Université de Poitiers Année 2008/2009
MATH 2L03 Analyse élémentaire

Devoir n° 1

A rendre avant le 20 mars 2009

Exercice 1. On considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$ par la relation :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, x_n est définie et on a $x_n \geq \sqrt{2}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}$$

et en déduire que

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n}$$

puis que

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq 4^{1-2^n}$$

4. Calculer x_2 et montrer que x_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 2.10^{-2} près.

La suite (x_n) est appelée suite de Hénon , mathématicien grec.

Exercice 2. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = \cos\frac{a\pi}{2}$.
2. On suppose de plus que f est strictement croissante sur $[0,1]$. Montrer que le réel a est unique.

Exercice 3. On considèe la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Etudier la continuité de f en 0.
   (b) Montrer que f est continue sur tout intervalle de la forme $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ où n est un entier ≥ 1.
   (c) Montrer que f est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
   (d) Etudier la continuité de f aux points $\frac{1}{n}$(on pourra distinguer les deux cas $n = 1$ et $n > 1$)
   (e) Conclusion.
2. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $]1/5, +\infty[$

Exercice 4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad , \quad f(2x) + f(x) \;=\; 0$$

1. -Calculer $f(0)$.
2. Soit x_0 un réel quelconque. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_0) = (-1)^n f(\frac{x_0}{2^n})$.
3. En déduire que f est nulle sur $\mathbb{R}$.