Université de Poitiers, Année 2022-2023

3$^{\text{e}}$ année de Licence de Mathématiques, Anneaux

Contrôle continu , le mercredi 22 février 2023, 8h15-10h15

Questions de cours (5 points)

1. Donner la définition de la caractéristique d'un anneau.
2. Soient A un anneau et $f : \mathbb{Z} \to A$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{Z}$ par $f(x) = x1_A$. Démontrer que f est un morphisme d'anneaux. Quel est son noyau ?
3. Donner la définition d'un élément premier d'un anneau commutatif.
4. Démontrer qu'un élément non nul x d'un anneau commutatif A est premier si et seulement si l'idéal (x) est premier.

Exercices

Exercice 1 (5 points)

Soit E un ensemble fixé. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On muni l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des lois de composition internes Δ et $\cap$, où Δ désigne la *différence symétrique*. Le but de l'exercice est de montrer que le triplet $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.

1. Montrer que la loi Δ est associative.

   [*Indication : on pourra utiliser une table de vérité.*]
2. Montrer que le couple $(\mathscr{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.
3. Montrer que la loi $\cap$ est distributive par rapport à la loi Δ.

   [*Indication : on pourra aussi utiliser une table de vérité.*]
4. Démontrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.

Exercice 2 (5 points)

On considère les ensembles

$$A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\ ;\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\ ;\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

1. Justifier que tout élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ s'écrit d'une unique façon sous la forme $a+b\sqrt{2}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.
2. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. En déduire que A est un anneau intègre.
3. Montrer que 7 n'est pas un élément premier de A.

   [*Indication :* $-14 = (2 + 3\sqrt{2})(2 - 3\sqrt{2})$.]
4. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.
5. Justifier que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est isomorphe au corps des fractions de A.

Exercice 3 (5 points)

Soit $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'anneau des suites de nombres réels où la somme et le produit de toutes suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont définis par :

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \times (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i y_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

1. Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathfrak{M}_k = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A \mid x_k = 0\}$ est un idéal de A, puis qu'il s'agit d'un idéal *maximal* de A (⚠ *la maximalité est difficile à démontrer*).
2. Soit I l'ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. *On admet que I est un idéal de A.* Pourquoi l'idéal I n'est-il pas premier ?
3. Montrer qu'il existe un idéal maximal de A qui n'est pas de la forme $\mathfrak{M}_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.