**MATH 2L03.**

# Corrigé du devoir maison

*Avril 2009*

---

**Exercice 1.**

Dans cet exercice on n'exige aucune méthode, tous les raisonnements corrects sont accépter : récurrence , utlisation des variations de $f$..

$x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{x^2+2}{2x}$ , $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{x^2-2}{2x^2}$.

• $x_n > 0$ pour tout $n$ ( il est toujours intéressant de connaitre le signe de $x_n$ , une simple récurrence suffit )

• Limite éventuelle de $(x_n)$ : $f$ est continue , si $(x_n)$ converge vers $l$ alors $f(l) = l$ ; ce qui donne

$$\frac{l^2+2}{2l} = l \Longleftrightarrow l^2 = 2$$

Dont les solutions sont $\pm\sqrt{2}$. Or $x_n > 0$ donc sa seule limite possible est $l = \sqrt{2}$.

• $f$ est strictement croissante sur $]\sqrt{2}, +\infty[$ ceci entraine que la suite $(x_n)$ est monotone.

**1.** On montre par récurrence que $x_n$ est définie et $x_n > \sqrt{2}$

L'hypothèse est vraie pour $n = 0$ : $x_0 = 2 > \sqrt{2}$.

On suppose que les termes de la suite existent jusqu'au rang $n$ et que $x_n > \sqrt{2}$. La fonction $f$ est strictement croissante sur $]\sqrt{2}, +\infty[$ donc $f(x_n) > f(\sqrt{2})$ ce qui équivaut à $x_{n+1} > \sqrt{2}$. D'où la conclusion par récurrence.

**Autre méthode :** *on a :* $x_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(\sqrt{2} - x_n\right)^2}{2x_n}$ *. Il faut montrer alors, que* $x_n > 0$ *, ce qui nous donne* $x_n - \sqrt{2} > 0$ *pour tout* $n \geq 1$ *. Par ailleurs* $x_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} > 0$ *, donc* $x_n - \sqrt{2} > 0$ *pour tout entier* $n$*.*

**2.** $*$ $(x_n)$ est décroissante :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} > 0 \quad \text{d'après 1)}$$

**Autre méthode :** *on peut aussi le prouver par récurrence :*

• $x_0 - x_1 = 2 - 3/2 < 0$ *, donc* $x_0 < x_1$.

• *Si, pour un entier* $n$ *on a* $x_{n-1} < x_n$ *alors* $f(x_{n-1}) < f(x_n)$ *ce qui équivaut à* $x_n < x_{n+1}$ *car* $f$ *est strictement croissante sur* $[\sqrt{2}, +\infty[$.

$*$ $(x_n)$ est minorée : $x_n > \sqrt{2}$ d'après 1)

Donc $(x_n)$ est convergente et on a $\lim x_n = \sqrt{2}$ , d'après la remarque faite au début *(* $f(l) = l$ *car* $f$ *continue ...)*

**3.** On a

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{\left(\sqrt{2} - x_n\right)^2}{2x_n} \\ &\leq \frac{\left(\sqrt{2} - x_n\right)^2}{2\sqrt{2}} \text{ car } \sqrt{2} \leq x_n \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que

$$x_n - \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n}$$

Pour $n = 0$, on a : $2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^0} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = 2 - \sqrt{2} = x_0 - \sqrt{2}$ , inégalité vraie au rang 0, Supposons cette inégalité vraie au rang $n$, alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-\sqrt{2} &\leq \frac{\left(\sqrt{2}-x_n\right)^2}{2\sqrt{2}} \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n}\right]^2 \\
&= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n\times 2} \\
&= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

L'inégalité est donc vraie au rang $n+1$. Il en résulte qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

On peut écrire : $\sqrt{2} < 2$ et $\sqrt{2}-1 < 1/2$ on obtient

$$x_n - \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n} \leq 4\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = 4^{1-2^n}$$

**4.** On obtient : $x_1 = 3/2$ , $x_2 = 17/12$. Or $0 \leq x_2 - \sqrt{2} \leq 4^{1-2^2} = \dfrac{1}{64} < 2.10^{-2}$ ( $210^{-2} = 50 > 64$)
Donc $x_2$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à $2.10^{-2}$ près.

---

**Exercice 2.**
1. Existence. Considérons la fonction $g$ définie par $g(x) = f(x) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ . Alors
- $g$ est continue sur $[0,1]$,
- $g(0) = f(0) - 1 \leq 0$ et $g(1) = f(1) \geq 0$ ( car $0 \leq f(0) \leq 1$ et $0 \leq f(0) \leq 1$)

D'après le théorème des valeurs intérmédiaires, il existe $a \in [0,1]$ tel que $g(0) = 0$ ce qui équivaut à $f(a) = \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ .
2. Unicité.
- $f$ est strictement croissante sur $[0,1]$
- $x \to -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ car $\left[-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right]' = \dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) > 0$

car $0 \leq \dfrac{\pi}{2}x \leq \dfrac{\pi}{2}$

La fonction $g$ est strictement croissante sur $[0,1]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet au plus une solution.

---

**Exercice 3.**

1. (a) $f$ est continue en 0. On a : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ d'où $1 - x < f(x) \leq 1$ . On en déduit, par encadrement que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$

   (b) Si $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ alors $n \leq x < n+1$ d'où $f(x) = nx$ qui est continue sur $I_n$.

   (c) Si $x \in ]1, +\infty[$ alors $0 < \frac{1}{x} < 1$ , d'où $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et ensuite $f(x) = 0$

   (d) $f$ n'est pas continue en 1 : $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$ car : si $x > 1$ alors $x \in ]1, +\infty[$ .

   $f$ n'est pas continue en $\frac{1}{n}$ : $f(\frac{1}{n}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1:n^+} f(x) = \frac{n-1}{n}$ car dans ce cas $x \in ]\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$ et $f(x) = (n-1)x$ .

   (e) $f$ continue sur $\mathbb{R} - \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

   si $x \in ]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$ alors $f(x) = 4x$
   si $x \in ]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ alors $f(x) = 3x$
   si $x \in ]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ alors $f(x) = 2x$
   si $x \in ]\frac{1}{2}, 1]$ alors $f(x) = x$

si $x \in ]1, +\infty[$ alors $f(x) = 0$

---

**Exercice 4.**

- On a $2f(0) = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$.
- Récurrence :

La proposition est vraie si $n = 1$ : On a $f(2 \times \dfrac{x_0}{2}) + f(\dfrac{x_0}{2}) = 0$ , d'où $f(x_0) = (-1)^1 f(\dfrac{x_0}{2^1})$.

Supposons que cette proposition est vraie pour un entier $n \geq 1$. Nous avons d'après l'hypothèse de récurrence $f(x_0) = (-1)^n f(\dfrac{x_0}{2^n})$. Si on pose $y_0 = \dfrac{x_0}{2^n}$ on a $f(y_0) = -f(\dfrac{y_0}{2})$ . D'où $f(\frac{x_0}{2^n}) = -f(\frac{x_0}{2^{n+1}})$

Finalement $f(x_0) = (-1)^{n+1} f(\frac{x_0}{2^{n+1}})$. La proposition est vraie pour $n+1$. On en déduit par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$ et $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\dfrac{x_0}{2^n}) = f(0) = 0$. On en déduit que $f(x_0) = 0$.