Université de Poitiers
Mathématiques **2009-2010**
MATH 2L03, Analyse élémentaire

Examen de 2e session, 15 juin 2010
Durée : 3 heures

Calculatrices et documents interdits

Barème indicatif : A : 4,5 points, B : 2,5 points, C : 4 points, D : 4 points, E : 5 points.

A. Caluler les limites des suites suivantes

$$a)\quad u_n = \frac{3n+\cos n}{\ln n + 2n} \qquad b)\quad v_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \qquad c)\quad w_n = 2^n \ln(1+\frac{1}{2^n})$$

B. Soit f une application continue définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x de $\mathbb{R}$ la relation :

$$(f(x))^2 = 2 + f(x)$$

Quelles sont les valeurs possibles de $f(x)$? En déduire que f est une application constante.

C. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$

1. Montrer que la suite (u_n) est définie et qu'on a pour tout entier n, $u_n \geq 0$.
2. Si (u_n) converge qu'elle est sa limite ?
3. Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. Montrer qu'elle est décroissante et conclure sur sa convergence.

D. 1. Pour quelles valeurs du paramètre m l'application définie sur $]-\pi,+\pi[$ par :

$$f(x) \;=\; \frac{\sin(x+4x^2)}{\sin x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad , \quad f(0) \;= m.$$

est-elle continue ?

2. Calculer la limite quand x tend vers 0 de $\varphi(x) = \dfrac{\sin(x+4x^2)-\sin x}{x^2}$.

Indication : on pourra untiliser la relation $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

3. Déduire de ce qui précède que si $m = 1$, la fonction f est dérivable en 0, et préciser la valeur de $f'(0)$.

E. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités : $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

(On pourra appliquer le théorème des Accroissements Finis à la fonction logarithme népérien.)

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$, $u_n = S_n - \ln(n+1)$, $v_n = S_n - ln(n)$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. on note c leur limite.

b) En déduire l'existence d'une suite (ε_n) convergente de limite 0, telle qu'on ait :

$$S_n = \ln(n) + c + \varepsilon_n$$

c) En déduire les limites des suites : (S_n) , $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{S_n}{\ln(n)}\right)$.