(LR'/MR') = C_H(L/M)$. Ainsi, on a soit $p \notin \pi$, soit $A_H(LR'/MR') \in f(\infty) \setminus f(p)$ et $R/R'K$ n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. On peut donc supposer R/K abélien. De plus, on a $H/M \in \mathfrak{F}^*(f) \setminus \mathfrak{F}(f)$ et on peut supposer $K = M$.

Soient D_1 et D_2 deux groupes définissablement isomorphes à $d(H)$ et ϕ_1 et ϕ_2 les isomorphismes de $d(H)$ sur D_1 et D_2 respectivement. Soit $G_1 = (D_1 \times D_2) \rtimes d(H)$ où $d(H)$ agit sur $D_1 \times D_2$ par conjugaison et, pour tout $u \in d(H)$ et $(\phi_1(u_1), \phi_2(u_2)) \in D_1 \times D_2$, $(\phi_1(u_1), \phi_2(u_2))^u = (\phi_1(u_1^u), \phi_2(u_2^u))$. Alors G_1 est un groupe de rang de Morley fini. On note $H_0 = (\phi_1(K) \times \phi_2(K)) \rtimes H$, $R_0 = (\phi_1(K) \times \phi_2(R)) \rtimes K$, $L_0 = (\phi_1(L) \times \phi_2(K)) \rtimes K$, $K_1 = (\phi_1(K) \times \phi_2(K)) \rtimes K$, $H_1 = L_0 R_0 H_0$ et $L_1 = \{(\phi_1(l), \phi_2(l), k) : l \in L, k \in K$. L_0/K_1 et L_1/K_1 sont des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux de H_1/K_1 qui s'intersectent trivialement. L_0/K_1 est une section H_1/K_1-d_{loc}-minimale de H_1 et L_0/K_1 n'est pas une f-section de H_1/K_1. Alors R_0H_0/K_1 est un sous-groupe f-couvrant propre de H_1/K_1 et H_1/K_1 n'est pas un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe.

Montrons que R_0H_0/K_1 est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. D'après la proposition 5.10, les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H sont des f-sections de H/K. Donc les ∞-sections R_0H_0/K_1-d_{loc}-minimales de R_0H_0 sont des f-sections de R_0H_0/K_1. Soit F_0/K_1 un sous-groupe f-couvrant de R_0H_0/K_1. Alors F_0 couvre R_0H_0/R_0. Comme R_0/K_1 est abélien, si $U_1/V_1 = (\phi_2(U)/\phi_2(V))$ est une ∞-sections R_0H_0/K_1-d_{loc}-minimales de R_0/K_1, alors on a $A_{R_0H_0}(U_1/V_1) = HR_0/C_H(U/V)R_0$ et $A_{R_0H_0}(U_1/V_1)$ est un $f(\infty)$-groupe. En particulier, toutes les ∞-sections R_0H_0/K_1-d_{loc}-minimales de R_0/K_1 sont des f-sections de R_0H_0/K_1. Comme R/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre (lemme 3.9), R_0/K_1 n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre. On en déduit que F_0 contient R_0, d'où $F_0 = R_0H_0$ et R_0H_0/K_1 est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe.

Comme R_0H_0 couvre H_1/L_0 et H_1/L_1, H_1/L_0 et H_1/L_1 sont des $\mathfrak{F}^*(f)$-groupes. Mais on a $L_0/K_1 \cap L_1/K_1 = 1$ et, pourtant, H_1/K_1 n'est pas un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Donc $\mathfrak{F}^*(f)$ n'est pas une $\mathcal{D}loc$-formation. $\square$

Maintenant, on peut se poser la question suivante :

Question 5.19. – Si f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, est-ce que $\mathfrak{F}^*(f)$ est une $(\mathfrak{R}, p)$-préformation pour tout $p \in \pi$?

On ne connait pas la réponse à cette question. Une réponse positive rendrait la notion $\mathfrak{F}^*(f)$ plus intéressante. En effet, il s'agit, pour l'instant, surtout d'un outil pour l'étude de $\mathfrak{F}(f)$ et des projecteurs, et on éspère que les classes de la forme $\mathfrak{F}^*(f)$ puissent aussi devenir des objets intéressants pour eux-mêmes.

6 Projecteurs

Nous définissons un *projecteur* (définition 6.7), puis prouvons le théorème principal de l'article (théorème 6.14).

Lemme 6.1. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close et normale de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si D/K est un sous-groupe f-couvrant de H/K, alors $H = AD$.*

Preuve. – Soit U/V une f-section de H/A. Alors U/V est aussi une f-section de H/K, et U/V est couverte par D. On en déduit que DA/A est un sous-groupe f-couvrant de H/A, d'où le résultat. $\square$

Lemme 6.2. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, A/K une section localement close, abélienne et normale de H, D/K une section localement close de H telle que $H = AD$, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, R_σ/K un sous-groupe σ-couvrant de Hall de D/K et S_σ/K le sous-groupe σ-couvrant de Hall de A/K. Alors $R_\sigma S_\sigma/K$ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de H/K.*

Preuve. – Soit U/V une σ-section normale et localement close de H/K. $(U \cap D)/(U \cap VA \cap D)$ est une σ-section normale de D/K, donc R_σ couvre $(U \cap D)/(U \cap VA \cap D)$ et, comme D couvre $U/(U \cap VA)$, R_σ couvre $U/(U \cap VA)$. Aussi, $(U \cap A)/(V \cap A)$ est une σ-section de A, donc S_σ couvre $(U \cap A)/(V \cap A)$, ce qui montre que S_σ couvre $(U \cap VA)/V$. On en déduit que $R_\sigma S_\sigma$ couvre U/V, donc $R_\sigma S_\sigma/K$ est un sous-groupe σ-couvrant de H/K. Soit U_σ/K un sous-groupe σ-couvrant de Hall de H/K contenu dans $R_\sigma S_\sigma/K$ (U_σ/K existe par le théorème 3.12). Alors $(U_\sigma \cap A)/K$ contient un sous-groupe σ-couvrant de Hall de A/K (proposition 3.17), donc $S_\sigma \leq U_\sigma$. U_σ/K est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de DS_σ/K (corollaire 3.14), donc U_σ/S_σ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de DS_σ/S_σ (corollaire 3.13). Mais, d'après le corollaire 3.13, $R_\sigma/(S_\sigma \cap D)$ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de $D/(S_\sigma \cap D)$, donc $R_\sigma S_\sigma/S_\sigma$ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de DS_σ/S_σ et on a le résultat. $\square$

Lemme 6.3. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close, normale et abélienne de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si H/K a un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur D/K, alors $D/K \in \mathfrak{F}^*(f)$.*

Preuve. – Soit D_0/K un sous-groupe f-couvrant de D/K. Supposons $D \neq D_0$. D/K étant un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K, il existe une f-section U/V de H/K non couverte par D_0. Soit $p \in \mathcal{P}^+$ tel que U/V soit une p-section. A/K étant abélien, A/K centralise U/V. On en déduit que U/V est D/K-d_{loc}-minimale et $D/C_D(U/V) \in f(p)$. Ceci prouve que $(U \cap D)/(V \cap D)$ est une f-section de D/K, en particulier D_0 couvre $(U \cap D)/(V \cap D)$. Ainsi, D_0 couvre U/V, ce qui est contradictoire. $\square$

Proposition 6.4. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close, normale et abélienne de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si un sous-groupe $E/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ de H/K est tel que $H = AE$, alors E/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K.*

Preuve. – Soient $\mathcal{C} = ((\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))A/K)_{\sigma\subseteq\pi}$, $\mathcal{R} = (R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de E/K et $\mathcal{S} = (S_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ la base de Sylow couvrante de A/K. Le lemme 6.2 montre que $\mathcal{G} = (R_\sigma S_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de H/K. Montrons que E/K est contenu dans E_1/K le $\mathcal{C}$-normalisateur de H/K associé à $\mathcal{G}$. La proposition 3.17 dit que, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, $R_\sigma/K \cap (\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))$ contient un unique sous-groupe σ-couvrant de Hall R^*_σ/K de $\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p)$. Comme $E/K \in \mathfrak{F}^*(f)$, E/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de E/K (lemme 5.9), donc E/K normalise R^*_σ/K pour tout $\sigma \subseteq \pi$. Mais $R^*_\sigma S_\sigma/K$ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de $(\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))A/K$ pour tout $\sigma \subseteq \pi$ (lemme 6.2), donc $E/K \leq E_1/K$.

Soient $\sigma \subseteq \pi$ et $B = A \cap E$. On appelle σ-f-section de H/K (resp. E/K) une f-section de H/K (resp. E/K) qui est une σ-section. Montrons :

$$(*) \quad \cap_{p\in\sigma} C_{H/K}(f(p),p) \leq (\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))A/K$$

Si U/V est une σ-f-section de E/K évitée par A, alors $C_{E/K}(U/V)A/K = C_{H/K}(UA/VA)$, en particulier UA/VA est une σ-f-section de H/K. Si U/V est une σ-f-section de E/K non évitée par A, alors U/V est couverte par A et $C_{E/K}(U/V)A/K = C_{H/K}((U \cap A)/(V \cap A))$, en particulier $(U \cap A)/(V \cap A)$ est une σ-f-section de H/K. On en déduit que $\cap_{p\in\sigma} C_{H/K}(f(p),p)$ est contenu dans $\cap_{p\in\sigma}(C_{E/K}(f(p),p)A/K)$. Donc, pour montrer $(*)$, il suffit de montrer :

$$(1) \quad \cap_{p\in\sigma} (C_{E/K}(f(p),p)A/K) = (\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))A/K$$

A étant abélien, si on note $B = A \cap E$, alors $B \leq C_E(U/V)$ pour toute U/V σ-f-section de E/K. Donc montrer (1) revient à montrer :

$$(2) \quad \bigcap_{U/V\ \sigma-fsection\ de\ E/K} (C_{E/B} \times A/B) = (\bigcap_{U/V\ \sigma-fsection\ de\ E/K} C_{E/B}) \times A/B$$

Comme $E/B \cap A/B = 1$, l'égalité (2) est vérifiée et on a démontré $(*)$.

Soit $\sigma \subseteq \pi$. L'égalité $(*)$ montre que $R^*_\sigma S_\sigma/K$ contient un unique sous-groupe σ-couvrant de Hall P^*_σ/K de $C_{H/K}(f(p),p)$ (proposition 3.17). Alors P^*_σ/K est l'unique sous-groupe σ-couvrant de Hall de $\cap_{p\in\sigma} C_{H/K}(f(p),p))$ contenu dans $R_\sigma S_\sigma/K$ et P^*_σ/K est normalisée par E_1/K. On en déduit que E_1/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K, ce qui finit la preuve de la proposition. $\square$

Corollaire 6.5. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close, normale, abélienne et localement fini de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Alors H/K possède un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur. Si un sous-groupe $E/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ de H/K est tel que $H = AE$, alors E/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K.*

Preuve. – A/K est localement fini et $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$, donc $C_{H/K}(f(\infty),\infty)$ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H. Le lemme 4.21 dit que H/K possède un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur et que, de plus, les $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateurs de H/K sont exactement les sous-groupes π-couvrants de Hall de ses $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateurs.

Supposons qu'il existe un sous-groupe $E/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ de H/K est tel que $H = AE$. La proposition 6.4 dit qu'il existe D/K un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K qui contient E/K. Comme $E/K \in \mathfrak{F}^*(f)$, E/K n'a pas de sous-groupes π-couvrant propre et E/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall R/K de D/K (lemme 3.18). Comme R/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K d'après ce qui précède, on a fini la preuve du corollaire. $\square$

Corollaire 6.6. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$, A/K une section localement close, normale, abélienne et localement fini de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$ et D/K un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K. Si un sous-groupe localement clos L/K de H/K contient D/K, alors D/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de L/K.*

Preuve. – D'après le lemme 6.3, D/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Le lemme 6.1 donne $L = (L \cap A)D$ et le corollaire 6.5 dit que D/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur D_1/K de L/K. D'après le lemme 6.3, on a $D_1/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Comme $H = AL$, $L/(L \cap A) \in \mathfrak{F}^*(f)$ et le lemme 6.1 donne $L = (L \cap A)D_1$, d'où $H = AD_1$. Le corollaire 6.5 dit que D_1/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur D_2/K de H/K. Comme $D \leq D_2$, on obtient $D = D_1 (= D_2)$. $\square$

Définition 6.7. – *Soient $\mathfrak{F}$ une classe de groupes, $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathcal{D}loc$ et $F/K \in \mathfrak{F}$ un σ-sous-groupe de H/K. Si, pour tout $R/K \in \mathcal{D}loc$ σ-sous-groupe de H/K contenant F/K et tout $A/K \in \mathcal{D}loc$ sous-groupe normal de R/K tel que $R/A \in \mathfrak{F}$, on a $R = FA$, alors F/K est appellé* $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur *de H/K.*

L'exemple 6.8 dit que les $(\mathfrak{F}(f),\sigma)$-projecteurs n'existent pas toujours. C'est pourquoi nous étudierons seulement les $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteurs. Toutefois, il suffit qu'une fonction f vérifie les hypothèses du théorème 5.11, pour que l'on obtienne $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}^*(f)$, et nous pouvons alors appliquer les résultats des $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteurs aux $(\mathfrak{F}(f),\sigma)$-projecteurs.

Exemple 6.8. – On considère G un pur groupe isomorphe à $\mathbb{C}^*$. Si f désigne une fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation sur $\{\infty\}$ et T le sous-groupe localement fini maximal de G, alors l'unique $\mathfrak{F}(f)$-sous-groupe de G est $\{1\}$. Mais G/T est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe, donc G n'a pas de $\mathfrak{F}(f)$-projecteur.

Le fait 6.9 est le résultat principal de [15]. Ici, nous l'énonçons pour les sections localement closes et localement fini des groupes de rang de Morley fini résolubles. Cela est possible grâce au lemme 5.6.

Fait 6.9. – **([15], th. 5.4, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{R}$. On suppose H/K localement fini. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteurs.*

Remarque 6.10. – Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathfrak{F}$ une sous-classe Q-d_{loc}-close de $\mathcal{D}loc$, $H/K \in \mathcal{D}loc$, A/K une σ-section localement close et normale de H et F/K un $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur de H/K. Alors FA/A est un $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur de H/A.

Lemme 6.11. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathfrak{F}$ une sous-classe Q-d_{loc}-close de $\mathcal{D}loc$, $H/K \in \mathcal{D}loc$, A/K une σ-section localement close et normale de H et F/A un $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur de H/A. Alors tout $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur de F/K est un $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur de H/K.*

Preuve. – Soient E/K un $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur de F/K, $R/K \in \mathcal{D}loc$ σ-sous-groupe de H/K contenant E/K et $B/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe normal de R/K tel que $R/B \in \mathfrak{F}$. F/A étant un $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur de H/A, F/K est un σ-sous-groupe de H/K et $F/A \in \mathfrak{F}$, donc on a $F = AE$, en particulier $F \leq AR$. Or RA/AB est un $\mathfrak{F}$-groupe et RA/K est un σ-groupe, donc on obtient $RA = FB$, en conséquence, $R = (R \cap F)B$. On en déduit que $(R \cap F)/(B \cap F)$ est un $\mathfrak{F}$-groupe, donc $R \cap F = (B \cap F)E$ puisque E/K est un $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur de F/K. Ceci prouve que $R = EB$. □

Lemme 6.12. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close, normale, abélienne et localement fini de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Alors les $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateurs de H/K sont exactement les $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K.*

Preuve. – Si E/K est un $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K, alors $H = EA$ puisque $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Le corollaire 6.5 donne l'existence d'un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur D/K de H/K qui contient E/K. Mais $D/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ (lemme 6.3) et les $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K sont des $\mathfrak{F}^*(f)$-sous-groupes maximaux de H/K, donc $E = D$.

Réciproquement, soit D/K un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K. Le lemme 6.3 dit que D/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Soient $L/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe de H/K qui contient D/K et $N/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe normal de L/K tel que $L/N \in \mathfrak{F}^*(f)$. D'après le corollaire 6.6, D/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de L/K. Alors $L = ND$ d'après le lemme 6.1, donc D/K est un $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K. □

Lemme 6.13. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A un sous-groupe H-minimal de H avec AK/K sans torsion et tel que $H/AK \in \mathfrak{F}^*(f)$. Alors les $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateurs de H/K sont exactement les $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. De plus, les $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K sont conjugués dans H/K.*

Preuve. – On peut supposer $H/K \notin \mathfrak{F}^*(f)$, en particulier AK/K n'est pas une f-section de H/K. Montrons d'abord que tout $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur E/K de H/K est un $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K. Par le lemme 6.3, E/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. On a $H = AE$ d'après le lemme 6.1. Par H-minimalité de A, toute section localement close U/K de H qui contient E/K couvre ou évite AK/K, en particulier E évite AK/K. Soient U/K une section localement close de H qui contient E/K et B/K une section localement close normale de U telle que $U/B \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si U couvre AK/K, alors $U = H$ et AB/B n'est pas une f-section de H. Comme $H = AE$, on en déduit que, comme $H/B \in \mathfrak{F}^*(f)$, $A \leq B$, en particulier $H = BE$. Si U évite AK/K, alors $U = E$ puisque $H = AE$. Ainsi, E/K est un $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K.

Montrons que tout $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteur F/K de H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K. On a $H = AF$ puisque $H/AK \in \mathfrak{F}^*(f)$. Donc $H/K = AK/K \rtimes F/K$ par H-minimalité de A et puisque $H/K \notin \mathfrak{F}^*(f)$. Ainsi, F couvre toutes les f-sections de H/K. Si F/K contient un sous-groupe f-couvrant F_1/K de H/K, alors $H = AF_1$ (lemme 6.1). On en déduit que F/K est un sous-groupe f-couvrant minimal de H/K. Aussi, la proposition 6.4 dit que F/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur E/K de H/K, donc F/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K.

Montrons la conjugaison des $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. Si H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K, alors la proposition 4.22 donne le résultat. Sinon, soit E/K un $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K. Comme E/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K, E/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur D/K de H/K. Mais on a $H/K = AK/K \rtimes E/K$ puisque $H/K \notin \mathfrak{F}^*(f)$ et par H-minimalité de A, donc $H = D$ ou $E = D$. Comme $H \neq D$ puisque H/K n'est pas un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K, on a montré que les $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K sont des $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateurs de H/K, en particulier ils sont conjugués. □

Théorème 6.14. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteurs.*

Preuve. – *1) Si $\sigma = \mathcal{P}^+$ et si H a un sous-groupe H-minimal A tel que $H/AK \in \mathfrak{F}^*(f)$.*

Soit T/K le sous-groupe de torsion maximal de AK/K. Montrons d'abord l'existence des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs. H/T a un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur F_0/T d'après le lemme 6.13. Le lemme 6.12 dit que F_0/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur F_1/K. F_1/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K (lemme 6.11).

Montrons maintenant la conjugaison des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. Soient E_1/K et E_2/K deux $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. Alors E_1T/T et E_2T/T sont des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/T (remarque 6.10). D'après le lemme 6.13, on peut supposer $E_1T = E_2T$. Mais le lemme 6.12 dit que E_1/K et E_2/K sont des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de E_1T/K, et le lemme 4.21 montrent qu'il existe M_1/K et M_2/K des $\mathcal{M}$-normalisateurs de E_1T/K tels que E_1/K et E_2/K soient des sous-groupes π-couvrants de Hall de M_1/K et M_2/K respectivement. Par conjugaison des $\mathcal{M}$-normalisateurs de E_1T/K (remarque 4.7), on peut supposer $M_1 = M_2$. Le théorème 3.12 dit que E_1/K et E_2/K sont conjugués dans M_1/K, ce qui finit la preuve.

2) Si $\sigma = \mathcal{P}^+$.

Par induction sur le rang et le degré de $d(H)$. Si H/K est localement fini, le fait 6.9 donne le résultat, donc on peut supposer $H^+ \neq 1$. Soit A un sous-groupe H-minimal de H^+. Alors H/AK possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs par hypothèse d'induction. Montrons d'abord que H/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur. Soit F/AK un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/AK. Si $d(H) = d(F)$, alors A est F-minimal et 1) dit que F/K a un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur. Sinon, par hypothèse d'induction, F/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur. Alors le lemme 6.11 donne l'existence d'un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K.

Soient E_1/K et E_2/K deux $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. E_1A/AK et E_2A/AK étant des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/AK (remarque 6.10), l'hypothèse d'induction permet de supposer $E_1A = E_2A$. E_1/K et E_2/K sont des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de E_1A/K. L'hypothèse d'induction permet de supposer $d(E_1A) = d(H)$. Alors A est E_1A-minimal et 1) dit que E_1/K et E_2/K sont conjugués.

3) Si σ est un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{P}^+$.

Par induction sur le rang et le degré de $d(H)$. Par le fait 6.9, on peut supposer $H^+ \neq 1$. Montrons d'abord l'existence des $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteurs de H/K. Supposons H^+ non abélien. D'après le fait 2.9, H^+ possède un p-sous-groupe quasiunipotent H-minimal A ($p \in \mathcal{P}^+$). Par hypothèse d'induction, H/AK possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur E/AK. Si $p \in \sigma$, soit F/K un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de E/K (il existe d'après 2)). E/K étant un σ-groupe, F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de E/K. Le lemme 6.11 montre que F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K. Donc on peut supposer $p \notin \sigma$. Soient F/K un σ-sous-groupe de Hall de E/K, U/K une σ-section localement close de H qui contient F/K et B/K une section localement close normale de U telle que $U/B \in \mathfrak{F}^*(f)$. U/K intersecte trivialement AK/K et on a $E/K = AK/K \rtimes F/K$ (fait 2.54). Aussi on a $E \leq UA$ et $UA/BA \in \mathfrak{F}^*(f)$, donc $UA = BE$ puisque E/AK est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/AK. Ainsi, on obtient $U = B(U \cap E) = BF$ et F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K.

On peut donc supposer H^+ abélien. Soit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sigma(H^+K/K)$. Supposons que $H/\mathcal{O}$ possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur $E/\mathcal{O}$. E/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur F/K d'après 2). E/K étant un σ-groupe, F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de E/K. Le lemme 6.11 dit que F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K. Ainsi, on peut supposer $\mathcal{O}/K = 1$, en particulier les σ-sous-groupes de H/K sont localement fini. Soit F/K un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur d'un σ-sous-groupe de Hall R/K de H/K (F/K existe d'après le fait 6.9). Comme R/K est un σ-groupe et comme $R/K \cap H^+K/K = 1$ puisque $\mathcal{O} = 1$, FH^+/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de RH^+/K. Comme H/H^+K est localement fini, le fait 6.9 montre que FH^+/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/H^+K. Soient U/K un σ-sous-groupe de H/K qui contient F/K et B/K un sous-groupe normal de U/K avec $U/B \in \mathfrak{F}^*(f)$. Alors on a $UH^+/BH^+ \in \mathfrak{F}^*(f)$, donc $UH^+ = BH^+F$ puisque FH^+/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/H^+K. Mais $U/K \cap H^+K/K = 1$ puisque U/K est un σ-groupe, donc $U = BF(U \cap H^+) = BF$. On en déduit que F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K.

Montrons que les $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteurs de H/K sont conjugués dans H/K. Soient F_1/K et F_2/K deux $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteurs de H/K. Le fait 2.51 permet de supposer qu'un σ-sous-groupe de Hall R/K de H/K contient F_1/K et F_2/K. Alors F_1/K et F_2/K sont des $(\mathfrak{F}^*(f),\mathcal{P}^+)$-projecteurs de R/K et 2) donne le résultat. □

Corollaire 6.15. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si $\infty \in \sigma \cap \pi$, on suppose $\sigma \subseteq \pi$ et $f(\infty) \subseteq \cap_{p\in\sigma} f(p)$. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}(f),\sigma)$-projecteurs.*

Preuve. – Le corollaire 5.12 dit que $\mathfrak{F}^*(f) = \mathfrak{F}(f)$, et le théorème 6.14 donne le résultat. □

Corollaire 6.16. – *On suppose H/K localement nilpotent. Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, R/K l'unique σ-sous-groupe de Hall de H/K (fait 2.50) et S/K l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de R/K (corollaire 3.15). Alors S/K est l'unique $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteur de H/K. De plus, si $U/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ est un σ-sous-groupe de H/K, alors U/K est contenu dans S/K.*

Preuve. – Montrons que S/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Comme S/K est localement nilpotent, S/K est hypercentral (fait 2.37) et centralise toutes ses sections S/K-d_{loc}-minimales. En particulier, les π-sections S/K-d_{loc}-minimales de S sont des f-sections de S/K. Comme S/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre (lemme 3.9), on a montré que S/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe.

Montrons que tout σ-sous-groupe $V/S \in \mathfrak{F}^*(f)$ de H/S est trivial. D'après le corollaire 3.14, S/K est l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de V/K. On en déduit que V n'a pas de π-section V/S-d_{loc}-minimale non triviale. Mais V/S est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, donc V/S n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre, ce qui prouve que V/S est trivial.

Ainsi, comme $\mathfrak{F}^*(f)$ est une classe Q-d_{loc}-close (lemme 5.7), tout σ-sous-groupe $U/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ de H/K est contenu dans S/K.

D'après le théorème 6.14, H/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteur L/K. Alors LS/S est un σ-groupe et un $\mathfrak{F}^*(f)$-sous-groupe de H/S (lemme 5.7). Ce qui précède montre que L/K est contenu dans S/K. Comme S/K est à la fois un σ-groupe et un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, on obtient $L/K = S/K$. □

Corollaire 6.17. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ un σ-groupe et F/K un $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteur de H/K. Alors $N_H(F)/F$ est un $\pi^\perp$-section localement close.*

Preuve. – Montrons que $N_H(F)/F$ est une section localement close. Par induction sur le rang de $d(H)$. On peut supposer $K^- = 1$ et H/K non localement fini, donc $H^+ \neq 1$. Soit N_0 le plus grand sous-groupe normal et localement clos de H contenu dans $N_H(F)$. Alors F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteur de N_0F/K, donc le théorème 6.14 et l'argument de Frattini donnent $N_H(N_0F) = N_0N_H(F) = N_H(F)$. Quitte à considérer H/N_0 au lieu de H/K, on peut supposer $N_0 = K$. Comme $H^+ \neq 1$, H^+ possède un sous-groupe H-minimal A. $(FA/A)/(AK/A)$ est un $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteur de $(H/A)/(AK/A)$ et, par hypothèse d'induction, $N_H(FA)/FA$ est une section localement close. Comme $N_H(F) \leq N_H(FA)$, on peut supposer FA normal dans H. Par le théorème 6.14 et l'argument de Frattini, on obtient $H = AN_H(F)$, en particulier $A \cap F$ est normal dans H, donc $A \cap F \leq N_0 = K$ et $H/K = AK/K \rtimes N_H(F)/K$.

Soit $C/K = C_{H/K}(AK/K)$. Alors $C \cap F$ est un sous-groupe localement clos (fait 2.28) et normal de H, donc $C \cap F \leq N_0 = K$. Ainsi $[N_C(F), F] \leq C \cap F = K$, donc on a $N_C(F)/K = C_{C/K}(F/K)$ et, comme $C_{C/K}(F/K)$ est localement clos (fait 2.28) et est normal dans H/K puisque $H = AN_H(F)$, $N_C(F) \leq N_0 = K$. Mais $H = AN_H(F)$, donc on obtient $C = AN_C(F) = AK$. En particulier, comme $Q(H^+)$ centralise A, on a $Q(H^+) \leq A(H^+ \cap K)$ et le fait 2.9 donne $N_{H^+}(F)' \leq N_{H^+}(F) \cap Q(H^+) \leq N_{H^+}(F) \cap A(H^+ \cap K)$. Or $N_A(F) \leq K$, donc $N_{H^+}(F)/(H^+ \cap K)$ est abélien. Comme $K^- = 1$, H^+ centralise K (fait 2.1), ce qui prouve que $H^+ \cap K$ est central dans H^+ et que $N_{H^+}(F)$ est nilpotent. Soit $E = E_{H^+}(N_{H^+}(F))$. Il s'agit d'un sous-groupe de H^+ définissable, connexe et autonormalisant (faits 2.17 et 2.20) et $N_H(F)$ normalise E. En particulier $N_H(E)$ est localement clos. Donc, si $N_H(E)^+ < H^+$, l'hypothèse d'induction donne le résultat. Sinon, comme on a $N_H(E)^+ \leq N_{H^+}(E) = E$, $E = H^+$ et le fait 2.19 donne $N_{H^+}(F) \leq F(H^+)$. Or $F(H^+)$

centralise A, donc on obtient $F(H^+) \leq C = AK$ et $N_{H^+}(F) \leq AK \cap N_H(F) = K$. Comme $H/K = AK/K \rtimes N_H(F)/K$, on a $H^+K/K = AK/K \rtimes N_{H^+}(F)K/K = AK/K$ et $N_H(F)/K$ est localement fini, ce qui est contradictoire.

Il reste à montrer que $N_H(F)/F$ est un $\pi^\perp$-groupe. Supposons que $N_H(F)/F$ possède un π-élément non trivial. Alors $N_H(F)/F$ possède un π-sous-groupe localement clos abélien $U/F \neq 1$. En particulier, U/F est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Comme F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K contenu dans U/K, F couvre U/F, ce qui est contradictoire. On en déduit que $N_H(F)/F$ n'a pas de π-élément non trivial. En particulier, les éléments de torsions de $N_H(F)/F$ sont des $\pi^\perp$-éléments. Ceci montre que, si $\infty \notin \pi$, $N_H(F)/F$ est un $\pi^\perp$-groupe.

Supposons que $N_H(F)/F$ ne soit pas un $\pi^\perp$-groupe. Par ce qui précède, on a $\infty \in \pi$. Il existe $x \in N_H(F)$ tel que $d(x)F/F$ ne soit pas un $\pi^\perp$-groupe. On note $\mathcal{O}/F = \mathcal{O}_{\pi^\perp}(d(x)F/F)$. Alors $d(x)F/\mathcal{O}$ est un π-groupe abélien non trivial, en particulier $d(x)F/\mathcal{O}$ est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Comme $d(x)F/K$ est un σ-groupe et comme F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K, on obtient $d(x)F = \mathcal{O}F = \mathcal{O}$, ce qui est contradictoire. $\square$

Le corollaire 6.15 permet de retrouver le théorème 5 de [1] (pour les groupes de rang de Morley fini), en prenant $\sigma = \mathcal{P}$, $K = 1$, $\mathfrak{R} = \mathcal{D}loc$ et $\pi \subseteq \mathcal{P}$, puis en appliquant la conjugaison des $(\mathfrak{F}(f), \sigma)$-projecteurs de H/K.

On peut aussi remarquer que le théorème 6.14 contient, dans son énoncé, plusieur résultats déjà connus :

- la conjugaison des μ-sous-groupes de Hall pour tout $\mu \subseteq \mathcal{P}$ (fait 2.49), en prenant $\sigma = \pi = \mu$, $\mathfrak{R} = \mathcal{D}loc$ et $f(p) = \mathcal{D}loc$ pour tout $p \in \mu$;

- l'existence et la conjugaison des sous-groupes μ-couvrants de Hall pour tout $\mu \subseteq \mathcal{P}^+$ (théorème 3.12), en prenant $\sigma = \mathcal{P}^+$, $\pi = \mu$, $\mathfrak{R} = \mathcal{D}loc$ et $f(p) = \mathcal{D}loc$ pour tout $p \in \mu$.

On obtient une nouvelle démonstration et une généralisation du théorème 7.6 de [12], il s'agit aussi d'une généralisation du théorème 6 de [1] :

Proposition 6.18. – *Soient H/K une section localement close résoluble d'un groupe de rang de Morley fini, f la fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ qui, à tout $p \in \pi$, associe le singleton $\{\{1\}\}$. Alors les $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteurs de H/K sont exactement les π-sous-groupes localement nilpotents de H/K qui contiennent tous les π-éléments de leur normalisateur.*

Preuve. – Soient C/K un $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteur de H/K et R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K qui contient C/K. Alors C/K est autonormalisant dans R/K d'après le corollaire 6.17. Aussi, d'après le corollaire 5.12, C/K est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe, donc C/K centralise chacune de ses section C/K-d_{loc}-minimales. Ainsi, C/K est hypercentral, donc localement nilpotent d'après le fait 2.37. On en déduit que C/K est un π-sous-groupe localement nilpotent de H/K qui contient tous les π-éléments de son normalisateur.

Réciproquement, soit C/K un π-sous-groupe localement nilpotent de H/K qui contient tous les π-éléments de son normalisateur. Soit R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K qui contient C/K. Alors C/K est un sous-groupe localement nilpotent maximal de R/K (faits 2.37) et $C/K \in \mathcal{D}loc$ (fait 2.35). De plus, C/K est hypercentral (fait 2.37), donc le fait 2.28 dit que C/K est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Montrons d'abord que, pour tout $x \in R$, $x \in d_{loc}(C^x, C)$. Supposons le contraire. Soit $(R_i)_{i \leq \alpha}$ (α ordinal) une suite croissante de sous-groupe localement clos de R qui vérifie :

(i) $R_0 = K$ et $R_\alpha = R$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ordinal $\beta(n)$ tel que $R_{\beta(n)} = R^{(n)}K$ ($R^{(n)}K$ est localement clos d'après le fait 2.27) ;

(iii) R_{i+1}/R_i est C/K-d_{loc}-minimal pour tout $i < \alpha$;

(iv) $R_\mu = \cup_{j<\mu} U_j$ pour tout ordinal limite μ.

Alors il existe un plus petit ordinal $\nu \leq \alpha$ tel qu'il existe $x \in R_{\nu+1} \setminus R_\nu$ avec $x \notin d_{loc}(C^x, C)$. Comme toute section $U/V \in \mathfrak{F}(f)$ de R, avec $K \leq V$, est hypercentrale, donc vérifie la condition de normalisateur (fait 2.37), C couvre chaque section $U/V \in \mathfrak{F}(f)$ de $R_\nu C$, avec $K \leq V$. En particulier, C/K est un $(\mathfrak{F}(f), \pi)$-projecteur de $R_\nu C/K$. Si $R_\nu C/K$ est normal dans $R_{\nu+1}C/K$, alors le corollaire 6.15 et l'argument de Frattini donnent $R_{\nu+1}C = R_\nu N_{R_{\nu+1}C}(C)$ et C/K n'est pas autonormalisant dans R/K, ce qui est contradictoire. $R_{\nu+1}/R_\nu$ étant C/K-d_{loc}-minimal, on en déduit $x \in d_{loc}((R_\nu C)^x, R_\nu C) = R_\nu d_{loc}(C^x, C)$. Soient $u \in R_\nu$ et $y \in d_{loc}(C^x, C)$ tels que $x = uy$. Alors on a $u \in d_{loc}(C^u, C) = d_{loc}(C^{xy^{-1}}, C)$ et, comme $y \in d_{loc}(C^x, C)$, $u \in d_{loc}(C^x, C)$. Ainsi on obtient $x \in d_{loc}(C^x, C)$, ce qui est contradictoire.

Montrons que C/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteur de H/K. D'après le théorème 6.14, il suffit de montrer que C/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteur de R/K et, d'après le corollaire 5.12, il suffit de montrer que C/K est un $(\mathfrak{F}(f), \pi)$-projecteur de R/K. Si ce n'est pas le cas, il existe un sous-groupe $U/K \in \mathcal{D}loc$ de R/K qui contient C/K, et une section normale et localement close V/K de U/K avec $U/V \in \mathfrak{F}(f)$ et telle que $U \neq VC$. Mais U/V est hypercentrale, donc vérifie la condition de normalisateur (fait 2.37). Ainsi, il existe $x \in N_U(CV)\backslash CV$, ce qui contredit $x \in d_{loc}(C^x, C)(\leq CV)$. Ceci finit la preuve de la proposition. $\square$

Corollaire 6.19. – **([12], th. 7.6)** *Soient H/K une section localement close résoluble d'un groupe de rang de Morley fini et N/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter. De plus, si C/K est un sous-groupe de Carter de H/K, alors CN/N est un sous-groupe de Carter de H/N et tous les sous-groupes de Carter de H/N sont de cette forme.*

7 Groupes superrésolubles

Dans cette section, nous étudions les sous-groupes *superrésolubles* (définition 7.1) et *localement superrésolubles* des sections localement closes des groupes de rang de Morley fini.

Définition 7.1. – *Un groupe G est dit être* superrésoluble *s'il possède une série normale finie avec des facteurs cycliques.*

Remarque 7.2. – Tout sous-groupe et tout quotient d'un groupe superrésoluble est superrésoluble.

On note $\mathfrak{F}_s$ la classe des groupes localement superrésolubles. Le résultat principal de cette section donne, pour tout $H/K \in \mathcal{D}loc$, l'existence et la conjugaison des $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteurs de H/K pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ (théorème 7.23). Il s'agit d'une conséquence du théorème 6.14.

La proposition 7.8 et le corollaire 7.12 sont analogues à des résultats de Wehrfritz sur les groupes linéaires localement superrésolubles ([36]).

Fait 7.3. – **([29], 5.4.8 p.145, Zappa)** *Si G est un groupe superrésoluble, alors G possède une série normale*

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G$$

dans laquelle chaque facteur est cyclique d'ordre premier ou cyclique d'ordre infini et l'ordre des facteurs à partir de la gauche est ceci : facteurs impairs d'ordres décroissants, facteurs infinis, facteurs d'ordre 2.

Fait 7.4. – **([29], 5.4.10 p.146)** *Si G est un groupe supperrésoluble, alors $F(G)$ est nilpotent et $G/F(G)$ est un groupe fini et abélien. En particulier, G' est nilpotent.*

Lemme 7.5. – *Soit H/K une section superrésoluble d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G avec K localement fini. Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ ($n \in \mathbb{N}$) les entiers premiers distincts de 2 tels que $Q(G)$ possède un élément non trivial d'ordre p_i ($i = 1, ..., n$). Alors il existe un entier l divisant $h = 2(p_1 - 1)...(p_n - 1)$ tel que $(H/K)/F(H/K)$ soit d'exposant l.*

Preuve. – D'après le fait 7.3, il existe une suite croissante $(H_i)_{i=0,...,m}$ ($m \in \mathbb{N}$) formée de sous-groupes normaux de H avec $H_0 = K$ et H_{i+1}/H_i d'ordre premier ou bien isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour tout $i = 0, ..., m-1$. De plus, on peut supposer qu'il existe $j \in \{0, ..., m\}$ tel que tous les éléments non triviaux de H_j/K soient d'ordre impair et tel que, pour tout $k \in \{j, ..., m-1\}$, H_{k+1}/H_k soit d'ordre 2 ou d'ordre infini. En particulier, comme K est localement fini, H_j est localement fini.

Soit $i \in \{0, ..., m-1\}$. Montrons que $A_H(H_{i+1}/H_i)$ est d'exposant divisant h. Si H_{i+1}/H_i est d'ordre impair $p \notin \{p_1, ..., p_n\}$, H_{i+1}/H_i n'est pas couvert par $Q(G) \cap H$. Donc le fait 2.9 donne

$[H, H_{i+1}] \leq Q(G) \cap H_{i+1} \leq H_i$ et H centralise H_{i+1}/H_i. Si on a $|H_{i+1}/H_i| \in \{p_1, ..., p_n\}$, alors $|A_H(H_{i+1}/H_i)|$ divise $p_s - 1$ pour un $s \in \{1, ..., n\}$. Si $|H_{i+1}/H_i| = 2$, alors H centralise H_{i+1}/H_i. Enfin, si H_{i+1}/H_i est isomorphe à $\mathbb{Z}$, on a $|A_H(H_{i+1}/H_i)| \leq 2$ puisque $|Aut(\mathbb{Z})| = 2$. Notons $C = \bigcap_{i=0}^{m-1} C_H(H_{i+1}/H_i)$. Ce qui précède montre que H/C est d'exposant l_0 pour un entier l_0 qui divise h. Mais C/K est nilpotent et normal dans H/K. Donc C/K est contenu dans $F(H/K)$ et on obtient le résultat. $\square$

Fait 7.6. – **([12], lemme 6.1)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H un sous-groupe localement clos et connexe de G, A un sous-groupe H-minimal de G et U/V une H-section non triviale et localement close de A. Alors $C_H(U/V) = C_H(A)$.*

Lemme 7.7. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble et U/K un sous-groupe de $H^\circ K/K$ normalisé par un sous-ensemble X/K de $H^\circ K/K$. Si, pour tout $\overline{x} \in X/K$, $E_{U/K}(\overline{x}) = U/K$, alors l'action de $\langle X/K\rangle$ sur U/K est nilpotente.*

Preuve. – Comme $H^\circ K/K$ et $H^\circ/(H^\circ \cap K)$ sont isomorphes, on peut supposer $K \leq H^\circ$. On fait la preuve par induction sur le rang de $d(H^\circ)$. Soit A un sous-groupe H°-minimal de $d(H^\circ)$. Par hypothèse d'induction, l'action de $\langle XA/AK\rangle$ sur UA/AK est nilpotente. Si $U/K \cap AK/K = 1$, on conclut que l'action de $\langle X/K\rangle$ sur U/K est nilpotente. On peut donc supposer $U/K \cap AK/K \neq 1$.

On va montrer que $\langle X/K\rangle$ centralise AK/K. Ainsi, on aura démontré que l'action de $\langle X/K\rangle$ sur UA/K est nilpotente, ce qui prouve le lemme. Soient $\overline{x} \in X/K$ et $C_x/K = C_{AK/K}(\overline{x})$. Comme $E_{U/K}(\overline{x}) = U/K$ et $U/K \cap AK/K \neq 1$, on a $E_{AK/K}(\overline{x}) \neq 1$ et $C_x/K \neq 1$. D'après le fait 2.5, $(H^\circ)'$ centralise A et $(H^\circ/K)'$ centralise AK/K. On en déduit que H°/K normalise C_x/K et que H° normalise $(C_x \cap A)/(A \cap K)$. Le fait 2.28 montre que $(C_x \cap A)/(A \cap K)$ est un $\mathcal{D}loc$-groupe et ce groupe n'est pas trivial puisque $C_x/K \neq 1$. Comme $\overline{x}$ centralise $(C_x \cap A)/(A \cap K)$, le fait 7.6 dit que $\overline{x}$ centralise AK/K et X/K centralise AK/K. Ceci prouve le lemme. $\square$

Proposition 7.8. – *Soit R/K un sous-groupe localement superrésoluble d'une section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors R/K est (localement nilpotent)-par-(fini, abélien).*

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$. En particulier K est localement fini. Comme R/K est localement résoluble, le fait 2.34 permet de supposer G résoluble. Nous montrons d'abord que R/K est nilpotent-par-fini. Pour cela, il suffit de montrer que $R^\circ/(K \cap R^\circ)$ est nilpotent-par-fini. Donc on peut supposer R et G connexes. Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ les entiers premiers distincts de 2 tels que $Q(G)$ possède un élément non trivial d'ordre p_i $(i = 1, ..., n)$, $h = 2(p_1 - 1)...(p_n - 1)$ et $F/K = \langle \overline{x}^h : \overline{x} \in R/K\rangle$.

Montrons que F/K est nilpotent. Soit $\overline{x} \in R/K$. Si $\overline{y}$ est un élément de R/K, $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle$ est superrésoluble. Le lemme 7.5 dit que $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle/F(\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle)$ est d'exposant l pour un diviseur l de h. Ainsi, $\overline{x}^h$ appartient à $F(\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle)$. Comme $F(\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle)$ est nilpotent (fait 7.4), on en déduit $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle \subseteq E_{R/K}(\overline{x}^h)$. Ceci étant vrai pour tout $\overline{y} \in R/K$, on obtient $E_{R/K}(\overline{x}^h) = R/K$. Comme ceci est vrai pour tout $\overline{x} \in R/K$, le lemme 7.7 dit que l'action de F/K sur R/K est nilpotente. Ceci prouve la nilpotence de F/K.

D'après le choix de F, $RQ(G)/Q(G)F$ est d'exposant borné. $G/Q(G)$ étant divisible (fait 2.9), $RQ(G)/Q(G)F$ est un sous-groupe d'exposant borné de la section localement close divisible $G/Q(G)F$. Le lemme 4.17 dit que $RQ(G)/Q(G)F$ et $R/(R \cap Q(G)F)$ sont finis. Comme $(R \cap Q(G)K)/K$ et F/K sont deux sous-groupes nilpotents qui se normalisent, $(R \cap Q(G)F)/K$ est nilpotent et R/K est nilpotent-par-fini.

Montrons que R/K est (localement nilpotent)-par-(fini, abélien). Par ce qui précède et le fait 2.10, il suffit de montrer que $R'K/K$ est localement nilpotent. Soit X une partie finie de R'. Alors il existe une partie finie Y de R telle que X soit contenu dans $\langle Y\rangle'$. Le fait 7.4 dit que $\langle Y\rangle'K/K$ est nilpotent puisque $\langle Y\rangle$ est superrésoluble. Donc $\langle XK/K\rangle$ est nilpotent. $\square$

Comme le montre les faits 7.10 et 7.11, la notion de groupe localement superrésoluble est très liée à celle de groupe *hypercyclique* (définition 7.9). Nous montrons que les deux notions sont mêmes équivalentes pour ce qui concerne les sous-groupes des sections localement closes (corollaire 7.12).

Définition 7.9. – *On appelle* série ascendante *d'un groupe G une suite croissante $(U_i)_{i\leq\alpha}$ (α étant un ordinal) de sous-groupes de G telle que $U_0 = 1$, $U_\alpha = G$, U_i soit un sous-groupe normal de U_{i+1} pour tout $i < \alpha$ et, pour tout ordinal limite $\mu \leq \alpha$, $U_\mu = \cup_{i<\mu} U_i$.*

Un groupe G est dit être hypercyclique *si il possède une série ascendante normale avec des facteurs cycliques.*

Fait 7.10. – **([34], lemme 11.19 p.168)** *Si un groupe G est localement superrésoluble et est une extension d'un groupe hypercentral par un groupe finiment engendré, alors G est hypercyclique.*

Fait 7.11. – **([3], Baer)** *Tout groupe hypercyclique est localement superrésoluble.*

Corollaire 7.12. – *Soit U/K un sous-groupe d'un $\mathcal{D}loc$-groupe. Alors U/K est localement superrésoluble si et seulement si U/K est hypercyclique.*

Preuve. – Supposons U/K localement superrésoluble. La proposition 7.8 et le fait 2.37 montrent que U/K est nilpotent-par-fini. Le fait 7.10 donne l'hypercyclicité de U/K.

Le fait 7.11 donne la réciproque. □

Lemme 7.13. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G et A/K une section H/K-d_{loc}-minimale de H telle que $H'K/K$ centralise A/K. Alors, si R désigne le sous-anneau de $End(A/K)$ engendré par $A_H(A/K)$, R est un anneau intègre.*

Preuve. – Supposons d'abord A/K localement fini. Alors, pour tout $r \in R$, $Ker(r)$ et $r(A/K)$ sont normalisés par H/K puisque R est abélien. De plus, pour tout $r \in R$, $Ker(r)$ et $r(A/K)$ sont des sections localement closes puisque A/K est localement fini. Comme A/K est H/K-d_{loc}-minimale, on en déduit que, pour tout $r \in R \setminus \{0\}$, $Ker(r)$ est trivial et $r(A/K) = A/K$. Autrement dit, r est un automorphisme de A/K. Ceci prouve que R est un anneau intègre.

Donc on peut supposer A/K sans torsion, en particulier $A = A^+K$. On peut aussi supposer $K^- = 1$. Soit $r \neq 0$ un élément de R. Montrons que $r(A/K) = A/K$. Il existe un couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$ et des éléments $h_1, ..., h_m$ et $k_1, ..., k_n$ de H tels que, pour tout $\overline{a} \in A/K$, on ait $r(\overline{a}) = \overline{a}^{h_1}...\overline{a}^{h_m}\overline{a}^{k_1}...\overline{a}^{k_n}$. Soit

$$\begin{array}{llll} r_0 : & A^+ & \longrightarrow & A^+ \\ & a & \longmapsto & a^{h_1}...a^{h_m}a^{k_1}...a^{k_n} \end{array}$$

C'est un homomorphisme définissable de groupe et $Ker(r_0)$ et $Im(r_0)$ sont définissables. Aussi, on a $r(A/K) = Im(r_0)K/K$. Donc $r(A/K)$ est une section localement close de H. De plus, $r(A/K)$ est normalisé par H puisque R est abélien. Comme A/K est H/K-d_{loc}-minimale et comme $r \neq 0$, on obtient $r(A/K) = A/K$.

Soit $U/K = Ker(r)$. Supposons $U/K \neq 1$. Montrons que $U/K = A/K$. Comme K est localement fini puisque $K^- = 1$, $r_0^{-1}(K \cap A^+)/Ker(r_0)$ est localement fini. $Ker(r_0)$ étant définissable, $r_0^{-1}(K \cap A^+)$ est localement clos. Mais on a $r_0^{-1}(K \cap A^+)K/K = U/K$ puisque $A = A^+K$. Donc U est un sous-groupe localement clos. R étant abélien, $Ker(r)$ est normal dans H/K et $U/K = A/K$ par minimalité de A/K. Ceci est contradictoire. Ainsi, $Ker(r) = 1$ et R est intègre. □

Corollaire 7.14. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G et L/M une section H/K-d_{loc}-minimal de H. Si $A_H(L/M)$ est d'exposant au plus 2, alors $A_H(L/M)$ est d'ordre au plus 2 et L/M possède une série ascendante avec des facteurs cycliques dont les termes sont normalisés par H.*

Preuve. – Si $A_H(L/M) = 1$, le corollaire est trivial. On peut donc supposer que $A_H(L/M)$ possède une involution i. Montrons que $A_H(L/M)$ est d'ordre 2. Supposons le contraire. Alors $A_H(L/M)$ possède un sous-groupe A d'ordre 4 et A est abélien. Le lemme 7.13 dit que A engendre un anneau intègre. Donc A possède au plus une involution, ce qui est contradictoire. Ainsi, $A_H(L/M)$ est d'ordre 2 et $A_H(L/M)$ est engendré par i.

Comme le lemme 7.13 dit que $A_H(L/M)$ engendre un anneau intègre, i inverse L/M. On en déduit que H normalise chaque sous-groupe de L/M. Ceci prouve le corollaire. $\square$

Lemme 7.15. – *Soient U/K un sous-groupe d'une section localement close résoluble H/K et V/K un sous-groupe d'indice fini de U/K. Alors $V^+ = d_{loc}(V)^+ = U^+ = d_{loc}(U)^+$.*

Preuve. – U/K normalise un sous-groupe V_0/K de V/K d'indice fini dans U/K. Alors on a $V_0^+ \leq V^+ \leq U^+$ et $d_{loc}(V_0)^+ \leq d_{loc}(V)^+ \leq d_{loc}(U)^+$. Donc on peut supposer $V = V_0$ et il suffit de montrer que $d_{loc}(U)^+$ est contenu dans V^+.

Comme U normalise V, U normalise V^+. De plus, VV^+/V^+ est un sous-groupe d'indice fini de UV^+/V^+. VV^+/V^+ étant localement fini (remarque 2.32), UV^+/V^+ est aussi localement fini. On en déduit que UV^+ est localement clos. Ceci prouve que $d_{loc}(U)$ est contenu dans UV^+ et que $d_{loc}(U)V^+/V^+$ est localement fini. Alors $d_{loc}(U)^+$ est contenu dans V^+. $\square$

Proposition 7.16. – *Soit U/K un sous-groupe localement superrésoluble d'une section localement close H/K. Alors $d_{loc}(U)/K$ est localement superrésoluble. De plus, si L/M est une section $d_{loc}(U)/K$-d_{loc}-minimale de U^+K, alors $A_{d_{loc}(U)}(L/M)$ est d'ordre au plus 2.*

Preuve. – Le fait 2.34 permet de supposer H résoluble. On peut aussi supposer $K^- = 1$. En particulier, K est localement fini. Soit $U_0/K = HP(U/K)$. C'est un sous-groupe localement nilpotent (fait 2.10). D'après la proposition 7.8, U_0 est d'indice fini dans U et U/U_0 est abélien. On note V/U_0 le sous-groupe de U/U_0 engendré par les carrées des éléments de U/U_0. Alors U/V est d'exposant au plus 2. Le fait 2.35 dit que $d_{loc}(U_0)/K$ est localement nilpotent et le fait 2.36 donne $d_{loc}(U_0) = d_{loc}(U_0)^+ * T$ où T/K est le sous-groupe de torsion maximal de $d_{loc}(U_0)/K$ et $d_{loc}(U_0)^+$ est nilpotent.

Montrons que $d_{loc}(V)/T$ est hypercentral. Supposons le contraire. Soit Z/T l'hypercentre de $d_{loc}(V)/T$. Le fait 2.28 montre qu'il s'agit d'une section localement close. De plus, le fait 2.28 donne $1 = Z(d_{loc}(V)/Z) = C_{d_{loc}(V)/Z}(VZ/Z)$, d'où $Z(VZ/Z) = 1$. Comme V/U_0 est abélien, on obtient $U_0Z/Z \neq 1$. D'après le fait 2.37, $d_{loc}(U_0)/K$ et U_0/K sont hypercentraux. Ainsi, U_0Z/Z a un centre non trivial. Le corollaire 7.12 dit que UZ/Z est hypercyclique. On en déduit que UZ/Z possède un sous-groupe cyclique normal et non trivial L/Z dans $Z(U_0Z/Z)$. Mais Z est un sous-groupe localement clos de U_0 et Z contient T. Donc L/Z est sans torsion et L/Z est infini cyclique. Ceci prouve que $UZ/C_{UZ}(L/Z)$ est d'ordre au plus 2. On a montré que $U/C_U(L/Z)$ est d'ordre au plus 2 et V centralise L/Z. Ceci contredit $Z(VZ/Z) = 1$. Donc $d_{loc}(V)/T$ est hypercentral.

Montrons que U^+K/K est hypercentral dans $d_{loc}(V)/K$. $d_{loc}(V)/K$ possède un sous-groupe de Carter C/K (corollaire 6.19). Comme $d_{loc}(V)/T$ est hypercentral, $d_{loc}(V)/T$ est localement nilpotent (fait 2.37) et le corollaire 6.19 donne $d_{loc}(V) = TC$. Comme $U^+ = d_{loc}(V)^+$ (lemme 7.15), C^+ est contenu dans U^+. On en déduit que C^+T est un sous-groupe normal de U^+T. Comme C/C^+ est localement fini (remarque 2.32), U^+T/C^+T est localement fini. Ceci montre que $U^+/(U^+ \cap T)C^+$ est localement fini et, comme $(U^+)^+ = U^+$ (fait 2.33), on a montré que $U^+ = (U^+ \cap T)C^+$. Comme $U^+ = d_{loc}(U_0)^+$ (lemme 7.15), U^+ centralise T et C^+ est normal dans U^+. K étant localement fini, T est localement fini. Alors, U^+/C^+ est localement fini et $U^+ = C^+$. C/K est hypercentral d'après le fait 2.37. Comme U^+ centralise T et comme $d_{loc}(V) = TC$, on en déduit que U^+K/K est hypercentral dans $d_{loc}(V)/K$.

Soit L/M une section $d_{loc}(U)/K$-d_{loc}-minimale de U^+K. Montrons :

(1) *$A_{d_{loc}(U)}(L/M)$ est d'ordre au plus 2. De plus, L/M possède une série ascendante avec des facteurs cycliques et dont les termes sont normalisés par $d_{loc}(U)$.*

Comme U^+K/K est hypercentral dans $d_{loc}(V)/K$, on a $C_{L/M}(d_{loc}(V)/M) \neq 1$. Mais $d_{loc}(U)$ normalise $C_{L/M}(d_{loc}(V)/M)$ et le fait 2.28 dit que $C_{L/M}(d_{loc}(V)/M)$ est une section localement close. Donc $d_{loc}(V)$ centralise L/M par minimalité de L/M. Le fait 2.25 et le lemme 7.15 donnent

$$d_{loc}(U)/d_{loc}(V) = UU^+/d_{loc}(V) \cong U/(U \cap d_{loc}(V))$$

Comme $V \leq U \cap d_{loc}(V)$, ceci prouve que $d_{loc}(U)/d_{loc}(V)$ est d'exposant au plus 2. On a montré que $A_{d_{loc}(U)}(L/M)$ est d'exposant au plus 2, et le corollaire 7.14 donne (1).

Il reste à montrer que $d_{loc}(U)/K$ est localement superrésoluble. D'après le fait 7.11, il suffit de montrer que $d_{loc}(U)/K$ est hypercyclique. Comme on a $d_{loc}(U) = UU^+$ (fait 2.25), $d_{loc}(U)/U^+K$ est hypercyclique. Mais, par le fait 2.30 et (1), il existe une série ascendante de U^+K/K avec des facteurs cycliques et dont les termes sont normalisés par $d_{loc}(U)$. Donc $d_{loc}(U)/K$ est hypercyclique. $\square$

Définition 7.17. – *On note f_s la fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation qui, à tout $p \in \mathcal{P}$, associe la classe des $\mathcal{D}loc$-groupes abéliens d'exposant divisant $p-1$, et telle que $f_s(\infty) = f_s(3)$.*

Fait 7.18. – **([19], McLain)** *Les facteurs chefs d'un groupe localement résoluble G sont abéliens.*

Fait 7.19. – **([11], ex. f, p.358)** *Si un groupe fini G a un p-facteur chef U/V ($p \in \mathcal{P}$) avec $A_G(U/V)$ groupe abélien d'exposant divisant $p-1$, alors U/V est d'ordre p.*

Corollaire 7.20. – *Si un groupe G a un p-facteur chef U/V ($p \in \mathcal{P}$) avec $A_G(U/V)$ groupe abélien d'exposant divisant $p-1$, alors U/V est d'ordre p.*

Preuve. – Soient $A = A_G(U/V)$ et $H = (U/V) \rtimes A$. H est un groupe localement fini et localement résoluble. Le fait 7.18 dit que U/V est abélien. Montrons d'abord que A est fini. Supposons le contraire. A possède un sous-groupe A_0 d'ordre $n \in \mathbb{N}$ avec $n > p-1$. Soient $\overline{u} \in U/V \setminus \{1\}$, $\overline{U}_0$ la clôture normale de $\langle \overline{u} \rangle$ dans $(U/V) \rtimes A_0$ et $H_0 = \overline{U}_0 \rtimes A_0$. H_0 est fini puisque H est localement fini. Soient $\overline{U_1}$ un sous-groupe minimal normal de H_0 dans $\overline{U_0}$ et $C = C_{H_0}(\overline{U_1})$. H_0/C est un groupe abélien d'exposant divisant $p-1$ et le fait 7.19 dit que $\overline{U}_1$ est d'ordre p. On en déduit que A_0C/C est d'ordre au plus $p-1$. A_0 étant d'ordre $n > p-1$, on obtient $C \cap A_0 \neq 1$. A étant abélien, A normalise $C_{U/V}(C \cap A_0)$, donc H aussi. La minimalité de U/V donne $C_{U/V}(C \cap A_0) = 1$, ce qui est contradictoire puisque $\overline{U}_1 \leq C_{U/V}(C \cap A_0)$. On en déduit la finitude de A.

Alors A normalise un sous-groupe fini $\overline{U}_2 \neq 1$ de U/V et, U/V étant abélien, $\overline{U}_2$ est normal dans H. Par minimalité de U/V, on obtient $U/V = \overline{U}_2$ et H est fini. Le fait 7.19 donne le résultat. $\square$

Proposition 7.21. – $\mathfrak{F}(f_s) = \mathfrak{F}_s \cap \mathcal{D}loc$.

Preuve. – Montrons que tout $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe est localement superrésoluble. Par le fait 7.11, il suffit de montrer que tout $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe est hypercyclique. Supposons le contraire. Alors il existe un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe F/K qui n'est pas hypercyclique. D'après le fait 2.30, F/K possède une série croissante normale $(F_i/K)_{i \leq \alpha}$ (α ordinal) formée de sous-groupes localement clos avec des facteurs F/K-d_{loc}-minimaux et telle que $F_0 = K$, $F_\alpha = F$ et $F_\mu = \cup_{i<\mu} F_i$ pour tout ordinal limite $\mu \leq \alpha$. Il existe un plus petit ordinal $\nu < \alpha$ tel que $F_{\nu+1}/F_\nu$ ne possède pas de série ascendante avec des facteurs cycliques et dont les termes sont normalisés par F. D'après le corollaire 7.20, les p-sections F/K-d_{loc}-minimales de F pour $p \in \mathcal{P}$ sont cycliques. Donc $F_{\nu+1}/F_\nu$ est une ∞-section et $A_F(F_{\nu+1}/F_\nu)$ est d'exposant 2. Le corollaire 7.14 donne une contradiction, d'où $\mathfrak{F}(f_s) \subseteq \mathfrak{F}_s \cap \mathcal{D}loc$.

Réciproquement, soit $S/K \in \mathfrak{F}_s \cap \mathcal{D}loc$. Montrons que S/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe. Il faut montrer que, si L/M est une section S/K-d_{loc}-minimale de S, alors L/M est une f_s-section. Comme S/K est hypercyclique (corollaire 7.12), on peut supposer L/M ∞-section. Alors $(L \cap S^+K)/(M \cap S^+K) (\cong L/M)$ est une section S/K-d_{loc}-minimale de S^+K. La proposition 7.16 dit que $(L \cap S^+K)/(M \cap S^+K)$ est une f_s-section, donc L/M est aussi une f_s-section. Ceci prouve que S/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe, ce qui permet de conclure. $\square$

Fait 7.22. – **([29], 12.1.6 p.346, Mal'cev, McLain)** *Un facteur chef d'un groupe localement nilpotent G est central.*

Théorème 7.23. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G. Alors les $(\mathfrak{F}(f_s), \pi)$-projecteurs de H/K sont exactement les $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteurs de H/K. De plus, on a $\mathfrak{F}(f_s) = \mathfrak{F}^*(f_s)$, en particulier H/K possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteurs.*

Preuve. – Soient F/K un $(\mathfrak{F}(f_s), \pi)$-projecteur de H/K, $R/K \in \mathcal{D}loc$ un π-sous-groupe de H/K contenant F/K et $A/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe normal de R/K avec $R/A \in \mathfrak{F}_s$. La proposition 7.21 donne $R/A \in \mathfrak{F}(f_s)$ et on en déduit $R = FA$. On a montré que F/K est un $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteur de H/K.

Réciproquement, soient V/K un $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteur de H/K, $R/K \in \mathcal{D}loc$ un π-sous-groupe de H/K contenant F/K et $A/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe normal de R/K avec $R/A \in \mathfrak{F}(f_s)$. Comme R/A est localement superrésoluble d'après la proposition 7.21, V couvre R/A. Pour montrer que V/K est un $(\mathfrak{F}(f_s), \pi)$-projecteur de H/K, il reste à montrer que V/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe. Le fait 2.53 dit que $d_{loc}(V)/K$ est un π-groupe et la proposition 7.16 dit que $d_{loc}(V)/K$ est localement superrésoluble. Donc V est localement clos. La proposition 7.21 dit que V/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe.

Montrons que $\mathfrak{F}(f_s) = \mathfrak{F}^*(f_s)$. D'après la remarque 5.3, il suffit de montrer $\mathfrak{F}^*(f_s) \subseteq \mathfrak{F}(f_s)$. On va montrer que tout $\mathfrak{F}^*(f_s)$-groupe vérifie les hypothèses du théorème 5.11. Soient $H/K \in \mathfrak{F}^*(f_s)$, $p \in \mathcal{P}$ et U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K avec $A_H(U/V) \in f_s(\infty)$. Si $p \neq 2$, on a $f_s(\infty) \subseteq f_s(p)$ et on obtient $A_H(U/V) \in f_s(p)$. Sinon, $\overline{A} = U/V \rtimes A_H(U/V)$ est un 2-groupe. Donc $\overline{A}$ est localement nilpotent. Comme U/V est à la fois localement fini et H/K-d_{loc}-minimal, U/V est un sous-groupe minimal normal de H/V. Alors U/V est minimal normal dans $\overline{A}$ et le fait 7.22 dit que $\overline{A}$ centralise U/V, d'où $A_H(U/V) = 1 \in f_s(2)$. Le théorème 5.11 dit que H/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe. On en déduit $\mathfrak{F}^*(f_s) \subseteq \mathfrak{F}(f_s)$.

Le théorème 6.14 permet de conclure. $\square$

W. Gaschütz a montré que, pour tout groupe fini et résoluble G, les projecteurs superrésolubles de G sont exactement les $\mathfrak{F}_s$-sous-groupes E de G tels que, pour toute pair (U, V) de sous-groupes de G avec $E \leq U < V$, $|V : U|$ n'est pas premier ([16]).

Comme le montre l'exemple 7.24, les $(\mathfrak{F}_s, \mathcal{P}^+)$-projecteurs des groupes de rang de Morley fini résolubles ne peuvent être caractérisés de la même façon.

Exemple 7.24. – Considérons $\mathbb{C}_+ \rtimes \mathbb{C}^*$ où $\mathbb{C}^*$ agit linéairement sur $\mathbb{C}_+$. Si u désigne un élément d'ordre 4 de $\mathbb{C}^*$ et si on note $G = \mathbb{C}_+ \rtimes \langle u \rangle$, alors les $(\mathfrak{F}_s, \mathcal{P}^+)$-projecteurs de G sont exactement les conjugués de $\langle u \rangle$. Pourtant, il existe une pair (U, V) de sous-groupes de G avec $\langle u \rangle < U < V$ et $|V : U| = 2$. En effet, si on choisit $x \in \mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$ et si on note X la clôture normale de x dans G et Y le sous-groupe engendré par les carrées de X, alors $X/Y \rtimes \langle u \rangle$ est un 2-groupe. On peut choisir $\overline{y} \in C_{X/Y}(u) \setminus \{1\}$. En prenant $U = Y\langle u \rangle$ et $V = U\langle y \rangle$, on obtient bien $|V : U| = 2$.

8 Remerciement

Je remercie beaucoup Tuna Altınel pour les multiples lectures qu'il a fait de ce travail et pour tous les conseils qu'il m'a donné.

Références

[1] T. Altinel, G. Cherlin, L.-J. Corredor, A. Nesin. *A Hall theorem for ω-stable groups.* J. London Math. Soc (2) 57 (1998) 385-397.

[2] C. Altseimer et A. Berkman. *On Quasi- and Pseudounipotent Groups of finite Morley rank.* Preprint.

[3] R. Baer. *Supersoluble groups.* Proc. Amer. Math. Coc. 6, 16-32 (1955).

[4] O.V. Belegradek. *On groups of finite Morley rank.* in Abstracts of the Eighth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, LMPS'87, Moscow, USSR, 17-22 August 1987, 100-102.

[5] A.V. Borovik et A. Nesin. *Groups of Finite Morley Rank.* Oxford University Press, 1994.

[6] A.V. Borovik et A. Nesin. *On the Schur-Zassenhaus theorem for groups of finite Morley rank.* J. Symb. Logic 57(1992) 1469-1477.

[7] A.V. BOROVIK ET A. NESIN. *Schur-Zassenhaus theorem revisited.* J. Symb. Logic 59(1994) 283-291.

[8] A.V. BOROVIK ET B. POIZAT. *Tores et p-groupes.* J. Symb. Logic 55(1990) 565-583.

[9] R. BRYANT ET B. HARTLEY. *Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralizers.* J. Algebra 61(1979) 328-334.

[10] M. DIXON *Formation theory in locally finite groups satisfying* min-p *for all primes* p. J. Algebra 76 (1982), no. 1, 192–204.

[11] K. DOERK ET T. HAWKES. *Finite soluble groups.* de Gruyter Expositions in Mathematics, 4. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1992. xiv+891 pp.

[12] O. FRÉCON. *Propriétés locales et sous-groupes de Carter dans les groupes de rang de Morley fini.* Soumis pour publication.

[13] O. FRÉCON. *Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles.* A paraître.

[14] O. FRÉCON. *Sous-groupes de Hall généralisés dans les groupes résolubles de rang de Morley fini .* Soumis pour publication.

[15] A.D. GARDINER, B. HARTLEY ET M.J. TOMKINSON. *Saturated Formations and Sylow Structure in Locally Finite Groups.* J. Algebra 17(1971) 177-211.

[16] W. GASCHÜTZ. *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen.* Math. Z. 80(1963), 300-305.

[17] B. HARTLEY. *Sylow theory in locally finite groups.* Compositio Math., 25(1972) 263-280.

[18] A. A. KLIMOVICZ. *Formation theory in locally finite groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 30 (1975), 257-286.

[19] D.H. MCLAIN. *On locally nilpotent groups.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956), 5-11.

[20] A. NESIN. *Generalized Fitting subgroups of a group of finite Morley rank.* J. Symb. Logic 56(1991) 1391-1399.

[21] A. NESIN. *On solvable groups of finite Morley rank.* Trans. Amer. Math. Soc. 321(1990) 659-690.

[22] A. NESIN. *Poly-separated and ω-stable nilpotent groups.* J. Symb. Logic 56(1991) 694-699.

[23] M. L. NEWELL. *Homomorphs and formats in polycyclic groups.* J. London Math. Soc. (2) 7 (1973), 317-327.

[24] M. L. NEWELL. *The nilpotent-by-finite projectors of polycyclic groups.* J. London Math. Soc. (2) 7 (1973), 540-546.

[25] T.A. PENG. *Finite soluble groups with an Engel condition.* J. Algebra 11(1969) 319-330.

[26] T.A. PENG. *On groups with nilpotent derived groups.* Arch. Math. (Basel) 20(1969) 251-253.

[27] B. POIZAT. *Groupes stables.* Nur Al-mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, France, 1987.

[28] B. POIZAT. *L'égalité au cube.* Soumis pour publication.

[29] D.J.S. ROBINSON. *A course in the theory of groups.* Springer-Verlag, 1993.

[30] S.E. STONEHEWER. *Formations and a class of locally soluble groups.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 1966 613–635.

[31] M.J. Tomkinson. *Formations of locally soluble FC-groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 19 1969 675–708.

[32] Frank O. Wagner. *Fields of finite Morley Rank.* Journal of Symbolic Logic, à paraître (1999).

[33] Frank O. Wagner. *Nilpotent complements and Carter subgroups in stable $\mathfrak{R}$-groups.* Archive for Mathematical Logic, 33:23-34, 1994.

[34] B.A.F. Wehrfritz. *Infinite linear groups.* Ergebnisse der Matematik und ihrer Grenzgebiete, Band 76. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. xiv+229 pp.

[35] B.A.F Wehrfritz. *Soluble periodic linear groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 18 1968 141–157.

[36] B.A.F. Wehrfritz. *Supersoluble and locally supersoluble linear groups.* J. Algebra 17, 41-58 (1971).

[37] B.I. Zil'ber. *Groups and rings whose theory is categorical.* Fund. Math. 55(1977)173-188.