Complément : les anneaux noethériens

1 Quelques mots sur Emmy Noether

Emmy Noether (1882-1935) était une mathématicienne allemande connue pour ses contributions essentielles à l'algèbre, notamment à la théorie des anneaux, et à la physique théorique. En raison de la place des femmes à cette époque dans la société, ses études et sa carrière ont été extrêmement compliquées, et elle a dû combattre la misogynie durant toute sa vie.

Elle a intégré l'université d'Erlangen (Allemagne) en 1900, elles étaient seulement deux femmes parmi 956 étudiant·e·s et elles devaient demander à chaque professeur son autorisation personnelle pour suivre ses cours. Elle a soutenu une thèse d'algèbre en 1907 puis a enseigné durant sept ans à l'université d'Erlangen, bénévolement et sous le nom de son père, qui était professeur à l'université.

En 1915, elle a rejoint l'université de Göttingen (Allemagne), mais malgré les soutiens appuyés de David Hilbert et de Félix Klein, elle n'a pas pu obtenir de poste officiel et travaillait sans rémunération : elle s'en sortait grâce à l'aide de sa famille. De plus, durant les première années elle devait donner ses cours sous le nom de David Hilbert car la faculté de philosophie était très opposée à ce qu'une femme soit nommée professeure ("Que penseront nos soldats, quand ils reviendront à l'université et verront qu'ils doivent apprendre aux pieds d'une femme ?"). Cette attitude indignait profondément Hilbert.

En 1915, elle a démontré un théorème en physique, qui est fondamental pour la physique mathématique, et qui a même été qualifié de "monument de la pensée mathématiques" par Albert Einstein.

Il y avait un contraste extrême entre ses multiples résultats scientifiques dans des domaines variés, ses approches particulièrement novatrices des problèmes, et sa situation académique : c'est seulement en 1919 qu'elle a obtenu l'autorisation d'enseigner à l'université de Göttingen, et il ne s'agissait même pas d'un poste fixe, seulement d'une autorisation à enseigner bénévolement. Elle a encore dû travailler plusieurs années sans salaire, continuant donc à dépendre financièrement de sa famille.

En 1921, elle a publié un article concernant la "théorie des idéaux dans les anneaux", qui a eu une influence majeure sur le développement de la théorie des anneaux en raison de sa généralité, sa simplicité et son efficacité. En effet, elle posait dans cet article les fondations de la théorie abstraite des anneaux et de leurs idéaux : auparavant les anneaux étaient surtout étudiés séparément ; la théorie abstraite générale est principalement due à Emmy Noether.

C'est en 1923, après plusieurs interventions d'Albert Einstein, qu'elle a enfin obtenu un poste, du plus bas niveau existant et qu'elle a reçu son premier salaire.

Ensuite elle a publié plusieurs autres articles fondamentaux traitant des anneaux et encore bien d'autres concernant, plus généralement, l'algèbre théorique. Ses nombreux travaux ont eu une très forte influence sur le développement de plusieurs branches de l'algèbre, dont la théorie des représentations (en théorie des groupes) et la topologie algébrique.

À partir de 1911, elle a dirigé une quinzaine de thèse, dont celles de mathématicien·ne·s célèbres comme Grete Hermann (une femme dont la thèse a posé les fondations du *calcul formel*, un domaine à l'interface des mathématiques et de l'informatique), Hans Fitting (théoricien des groupes) ou Ernst Witt (algébriste).

En raison de ses origines juives, elle a été congédiée de son université en 1933 à la suite de l'élection d'Adolf Hitler, et des étudiants l'ont faite évincer de son logement. La situation étant devenue trop dangereuse, elle a rejoint les États-Unis cette même année. Comme beaucoup d'autres scientifiques fuyaient également l'Allemagne pour les États-Unis, l'obtention d'un poste n'était pas évidente. Malgré l'influence de ses recherches, qui faisaient d'elle l'une des personnes les plus importantes parmi les mathématicien·ne·s, et les appuis d'Albert Einstein et de nombreux mathématiciens, elle n'a obtenu qu'une invitation d'un an en Pennsylvanie qui sera ensuite renouvelée. Elle est décédée en 1935 lors d'une opération bénigne.

Après sa mort, Albert Einstein a écrit une lettre élogieuse sur Emmy Noether qui a été publiée au *New-York Times* en mai 1935. En son honneur, un cratère de la Lune et un astréroïde portent son nom.

C'est Emmy Noether qui a défini les anneaux noethériens ci-dessous, son travail sur ces anneaux, et sur les anneaux en générales, va infiniment plus loin que les deux pages qui suivent (d'autant plus que le théorème ci-dessous est dû à Hilbert, c'est le résultat sur ces anneaux le plus lié au programme du cours). Le fait que ces anneaux portent son nom était l'occasion de dire quelques mots à son sujet, ainsi que sur le fait qu'il y ait si peu de scientifiques femmes célèbres (consulter le site femmes-et-maths.fr pour des portraits de mathématiciennes contemporaines).

2 Anneaux noethériens

On fixe désormais un anneau commutatif A.
Les *anneaux noethériens* sont définis comme des anneaux non nécessairement commutatifs, et leur définition nécessite d'introduire les *idéaux à gauche* et *à droite*. Cependant, le contexte qui nous intéresse étant celui des anneaux commutatifs, nous nous restreindrons à ces anneaux-ci.

Définition 2.1 –
- *Un idéal I de A est dit être* de type fini *(ou* finiment engendré*) s'il existe une partie finie X de A telle que $I = (X)$.*
- *L'anneau A est dit* noethérien *si tous ses idéaux sont* de type fini*.*

Remarque 2.2 –
- Les anneaux principaux sont noethériens.
- Un anneau noethérien n'est pas supposé être intègre.
- Tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien.

Le résultat ci-dessous est indispensable pour la suite. Notons que sa démonstration utilise l'axiome du choix dépendant : l'étude des anneaux noethériens nécessite cet axiome.

Proposition 2.3 – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) *A est noethérien ;*
(2) *toute suite croissante (*pour l'inclusion*) d'idéaux de A est stationnaire ;*
(3) *toute famille non vide d'idéaux de A a un élément maximal (*pour l'inclusion*).*

Démonstration – Si A est noethérien et si $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'idéaux de A, alors l'union $J = \cup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ est également un idéal de A. Comme A est noethérien, il y a un ensemble fini X d'éléments de A tel que $J = (X)$. Or les éléments de X appartiennent tous à des éléments de la suite $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et comme la suite est croissante, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que I_j contient X. On en déduit que $I_i = I_j$ pour tout $i \geqslant j$, la suite est donc stationnaire et (1) implique (2).

Si A a une famille non vide $\Im$ d'idéaux de A n'ayant aucun élément maximal, alors pour tout $I \in \Im$, il existe $J \in \Im$ tel que $I \subsetneq J$. **D'après l'axiome du choix dépendant**, il existe une suite $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\Im$ telle qu'on ait $I_i \subsetneq I_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ainsi, il y a une suite croissante d'idéaux de A qui n'est pas stationnaire et (2) implique (3).

Si toute famille non vide d'idéaux de A a un élément maximal, alors pour tout idéal I de A, la famille des idéaux de type fini contenus dans I a un élément maximal J. Si on a $J \neq I$, il existe $x \in I \setminus J$, mais l'idéal $(x) + J$ contient strictement J, est de type fini et est contenu dans I, ce qui contredit la maximalité de J. On en déduit que $I = J$ est de type fini, et (3) implique (1). □

Corollaire 2.4 – *Dans un anneau noethérien intègre, tout élément non nul se décompose en un produit d'un élément inversible u par un produit d'éléments irréductibles $p_1, \ldots, p_r$.*

Démonstration – Soit A un anneau noethérien intègre. Soit X l'ensemble des éléments de A^* n'admettant pas de décomposition de cette forme. Si X est non vide, alors d'après la proposition 2.3, l'ensemble $\mathfrak{I}$ des idéaux de la forme (x) pour $x \in X$ a un élément maximal (a) pour $a \in X$. En particulier, a n'est ni inversible, ni irréductible, donc $a = uv$ pour deux éléments non inversibles u et v. Si u appartient à X, alors par maximalité de (a) et comme u divise a, on a $(u) = (a)$ et a divise u. Comme A est intègre, cela implique que v est inversible, ce qui contredit le choix de v. On en déduit que u n'appartient pas à X et, de même, v n'appartient pas à X. Ainsi u et v admettent une décomposition de la forme voulue, donc $a = uv$ en admet aussi une, ce qui contredit le choix de a. $\square$

Corollaire 2.5 – *Si A est un anneau noethérien intègre dans lequel tous les éléments irréductibles sont premiers, alors A est un anneau factoriel.*

Démonstration – Ce résultat découle de la proposition suivant la définition d'un anneau factoriel et du corollaire 2.4 $\square$

Corollaire 2.6 – *Tout anneau qui est à la fois noethérien et à $PGCD$ est factoriel.*

Démonstration – Un anneau à $PGCD$ est intègre par définition. Or on a vu que, dans tout anneau à $PGCD$, les éléments irréductibles sont premiers, donc si un tel anneau est noethérien, il est factoriel d'après le corollaire 2.5. $\square$

Théorème 2.7 – **(théorème de la base de Hilbert)** *Si A est un anneau noethérien, l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$ est aussi noethérien.*

Démonstration – Comme les anneaux $A[X_1, \dots, X_i][X_{i+1}]$ et $A[X_1, \dots, X_i, X_{i+1}]$ sont isomorphes pour tout $i \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que $A[X]$ est nothérien. Soit I un idéal de $A[X]$. On doit montrer que I est de type fini. On peut supposer que I est non nul.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note J_n l'ensemble formé de 0_A et des coefficients dominants des éléments de I de degré n. Soient $(x, y) \in J_n^2$ et $a \in A$. Montrons que $x + y \in J_n$ et que $ax \in J_n$. On peut supposer x, y, $x + y$ et ax non nuls. Il existe donc des polynômes P et Q dans I tels que $P = a_n X^m n + \cdots + a_0 \in I$ avec $a_n = x$ et $Q = b_n X^n + \cdots + b_0$ avec $b_n = y$. On a donc $P + Q = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i$, et comme on a $a_n + b_n = x + y \neq 0_A$, le coefficient dominant de $P + Q$ est $a_n + b_n = x + y$. Ainsi $x + y$ appartient à J_n. Aussi, le polynôme $aP = (a1)P$ est un polynôme de I de degré n, et son coefficient dominant est $aa_n = ax$, donc on a $ax \in J_n$. Ceci montre que J_n est un idéal de A.

Aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J_n$ non nul, il existe $P \in I$ de degré n et de coefficient dominant x. Alors XP est un polynôme de I de degré $n + 1$ et de coefficient dominant x, donc on a $x \in J_{n+1}$. Ainsi la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et, d'après la proposition 2.3, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J_n \subseteq J_N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme A est noethérien, chaque idéal J_i pour $i \in \mathbb{N}$ est de type fini, et il existe un ensemble fini X_i formé d'éléments non nuls de A tel que $J_i = (X_i)$. On associe à chaque $x \in X_i$ un polynôme $P_x \in I$ de degré i ayant x pour coefficient dominant. Soit Y l'ensemble des polynômes de la forme P_x pour $x \in X_j$ avec $j \geqslant N$. Alors Y est une famille finie de polynômes de I.

Montrons que $I = (Y)$. Si ce n'est pas le cas, il existe $P \in I \setminus (Y)$ qu'on peut choisir de degré minimal d. Nécessairement P est non nul, on note a_d son coefficient dominant. On a $a_d \in J_d$ et, si on note $m = \min(d, N)$, on a $a_d \in J_m = (X_m)$. Il existe alors des polynômes $P_1, \dots, P_k$ de Y de degré m avec pour coefficients dominant $x_1, \dots, x_k$, et des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de A tels que $a_d = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$. Alors $Q = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_k P_k$ est un polynôme de degré m, appartenant à (Y) et ayant pour coefficient dominant a_d. Ainsi $P - X^{d-m} Q \in I$ est de degré strictement inférieur à d, et par minimalité de d, on a $P - X^{d-m} Q \in (Y)$. Comme Q appartient à (Y), on en déuit que P appartient à (Y), ce qui contredit la minimalité de d et démontre que $I = (Y)$. $\square$

Exemples 2.8 – Tous les anneaux de la forme $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, et $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ pour un corps commutatif $\mathbb{K}$, sont à la fois factoriels et noethériens.

Corollaire 2.9 – *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, les anneaux $\mathbb{Z}[\alpha]$ et $\mathbb{Q}[\alpha]$ sont noethériens. Un tel anneau est factoriel si et seulement si ses éléments irréductibles sont premiers.*

Démonstration – Pour tout sous-anneau A de $\mathbb{C}$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'application $\mathrm{ev}_\alpha : A[X] \to \mathbb{C}$ définie par $\mathrm{ev}_\alpha(P) = P(\alpha)$ est un morphisme d'anneaux, et son image est le sous-anneau $A[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in A[X]\}$ de $\mathbb{C}$.

Ainsi, si on note I le noyau de ev_α, alors d'après le théorème d'isomorphisme, les anneaux $A[X]/I$ et $A[\alpha]$ sont isomorphes. Or, si A est noethérien, l'anneau $A[X]$ est nothérien d'après le théorème de la base de Hilbert, donc $A[\alpha] \simeq A[X]/I$ est noethérien (remarque 2.2).

Comme $\mathbb{Z}$ est un anneau principal et $\mathbb{Q}$ un corps, ce sont des anneaux noethériens d'après la remarque 2.2, d'où la première partie du corollaire. La seconde partie suit du corollaire 2.5. $\square$

Ce résultat explique pourquoi il est difficile de trouver un anneau à *PGCD* qui n'est pas factoriel.