Université de Poitiers, Année 2023-2024

3^{e} année de Licence de Mathématiques, Anneaux

Contrôle continu , le mercredi 6 mars 2024, 9h30-11h30

Questions de cours (5 points)

Soit A un anneau commutatif.

1. Donner la définition d'un polynôme sur A.
2. On considère la suite $X = (\delta_{1i})_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Démontrer par récurrence sur n que $X^n = (\delta_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que, si I est un idéal premier de A, alors A/I est un anneau intègre.

Exercices

Exercice 1 – exercice sur les *Entiers de Gauss* issu du TD (7 points)
On désigne par $\mathbb{Z}[i]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par le nombre complexe i.

1. Montrer que l'ensemble $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. En déduire que les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ sont ceux de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
3. Trouver tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
4. Prouver que $z \mapsto \bar{z}$ (conjugaison complexe) est un automorphisme de $\mathbb{Z}[i]$.
5. D'une manière générale, quelles sont potentiellement les images de i par un automorphisme quelconque de $\mathbb{Z}[i]$?
6. En déduire tous les automorphismes de $\mathbb{Z}[i]$.

   Soit I un idéal non nul de $\mathbb{Z}[i]$. Comme tous les éléments $z \in \mathbb{Z}[i]$ sont des nombres complexes, on peut parler de leur module $|z|$, plus précisément de $|z|^2 \in \mathbb{N}$.

   On pose $M = \left\{ \, |z|^2 \; ; \; z \in I \setminus \{0\} \right\}$.
7. Pourquoi M possède un plus petit élément ? Soit $i_0 \in I \setminus \{0\}$ tel que $|i_0|^2$ est le plus petit élément de M.
8. Soit $x \in I$. Grâce à un graphique, expliquer qu'il existe un élément $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que
$$\left| z - \frac{x}{i_0} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$
9. De la définition de i_0, déduire l'égalité $x = zi_0$.
10. Conclure que tout idéal de $\mathbb{Z}[i]$ est principal.

Exercice 2 (4,5 points)
Un *anneau local* est un anneau commutatif qui n'a qu'un seul idéal maximal.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est local si et seulement si m est de la forme $m = p^n$ pour un nombre premier p et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit A un anneau commutatif. Démontrer que ses éléments non inversibles sont ceux qui appartiennent à un idéal maximal de A.

3. En déduire qu'un anneau commutatif est local si et seulement si l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal.

Exercice 3 (3,5 points)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'anneau $\mathscr{M}_n(K)$ des matrices carrées à coefficients dans K, où K désigne un corps commutatif. Pour tous entiers i et j compris entre 1 et n, on note E_{ij} la matrice, dite *élémentaire*, ayant tous ses coefficients nuls, sauf celui de la i^{e} ligne et j^{e} colonne qui vaut 1.

1. Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(K)$. Calculer $E_{ij}ME_{kl}$ où $1 \leq i, j, k, l \leq n$.

2. Montrer que, si $M \in \mathscr{M}_n(K)$ est une matrice non nulle, alors pour tous i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, il existe des matrices A et B de $\mathscr{M}_n(K)$ telles que $E_{ij} = AMB$.

3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice non nulle. Montrer que, pour tout $N \in \mathscr{M}_n(K)$, il existe des matrices $(P_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $(Q_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathscr{M}_n(K)$ telles que $N = \sum_{1 \leq i,j \leq n} P_{ij}MQ_{ij}$.

4. En déduire que les seuls idéaux de $\mathscr{M}_n(K)$ sont l'idéal nul et $\mathscr{M}_n(K)$.

5. Si on remplace K par $\mathbb{Z}$, le résultat ci-dessus devient faux. Sans justification, décrire un idéal propre et non nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

6. Que peut-on dire d'un anneau *commutatif* A ayant pour seuls idéaux l'idéal nul et A ?