Corrige du devoir maison 1

Exercice 1.
1.On a $|u_{n+1}| = \dfrac{|u_n|}{1+u_n^2} \leq |u_n|$. La suite $(|u_n|)$ est <u>décroissante et minorée</u> par 0, donc elle est convergente.
Pour obtenir sa limite l, on peut remarquer que $v_n = |u_n|$ vérifie $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n^2}$ d'où $l = \dfrac{l}{1+l^2}$ c.à.d $l = 0$. D'où $\lim |u_n| = 0$ et donc $\lim u_n = 0$.

2. Si $a = 1$ alors $u_2 = f(u_1) = f(f(u_0))$. On a $f(u_0) = f(1) = \dfrac{1}{2}$, d'où $u_2 = f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{5}$.

3. On a $f^2(0) = 0$ et $f^2(1) = \frac{2}{5}$ et $\sqrt{3}/6 \in]0, \frac{2}{5}[$.
La fonction $f^2 = f \circ f$ est continue sur $[0,1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0,1[$ tel que $u_2 = f^2(a) = \sqrt{3}/6$.

4. a) On montre par récurrence que pour tout n : $f(u_n) = f(a)$. , ou de manière directe : $f(u_{n+1} = f(u_n) = f(a)$.
Or $\lim u_n = 0$ et f est continue en 0 ; d'où $\lim f(u_n) = f(0)$. En passant à la limite dans la relation $f(u_n) = f(a)$ on obtient $f(a) = f(0)$.

b)La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$ égale à $f(0)$.

Exercice 2.
1. f est définie , continue et dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $f'(x) = \tan^2 x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
On en déduit que f est une bijection continue strictement croissante de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $J = f\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right) = [f(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)[= [0, +\infty[$.
(On pourra aussi étudier les variations de f)
<u>Conclusion :</u> f définie une bijection continue strictement croissante de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.

2. f est une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. $n \in [0, +\infty[$, il existe un unique $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(x_n) = n$ c .à.d $\tan x_n - x_n = n$.

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = \dfrac{\pi}{2}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui est equivaut à $\lim x_n = +\infty$.

Exercice 3.
1. $\dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1$.
Cette limite est égale à $f(0)$, donc f est continue en 0.

2. On pose $g(x) = 2(e^x - 1 - \ln(1+x)) + (x^2 - 2x)(e^x - 1)$.

a) $g'(x) = 2e^x - \frac{2}{1+x} + (2x-2)(e^x - 1) + (x^2 - 2x)e^x = x^2 e^x - \frac{2}{1+x} - 2(x-1)$.
D'où $(x+1)g'(x) = x^2(x+1)e^x - 2 - 2(x^2-1) = x^2((x+1)e^x - 2)$.

On a donc le résultat avec $h(x) = (x+1)e^x - 2$.

b) La fonction $\dfrac{h(x)}{x+1}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[-a, a]$, donc elle est donc bornée sur ce même intervalle.
On peut aussi faire une démonstration directe.

c) f est définie , continue sur $]-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, 0[\cup] - 0\cup, +\infty[$.
Soit $x \in [-a, a]$. Alors f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ (si $x < 0$ on prend $[x, 0]$)
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que $g(x) - g(0) = g'(c)x = xc^2 \dfrac{h(c)}{1+c}$. D'où $|g(x)| \leq M\,|x|^3$
On en déduit que pour tout $x \in [-a, a]$: $|\dfrac{g(x)}{x^2}| \leq M|x|$ d'où $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$.

3. On peut écrire

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^x - 1 - \ln(x+1)}{x \ln(1+x)} = \frac{x}{2\ln(1+x)} \left(\frac{g(x)}{x^2} - \frac{(x^2-2x)(e^x-1)}{x^2} \right)$$

$\frac{(x^2-2x)(e^x-1)}{x^2} = (x-2)\frac{e^x - 1}{x} \to -2$

donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ ce qui montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

Autre méthode pour faire simplement cet exercice (utilisation de la formule de Taylor-Young) : On peut écrire :

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \quad$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$,
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x) \quad$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$
D'où

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1 - \ln(x+1)}{x\ln(1+x)} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) - 1 - x + \frac{x^2}{2} - x^2\varepsilon_2(x)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_2(x)} \\ &= \frac{x^2 + x^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_2(x)} = \frac{1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon_2(x)} \to 1 \end{aligned}$$

Simple et efficace !