Université de Poitiers
Mathématiques
MATH 2L03, Analyse élémentaire

2009-2010

Contrôle continu du 25 Fevrier 2010 - Corrigé

A Voir cours.

B.

1. a) La suite (u_n) est croissante car on a pour tout entier $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.

b) On montre par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $n! \geq 2^{n-1}$. Ceci nous permet d'avoir la majoration suivante :

$$u_n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \;=\; 1 + \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} \;=\; 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

On en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq 3$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée elle est donc convergente, on admet que sa limite est e.

2. a) On a :

• <u>La suite (u_n) est (strictement) croissante :</u> $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$

• <u>La suite v_n est (strictement) décroissante :</u>
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{n.n!} = \dfrac{-1}{nn!(n+1)^2} < 0$

• $\lim(v_n - u_n) = \dfrac{1}{n.n!} = 0$
Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjecentes

b) Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjecentes, elles convergent vers la même limite l et on a pour tout entier $n \geq 1$:
$u_n < l < v_n$.
D'après la question 1) $l = e$. Supposons que $e \in \mathbb{Q}$, $e = \dfrac{p}{q}$. On a donc $u_q < \dfrac{p}{q} < v_q$.
Multiplions par $q.q!$, on obtient

$$(q.q!).u_q < (q.q!)p < (q.q!)v_q.$$

Posons $qq!u_q = M \in \mathbb{N}$. Alors $q.q!v_q = M + 1$. Nous avons alors, l'entier $N = p.q.q!$ est tel que : $M < N < M + 1$, ce qui est absurde. Donc $e \notin \mathbb{Q}$.

C. 1. Par récurrence.
$u_0 = 1 \geq 0$, propriété vraie pour $n = 0$.
Supposons qu'on a pour un entier n, $u_n \geq 0$. Alors $2u_{n+1} + 3 \geq 3$ donc $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ existe et on a $u_{n+1} \geq 0$.

Nous avons montré par récurrence que (u_n) est définie et que $u_n \geq 0$ pour tout entier n.

2. La fonction $f(x) = \sqrt{2x+3}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc si (u_n) converge sa limite l est solution de l'équation $l = \sqrt{2l+3}$. Ce qui est équivalent à $l \geq 0$ et $l^2 - 2l - 3 = 0$. On obtient $l = 3$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 3| &= \left|\sqrt{2u_n + 3} - 3\right| \\ &= \frac{2 \mid u_n - 3 \mid}{\sqrt{2u_n+3}+3} \\ &\leq \tfrac{1}{2} \mid u_n - 3 \mid \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence (il faut le faire!) que

$$\mid u_n - 3 \mid \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n . \mid u_0 - 3 \mid = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Nous avons $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. On en déduit, d'après le théorème d'encadrement, que $\lim |u_n - 3| = 0$ ce qui est équivalent à $\lim u_n = 3$.

D.a) A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure.
1 est un majorant de A et $\lim 1 - \frac{1}{2^n} = 1$, d'après la carctérisation de la borne supérieure on a $\sup A = 1$
B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure.
$\sqrt{2}$ est un majorant de A. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$. on en déduit que $\sup B = \sqrt{2}$
Remarque : par exemple $a_n = 10^{-n}E(10^n\sqrt{2})$ est une suite d'éléments de B qui converge vers $\sqrt{2}$.

b) $u_n = \dfrac{n\cos(2n) + 2n^2}{3n(n+1) + \ln n} = \dfrac{n^2\left(\frac{\cos(2n)}{n} + 2\right)}{n^2\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n^2}\right)} = \dfrac{\frac{\cos(2n)}{n} + 2}{3 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n^2}}$. On a :

- $0 \leq \left|\frac{\cos(2n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$, nous avons d'après le théorème d'encadrement $\lim \frac{\cos(2n)}{n} = 0$.

- $\lim \frac{\ln n}{n^2} = 0$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$.

D'où $\lim u_n = \frac{2}{3}$