Analyse élémentaire Mercredi 14 mai, 8h30-11h30

Calculatrices et documents interdits. La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont des éléments importants d'appréciation des copies. Les exercices sont indépendants

Barême indicatif. Exo **1** : 5 pts. Exo **2** : 6 pts, Exo **3** : 2 pts , Exo **4** : 4 pts , Exo **5** : 4 pts

1. **Question de cours :** Montrer le théorème des valeurs intermédiaires, énoncé sous la forme suivante :

   Théorème. *Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) \leq 0$ et $f(1) \geq 0$. Alors il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$.*

2. **Dérivabilité.**
   (a) Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x^2})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Montrer que la fonction f est aussi dérivable en $x = 0$.
   (c) La fonction définie par $g(x) = (x+1)^2$ pour $x \geq 0$ et $g(x) = \cos(x)$ pour $x < 0$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
   (d) Donner sans justification un exemple de fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, qui est dérivable en tout point sauf en $x = 2$ et $x = -3$.
   (e) Établir le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $k(x) = \ln(1+x) - \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2}$. En déduire que la fonction $\frac{k(x)}{x^2}$ est dérivable en $x = 0$, et calculer $k'(0)$.

3. **Intervalles.** Déterminer (en justifiant la réponse) l'ensemble $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n^2}]$. Même question pour $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, e^{\frac{1}{n}}]$.

4. **Fonctions continues et dérivables.**
   (a) Montrer l'inégalité $\ln(3) \leq 2$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.
   (b) Montrer que l'équation
   $$\ln(1+x) = x^2 + \cos(\pi x)$$
   admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, 1[$ et une solution sur l'intervalle $]1, 2]$. (*Indication* : on pourra étudier le signe de $f(x) = \ln(1+x) - x^2 + \cos(\pi x)$ en $x = 0, 1, 2$.)
   (c) En déduire que l'équation
   $$\frac{1}{1+x} = 2x - \pi \sin(\pi x)$$
   admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, 2]$.

5. **Plus difficile.** Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie l'inégalité
   $$f(x) \geq x^2$$
   pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui vérifie $f(u_n) \leq 1 + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   (b) Montrer qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq 1$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.