**Université de Poitiers**
**Mathématiques** **2009-2010**
**MATH 2L03, Analyse élémentaire**

# Contrôle continu d'Analyse élémentaire du 25 Fevrier 2010

Durée : 2 heures

**Calculatrices et documents interdits**

Les quatre parties sont indépendantes.

Barème indicatif : A : 4 points, B : 7 points, C : 5 points, D : 4 points

*Qualité de rédaction et rigueur de raisonnement seront des éléments majeurs d'appréciation des copies. Les énoncés des résultats de cours, utilisés au cours de l'épreuve, doivent être rappelés.*

**A. Question de cours.** *Suites convergentes.*

1. Donner la définition d'une suite convergente.
2. Démonstration de l'unicité de la limite.

**B.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

1. (a) Montrer que $(u_n)$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $n! \geq 2^{n-1}$. En déduire que $(u_n)$ est majorée.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On admettera que sa limite est $e$.
2. (a) Montrer que les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes
   (b) En déduire que $e$ est irrationnel.

**C.** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est définie et qu'on a pour tout entier $n$, $u_n \geq 0$.
2. Déterminer l'unique limite possible de la suite $(u_n)$.
3. Montrer que pour tout entier $n$, on a :
$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{3} \cdot |u_n - 3|$$
4. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**D.** a) Montrer l'existence et calculer les bornes supérieures des ensembles suivants

$$A = \left\{1 - \frac{1}{2^n} \ , \ n \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad B = \left\{r \in \mathbb{Q} \ / \ r < \sqrt{2}\right\}$$

b) Calculer la limite de la suite suivante : $u_n = \dfrac{n\cos(2n) + 2n^2}{3n(n+1) + \ln n}$

– Fin du sujet –